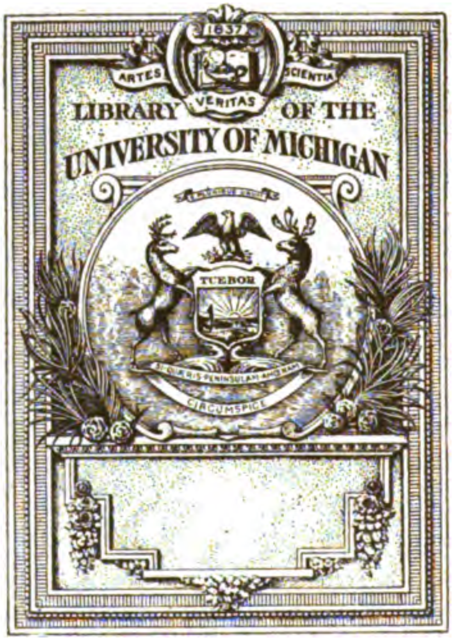

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

DIE PARTIELLEN
DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN
DER
MATHEMATISCHEN PHYSIK

DIE PARTIELLEN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

NACH RIEMANN'S VORLESUNGEN

IN FÜNFTER AUFLAGE

BEARBEITET VON

HEINRICH WEBER

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG

ZWEITER BAND

MIT 95 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDR. VIEWEG & SOHN

1912

VORREDE ZUM ZWEITEN BANDE.

In dem vorliegenden zweiten Bande sind die Erweiterungen und Berichtigungen in dem Umfang, wie ich sie in der Vorrede zum ersten Bande in Aussicht gestellt habe, durchgeführt. Eine umfangreichere Behandlung hat die Relativitäts-Theorie von Raum und Zeit gefunden, die unter den Händen von Mathematikern und Physikern fast täglich neue Seiten zeigt, deren Grundlagen noch keineswegs vollständig geklärt sind. Ich verdanke einen Beitrag dazu, betreffend den Michelsonschen Versuch, meinem Sohne R. H. Weber in Rostock. Die in der Elektronentheorie hervortretenden neuen Anschauungen in der Elektrizitätslehre sind in einem Beitrage von R. Gans gewürdigt.

Eine erneute Beschäftigung mit der Thermodynamik hat mich schließlich zu der Ansicht geführt, daß sich die Riemannsche Darstellung der Theorie der Luftstöße, wie ich sie in der vorigen Auflage gegeben habe, doch aufrecht erhalten läßt. Um aber den Einwänden zu begegnen, mußten die betreffenden Abschnitte eine neue und erweiterte Darstellung finden.

Straßburg, September 1911.

H. Weber.

INHALTSVERZEICHNIS DES ZWEITEN BANDES.

Erstes Buch.

Hilfsmittel aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Erster Abschnitt.

Integration durch hypergeometrische Reihen.

Zweiter Abschnitt.

Integration durch bestimmte Integrale.

Dritter Abschnitt.

Die P-Funktion von Riemann.

Vierter Abschnitt.

Oszillationstheoreme.

Zweites Buch.

Wärmeleitung.

Fünfter Abschnitt.

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung.

Sechster Abschnitt.

Probleme der Wärmeleitung, die nur von einer Koordinate abhängig sind.

Siebenter Abschnitt.

Wärmeleitung in der Kugel.

Drittes Buch.

Elastizitäts-Theorie.

Achter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Elastizität.

Neunter Abschnitt.

Statische Probleme der Elastizitätstheorie.

Zehnter Abschnitt.

Druck auf eine elastische Unterlage.

Elfter Abschnitt.

Bewegung der gespannten Saiten.

Zwölfter Abschnitt.

Die Riemannsche Integrationsmethode.

Dreizehnter Abschnitt.

Schwingungen einer Membran.

Vierzehnter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Differentialgleichung der schwingenden Membran.

Viertes Buch.

Elektrische Schwingungen.

Fünfzehnter Abschnitt.

Elektrische Wellen.

Sechzehnter Abschnitt.

Lineare elektrische Ströme.

Siebenzehnter Abschnitt.

Reflexion elektrischer Schwingungen.

Achtzehnter Abschnitt.

Relativität.

Fünftes Buch.

Hydrodynamik.

Neunzehnter Abschnitt.

Allgemeine Grundsätze.

Berichtigungen zum ~~zweiten~~ ersten Bande.

Seite 124, Formel (2) lies $f(z)$ statt (fz).

Seite 406, Zeile 6 von unten lies § 162 statt § 151.

Seite 407, Zeile 5 von oben lies $\mathfrak{S}^e$, $\mathfrak{S}^m$ statt S^e, S^m.

ERSTES BUCH

HILFSMITTEL AUS DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN

Erster Abschnitt.

Integration durch hypergeometrische Reihen.

§ 1.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir haben im siebenten Abschnitte des ersten Bandes einige der einfachsten und wichtigsten Sätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen kennen gelernt.

In den Problemen, die wir in den folgenden Blättern behandeln werden, treten solche Differentialgleichungen, und zwar besonders die von der zweiten Ordnung, immer mehr in den Vordergrund

Die Theorie der linearen Differentialgleichungen ist durch die funktionentheoretischen Methoden, die zuerst Riemann darauf angewandt hat, durch die Untersuchungen von Fuchs, Frobenius u. a. zu einer umfangreichen Lehre ausgebildet worden. Ein großer Teil dieser allgemeinen Theorie hat aber bisher, so wichtig er für die Analysis ist, in der Physik noch keine Verwendung gefunden, und es dürfte daher dem Leser, dessen Interesse in erster Linie auf die physikalischen Anwendungen gerichtet ist, willkommen sein, hier einen gedrängten Überblick über den Teil dieser Theorie zu finden, der für physikalische Anwendungen wichtig ist. Es kommen hierbei vorzugsweise die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Betracht, auf die wir uns von vornherein beschränken wollen. Wir knüpfen dabei an die älteren Untersuchungen von Euler, Gauß, Kummer an, auf die man zurückgreifen muß, wenn es sich um wirkliche zur Berechnung geeignete Darstellungen handelt [1]).

§ 2.
Einteilung der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach den Dimensionen.

Wir beschäftigen uns jetzt also mit der Integration einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = 0, \tag{1}$$

worin y die abhängige, x die unabhängige Variable bedeutet, die auch komplex sein kann, und

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{2}$$

gesetzt wird. Die Koeffizienten p_0, p_1, p_2 sind gegebene Funktionen von x.

Wir können diese Gleichung, ohne ihre Bedeutung zu ändern, mit einem beliebigen Faktor, der eine Funktion von x sein kann, multiplizieren, und wir können so den Koeffizienten des höchsten Differentialquotienten y'' durch Division mit dem von Null verschiedenen p_0 auf 1 reduzieren.

Wenn die Koeffizienten rationale Funktionen von x sind, so können wir die Gleichung durch Wegschaffen des Hauptnenners und aller gemeinschaftlichen Faktoren auf eine Form bringen, in der die Koeffizienten p_0, p_1, p_2 ganze rationale Funktionen von x ohne gemeinschaftlichen Teiler sind.

Dies ist der Fall, der uns hier fast ausschließlich beschäftigen wird.

---

1) Euler, Institutiones calculi integralis, vol. 2, cap. VIII.

Gauß, Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. (1812), Werke Bd. 3, S. 123 (und S. 207 aus dem Nachlaß).

Kummer, Über die hypergeometrische Reihe. Crelles Journal, Bd. 15 (1836).

Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gaußsche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen (1857), Werke S. 67 (und S. 379 aus dem Nachlaß).

Die Resultate der Untersuchungen von Fuchs und die neuere Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen überhaupt ist ausführlich dargestellt in den Lehrbüchern:

L. Heffter, Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Variablen. Leipzig 1894.

L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. Leipzig 1895 bis 1898.

Wir wollen hier zunächst den im ersten Bande nur kurz in der Anmerkung auf S. 138 angedeuteten Beweis nachtragen, daß die Gleichung (1) nicht mehr als zwei linear unabhängige Integrale haben kann.

Wenn die drei Funktionen y_1, y_2, y_3 linear abhängig sind, so läßt sich eine von ihnen, etwa y_3, linear und mit konstanten Koeffizienten durch die beiden anderen darstellen in der Form

$$y_3 = c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{3}$$

woraus durch zweimalige Differentiation

$$y_3' = c_1 y_1' + c_2 y_2', \tag{4}$$

$$y_3'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''. \tag{5}$$

Es muß also, wie aus der Theorie der linearen Gleichungen bekannt ist, die Determinante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} y_1, & y_1', & y_1'' \\ y_2, & y_2', & y_2'' \\ y_3, & y_3', & y_3'' \end{vmatrix} \tag{6}$$

verschwinden. Wenn umgekehrt diese Determinante verschwindet, so sind entweder schon y_1, y_2 voneinander linear abhängig, d. h. y_1 und y_2 stehen in konstantem Verhältnis und es ist

$$\varDelta_1 = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

gleich Null, oder es ist $\varDelta_1$ von Null verschieden und es lassen sich die Koeffizienten c_1, c_2, zunächst als Funktionen von x, so bestimmen, daß die Gleichungen (3), (4), und sodann wegen $\varDelta = 0$ auch (5) befriedigt sind. Dann folgt aber durch Differentiation von (3) und (4) mit Benutzung von (4) und (5):

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

und daraus ergibt sich, da $\varDelta_1$ von Null verschieden ist, $c_1' = 0$, $c_2' = 0$, und c_1 und c_2 sind also Konstanten.

Das Verschwinden der Determinante $\varDelta$ ist also die notwendige und hinreichende Bedingung für die lineare Abhängigkeit der drei Funktionen y_1, y_2, y_3.

Sind nun y_1, y_2, y_3 drei Lösungen von (1), so ist

$$\begin{aligned} p_0 y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1 &= 0, \\ p_0 y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2 &= 0, \\ p_0 y_3'' + p_1 y_3' + p_2 y_3 &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt, da p_0, p_1, p_2 nicht alle drei Null sind, daß die Determinante Δ verschwindet, y_1, y_2, y_3 also linear abhängig sind.

Wenn x_0 ein Wert von x ist, für den p_1/p_0 und p_2/p_0 nebst allen ihren Differentialquotienten endliche Werte haben, so kann man für $x = x_0$ die Werte $y = y_0$, $y' = y'_0$ willkürlich annehmen, und dann durch fortgesetzte Differentiation der Differentialgleichung (1) die Werte der höheren Differentialquotienten y''_0, y'''_0, ... bis zu beliebiger Höhe berechnen. Man bekommt so die Koeffizienten in der Taylorschen Entwickelung:

$$(8) \quad y = y_0 + (x - x_0)\,y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\,y''_0 + \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}\,y'''_0 + \cdots,$$

die dann ein Integral von (1) mit den beiden willkürlichen Konstanten y_0, y'_0 darstellt. Auf den Beweis der Konvergenz dieses Ausdruckes, der sich auf die Betrachtung der sogenannten Majoranten stützt und in den Lehrbüchern der Integralrechnung oder der Differentialgleichungen zu finden ist, gehen wir hier nicht ein, was wir um so eher können, da wir es in der Folge meist mit Differentialgleichungen zu tun haben werden, die sich durch leicht zu übersehende Ausdrücke integrieren lassen.

Die Entwickelung (8) kann nicht mehr aufgestellt werden, wenn p_0 für $x = x_0$ verschwindet. Diese Punkte x_0 heißen die singulären Punkte der Differentialgleichung. In ihrer Umgebung folgen die Entwickelungen der Integrale, wenn sie überhaupt möglich sind, anderen Gesetzen.

Den Fall, wo die Koeffizienten p_0, p_1, p_2 in der Gleichung (1) Konstanten sind, haben wir schon im ersten Bande ausführlich erörtert. Der nächst einfache Fall würde der sein, wo p_0, p_1, p_2 lineare Funktionen von x sind.

Es scheint aber für manche Zwecke, namentlich für die Integration durch Potenzreihen, sachgemäßer, die Differentialgleichungen nicht nach dem Grad der Koeffizienten, sondern nach den Dimensionen ihrer Glieder in bezug auf die Variable x einzuteilen[1]). Bei dieser Zählung haben x und dx die Dimension 1, während die Variable y keine Dimensionen erhält. Es haben also y' und y'' die Dimensionen -1 und -2, und um die Dimensionen aus den Differentialquotienten wegzuschaffen, setze man

[1]) Riemanns Werke, S. 435, 2. Auflage.

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x}\frac{dy}{d\log x}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{d\log x^2} - \frac{dy}{d\log x}\right). \end{aligned}$$

Durch diese Substitution erhält (1) die Form

$$(10)\qquad q_0\frac{d^2y}{d\log x^2} + q_1\frac{dy}{d\log x} + q_2 y = 0,$$

wenn

$$(11)\qquad p_0 = x^2 q_0, \quad p_1 = x(q_0 + q_1), \quad p_2 = q_2$$

gesetzt ist. Jetzt werden die Dimensionen der Differentialgleichung einfach durch die Dimensionen der Koeffizienten q bestimmt.

§ 3.

Differentialgleichungen mit linearen Koeffizienten.

Wenn die Differentialgleichung (10) § 2 nur Glieder von gleicher Dimension enthält, so sind q_0, q_1, q_2 mit einer Potenz von x proportional, und wir können diese Potenz von x wegheben, also q_0, q_1, q_2 konstant annehmen. Dann hat diese Differentialgleichung (10) das partikulare Integral

$$(1)\qquad y = x^m,$$

wenn m eine Wurzel der quadratischen Gleichung

$$(2)\qquad q_0 m^2 + q_1 m + q_2 = 0$$

ist, und man erhält daraus zwei partikulare Integrale, da man jede Wurzel dieser Gleichung für m nehmen kann. Sind diese beiden Wurzeln einander gleich, so erhält man das zweite partikulare Integral in der Form

$$(3)\qquad y = x^m \log x$$

(vgl. Bd. I, § 59).

Der nächst einfache Fall ist dann der, daß in der Differentialgleichung Glieder von zwei verschiedenen Dimensionen vorkommen. Dann haben die Koeffizienten q_0, q_1, q_2 die Form

$$(4)\qquad q_0 = a_0 + b_0 x^m, \quad q_1 = a_1 + b_1 x^m, \quad q_2 = a_2 + b_2 x^m$$

oder können wenigstens darauf gebracht werden durch Multiplikation der ganzen Gleichung mit einer Potenz von x. Es ist hierbei nicht erforderlich, daß m eine ganze Zahl sei; es kann m gebrochen oder irrational, positiv oder negativ sein. Die

$a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$ sind Konstanten. Mit dieser Klasse von Differentialgleichungen:

$$(5)\quad (a_0 + b_0 x^m)\frac{d^2 y}{d \log x^2} + (a_1 + b_1 x^m)\frac{d y}{d \log x} + (a_2 + b_2 x^m) y = 0$$

werden wir uns in der Folge vorzugsweise beschäftigen.

Hierauf kann man übrigens auch den Fall reduzieren, wo die Koeffizienten p_0, p_1, p_2 in (1) § 2 **lineare Funktionen von** x **sind**. In diesem Falle haben die einzelnen Glieder der Differentialgleichung

$$(6)\qquad p_0 y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

die folgenden Dimensionen:

$p_0 y''$	Dimensionen	-2,	-1,
$p_1 y'$	"	-1,	0,
$p_2 y$	"	0,	1.

Es kommen also im allgemeinen Glieder von vier verschiedenen Dimensionen darin vor, von denen in besonderen Fällen eine oder die andere wegfallen kann. Die Gleichung ändert ihre Form nicht, wenn man an Stelle von x eine neue Variable einführt, die eine ganze lineare Funktion von x ist.

Wenn daher zunächst p_0 nicht konstant ist, so kann man p_0 selbst als unabhängige Variable einführen, und erhält also die speziellere Form

$$(7)\qquad x y'' + p_1 y' + p_2 y = 0,$$

in der die Dimension -2 nicht mehr vorkommt. Substituiert man nun für y

$$(8)\qquad y = e^{\lambda x} z,$$

wenn λ eine noch zu bestimmende Konstante ist, so ergibt sich für z die Differentialgleichung

$$(9)\qquad x z'' + (2\lambda x + p_1) z' + (\lambda^2 x + \lambda p_1 + p_2) z = 0,$$

und man erhält nun eine quadratische Gleichung für λ, wenn man fordert, daß

$$\lambda^2 x + \lambda p_1 + p_2$$

von x unabhängig, also konstant werden soll. Dann aber bleiben in der Gleichung (9) nur noch die Dimensionen 0 und -1, und sie kann auf die Form (5) gebracht werden.

Ist aber p_0 konstant, so können wir $p_0 = 1$ annehmen, und erhalten durch die Substitution (8)

$$(10)\qquad z'' + (2\lambda + p_1) z' + (\lambda^2 + \lambda p_1 + p_2) z = 0.$$

Wenn nun p_1 nicht konstant ist, so können wir λ so bestimmen, daß $\lambda^2 + \lambda p_1 + p_2$ konstant wird, und dann können wir die lineare Funktion $2\lambda + p_1$ als neue unabhängige Variable x einführen. Dann aber erhält (10) nur noch Glieder der beiden Dimensionen

$$-2, \qquad 0.$$

Ist aber endlich auch p_1 konstant, so kann man $2\lambda + p_1 = 0$ setzen und dann für die lineare Funktion $\lambda^2 + \lambda p_1 + p_2$ eine neue Variable x einführen, wodurch man auf die Form der Differentialgleichung

$$z'' + cxz = 0 \tag{11}$$

geführt wird, die nur die beiden Dimensionen -2, $+1$ enthält [1]).

§ 4.

Die hypergeometrische Differentialgleichung.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Differentialgleichung (5) § 3 über:

$$(a_0 + b_0 x^m)\frac{d^2 y}{d \log x^2} + (a_1 + b_1 x^m)\frac{d y}{d \log x} + (a_2 + b_2 x^m) y = 0. \tag{1}$$

Um einige Beispiele anzuführen, bemerken wir, daß diese Gleichung für

$$a_0 = 1, \quad b_0 = a_1 = b_1 = 0, \quad a_2 = -n^2, \quad b_2 = 1, \quad m = 2,$$

in

$$\frac{d^2 y}{d \log x^2} + (x^2 - n^2) y = 0$$

übergeht, was mit der Differentialgleichung für die Besselsche Funktion J_n [Bd. I, § 72 (12)] übereinstimmt.

Unter der Annahme

$$m = 2, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = -1, \quad a_1 = -1, \quad b_1 = -(2\nu + 1)$$
$$a_2 = 0, \quad b_2 = n(n+1) - \nu(\nu + 1)$$

erhält man die Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\frac{d^2 y}{d \log x^2} - [1 + (2\nu + 1)x^2]\frac{d y}{d \log x}$$
$$+ [n(n+1) - \nu(\nu+1)]x^2 y = 0,$$

oder

---

[1]) Schlömilch, Kompendium der höheren Analysis, 2, 515. 2. Aufl. Braunschweig 1874.

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-(2\nu+2)x\frac{dy}{dx}+[n(n+1)-\nu(\nu+1)]y=0,$$

worin man die Differentialgleichung der Kugelfunktionen, Bd. I, § 121 (3) erkennt.

Wenn man in (1) die Substitution $x = x_1^\mu$, $d\log x = \mu\, d\log x_1$ macht, so erhält man

$$(2)\qquad (a_0+b_0x_1^{m\mu})\frac{d^2y}{d\log x_1^2}+\mu(a_1+b_1x_1^{m\mu})\frac{dy}{d\log x_1} + \mu^2(a_2+b_2x_1^{m\mu})y=0.$$

Die Gleichung ändert also ihre Form nicht, und da der Exponent μ beliebig ist, so folgt, daß die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird, wenn man in (1) für m einen beliebigen speziellen Wert setzt. Setzt man einmal $m=+1$, dann $m=-1$ und multipliziert im letzten Falle die ganze Gleichung mit x, so erhält man beide Male eine Gleichung von der gleichen Form, nur daß der Koeffizient des ersten Gliedes das eine Mal a_0+b_0x, das andere Mal b_0+a_0x ist. Da a_0 und b_0 nicht beide verschwinden können, so erhalten wir aus (1) eine Gleichung von hinlänglicher Allgemeinheit:

$$(3)\quad (a_0+b_0x)\frac{d^2y}{d\log x^2}+(a_1+b_1x)\frac{dy}{d\log x}+(a_2+b_2x)y=0,$$

wenn wir darin noch die Annahme machen, daß a_0 von Null verschieden ist.

Nun führen wir noch für y eine neue Variable y_1 ein, indem wir

$$(4)\qquad y = x^\mu y_1$$

setzen. Die neue Gleichung für y_1 wird dann, wenn wir zur Abkürzung die linearen Koeffizienten von (3) wieder mit q_0, q_1, q_2 bezeichnen:

$$(5)\quad q_0\frac{d^2y_1}{d\log x^2}+(2q_0\mu+q_1)\frac{dy_1}{d\log x}+(q_0\mu^2+q_1\mu+q_2)y_1=0.$$

Die Form der Gleichung bleibt also dieselbe; wir erhalten aber noch die Möglichkeit, über eine der Konstanten zu verfügen, und wir wollen dies dadurch tun, daß wir

$$a_0\mu^2+a_1\mu+a_2=0$$

setzen, also den Koeffizienten von y_1 mit x proportional annehmen. Demnach können wir die Gleichung (3) in der Form annehmen:

$$(6)\qquad (a_0 + b_0 x)\frac{d^2 y}{d\log x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{d\log x} + b_2 x y = 0.$$

Wir machen vorläufig noch die Annahme, daß auch b_0 von *Null verschieden* sei, worin allerdings eine beschränkende Voraussetzung liegt. Wir werden aber das schließliche Resultat dann durch einen einfachen Grenzübergang auch auf den Fall $b_0 = 0$ ausdehnen können (§ 6). Dann führen wir für x eine neue Variable

$$x_1 = -\frac{b_0 x}{a_0}$$

ein, und können, mit etwas veränderter Bedeutung der Konstanten, die Gleichung in der Form annehmen:

$$(7)\qquad (1 - x)\frac{d^2 y}{d\log x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{dy}{d\log x} + b_2 x y = 0.$$

Diese Gleichung nennen wir die *hypergeometrische Differentialgleichung*.

§ 5.

Die hypergeometrische Reihe.

Wir wollen nun die Differentialgleichung (7) § 4 durch eine Potenzreihe zu integrieren suchen.

Wir setzen, indem wir mit A_n unbestimmte Konstanten bezeichnen:

$$(1)\qquad \begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \\ \frac{dy}{d\log x} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n n x^n, \\ \frac{d^2 y}{d\log x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n n^2 x^n, \end{aligned}$$

und wenn wir dies einsetzen, so folgt:

$$(2)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n n(n + a_1) - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1}(n^2 - b_1 n - b_2) = 0.$$

Um diese Gleichung etwas einfacher darstellen zu können, wollen wir uns die quadratische Funktion, die hier als Koeffizient von x^{n+1} auftritt, in ihre linearen Faktoren zerlegen, indem wir

$$n^2 - b_1 n - b_2 = (n + \alpha)(n + \beta)$$

setzen, so daß

$$(3) \qquad b_1 = -\alpha - \beta, \qquad b_2 = -\alpha\beta,$$

und außerdem setzen wir noch

$$(4) \qquad a_1 = \gamma - 1,$$

so daß die Differentialgleichung § 4 (7) so dargestellt wird:

$$(5) \quad (1-x)\frac{d^2 y}{d\log x^2} + [\gamma - 1 - (\alpha+\beta)x]\frac{dy}{d\log x} - \alpha\beta x y = 0.$$

Mit Benutzung von

$$\frac{dy}{d\log x} = x\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{d\log x^2} = x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}$$

kann man hierfür nach Unterdrückung eines Faktors x auch schreiben:

$$(6) \quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0,$$

und da man in der ersten Summe (2) das Glied für $n = 0$ als verschwindend weglassen kann, so ergibt sich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n n(n+\gamma-1) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+1}(n+\alpha)(n+\beta),$$

oder wenn man in der zweiten Summe $n - 1$ an Stelle von n setzt:

$$(7) \ \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n n(n+\gamma-1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1} x^n (n+\alpha-1)(n+\beta-1).$$

Da diese beiden Reihen identisch sein sollen, so folgt:

$$(8) \qquad A_n = A_{n-1}\frac{(n+\alpha-1)(n+\beta-1)}{n(n+\gamma-1)}.$$

Setzen wir, was uns freisteht, $A_0 = 1$, so folgt

$$A_1 = \frac{\alpha\beta}{1.\gamma},$$

$$A_2 = A_1\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2.(\gamma+1)},$$

. . . .

$$A_n = A_{n-1}\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n.(\gamma+n-1)},$$

und daraus durch Multiplikation

$$A_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1.2\ldots\ldots\ldots\ldots n}\,\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}.$$

Wir kommen also zu folgendem Resultat:

Definieren wir eine Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ durch die unendliche Reihe:

$$(9)\quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{1.2.3}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \cdots,$$

so ist

$$y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

ein partikulares Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung (6).

Die unendliche Reihe (9) wird die **hypergeometrische Reihe** genannt.

Auf ihre Konvergenz können wir aus (8) schließen. Danach nähert sich der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder

$$\frac{A_{n+1}x^{n+1}}{A_n x^n} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)}x$$

mit unendlich wachsendem n der Grenze x, und daraus folgt nach einem bekannten Satze, daß die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ unbedingt konvergiert, solange der absolute Wert von x kleiner als 1 ist. Es ist also durch diese Reihe eine stetige Funktion des komplexen Argumentes x innerhalb des Einheitskreises definiert.

Ein Ausnahmefall ist aber zu erwähnen, in dem die bisherigen Betrachtungen ihre Gültigkeit verlieren, nämlich wenn $\gamma = 0$ oder gleich einer negativen ganzen Zahl ist, weil dann die Glieder von (9) von einem gewissen an unendlich groß werden. Wir kommen auf den Ausnahmefall, den wir vorläufig ausschließen, zurück.

Wenn dagegen α oder β gleich einer negativen ganzen Zahl ist, so ist $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine ganze rationale Funktion von x.

Die Vertauschung von α mit β bewirkt weder in der Differentialgleichung (5) oder (6), noch in der Reihe (9) eine Änderung, und es ist daher identisch

$$(10)\qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\beta, \alpha, \gamma, x).$$

§ 6.

Die Grenzfälle.

Wir haben bei der Umformung der Gleichung § 4 (6) die Annahme gemacht, daß der Koeffizient b_0 von Null verschieden sei, und haben den Fall $b_0 = 0$ als einen Grenzfall bezeichnet, für den wir das Resultat schließlich durch einen Grenzübergang erhalten würden. Um dies nun auszuführen, setzen wir in der Gleichung § 5 (6)

$$(1) \qquad x = h x_1,$$

worin h eine unbestimmte Konstante bedeutet, und erhalten, wenn wir mit h multiplizieren:

$$(2) \quad x_1(1 - h x_1)\frac{d^2 y}{d x_1^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1) h x_1]\frac{d y}{d x_1} - h\alpha\beta y = 0.$$

Wenn wir nun h in Null übergehen lassen, so würde, wenn wir dabei α, β unverändert lassen, das letzte Glied wegfallen und wir würden nicht zu dem gewünschten Resultate kommen. Dies können wir vermeiden, wenn wir α und β in einer gewissen Abhängigkeit von h unendlich groß werden lassen. Es genügt, zwei Formen dieser Abhängigkeit ins Auge zu fassen:

$$1. \quad \alpha = \frac{1}{h}, \qquad \beta \text{ von } h \text{ unabhängig,}$$

$$2. \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{h}}, \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

(Die Beifügung konstanter Faktoren würde nichts wesentlich Neues ergeben.)

Wenn wir dann h in Null übergehen lassen, so erhalten wir aus (2) die beiden Gleichungen:

$$(3) \qquad x_1 \frac{d^2 y}{d x_1^2} + (\gamma - x_1)\frac{d y}{d x_1} - \beta y = 0,$$

$$(4) \qquad x_1 \frac{d^2 y}{d x_1^2} + \gamma \frac{d y}{d x_1} - y = 0,$$

und wenn man den gleichen Grenzübergang in der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ macht, erhält man für das Integral von (3):

$$(5) \qquad \lim_{h=0} F\left(\frac{1}{h}, \beta, \gamma, h x_1\right) =$$

$$1 + \frac{\beta}{\gamma}\frac{x_1}{1} + \frac{\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1}\frac{x_1^2}{1.2} + \frac{\beta.\beta+1.\beta+2}{\gamma.\gamma+1.\gamma+2}\frac{x_1^3}{1.2.3} + \cdots$$

und für das Integral von (4):

$$(6) \qquad \lim_{h=0} F\left(\frac{1}{\sqrt{h}}, \frac{1}{\sqrt{h}}, \gamma, h x_1\right) =$$

$$1 + \frac{x_1}{1.\gamma} + \frac{x_1^2}{1.2.\gamma.\gamma+1} + \frac{x_1^3}{1.2.3.\gamma.\gamma+1.\gamma+2} + \cdots$$

Diese beiden Reihen sind für alle Werte von x_1 konvergent, was man leicht an den Reihen selbst nachweist, wie aber auch aus der Substitution (1) hervorgeht.

Die Differentialgleichung (4) führt auf die Besselschen Funktionen, und in der Tat ergibt sich aus der Reihe (6) nach Band I, § 71 (3):

$$(7) \qquad J_n(x) =$$
$$\frac{x^n}{2.4\ldots 2n}\left\{1 - \frac{x^2}{2.2n+2} + \frac{x^4}{2.4.2n+2.2n+4} - \cdots\right\}$$
$$= \frac{x^n}{2.4\ldots 2n} \operatorname*{Lim}_{h=0} F\left(\frac{1}{\sqrt{h}}, \frac{1}{\sqrt{h}}, n+1, -\frac{hx^2}{4}\right).$$

Hierdurch ist nun auch der früher ausgeschlossene Fall erledigt, daß der Koeffizient b_0 verschwindet. Denn in diesem Fall kommt die Gleichung § 4 (6) auf die Form der Gleichung (3) zurück.

§ 7.

Die verschiedenen Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung.

Die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ gibt uns nur ein partikulares Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung, und auch dieses nur in einem begrenzten Bereiche der komplexen Variablen x, nämlich im Einheitskreis. Aus diesem einen aber können wir durch Umformung der Differentialgleichung eine große Zahl anderer Integrale herleiten, die uns die nötige Ergänzung geben.

Wir gehen von der hypergeometrischen Differentialgleichung in den beiden Formen aus [§ 5 (5), (6)]:

$$(1) \quad (1-x)\frac{d^2 y}{d \log x^2} + [\gamma - 1 - (\alpha+\beta)x]\frac{dy}{d\log x} - \alpha\beta x y = 0,$$

$$(2) \quad x(1-x)\frac{d^2 y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0.$$

Diese Gleichung wird integriert durch die Funktion

$$\mathrm{I}_1 \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Wenn wir aber in (2) die Substitution machen:

$$(3) \qquad x_1 = 1 - x, \qquad dx_1 = -dx,$$

so ergibt sich

$$(4)\quad x_1(1-x_1)\frac{d^2y}{dx_1^2}+[\alpha+\beta-\gamma+1-(\alpha+\beta+1)x_1]\frac{dy}{dx_1}$$
$$-\alpha\beta y=0,$$

und diese Gleichung geht aus (2) hervor, wenn wir x durch x_1, γ durch $\alpha+\beta-\gamma+1$ ersetzen. Wir haben also ein zweites Integral der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$\mathrm{II}_1\qquad F(\alpha,\beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-x).$$

Machen wir ferner in (1) die Substitution

$$(5)\qquad x_1=x^{-1},\qquad d\log x=-d\log x_1,$$

so folgt

$$(6)\quad (x_1-1)\frac{d^2y}{d\log x_1^2}+[\alpha+\beta-(\gamma-1)x_1]\frac{dy}{d\log x_1}-\alpha\beta y=0.$$

Diese Gleichung hat noch nicht vollständig die Form der Gleichung (1), insofern der Koeffizient von y nicht mit x_1 proportional, sondern konstant ist. Um sie auf diese Form zu bringen, verfahren wir wie in § 4, indem wir setzen:

$$y=x_1^\mu y_1,$$
$$(7)\qquad \frac{dy}{d\log x_1}=x_1^\mu\left(\frac{dy_1}{d\log x_1}+\mu y_1\right),$$
$$\frac{d^2y}{d\log x_1^2}=x_1^\mu\left(\frac{d^2y_1}{d\log x_1^2}+2\mu\frac{dy_1}{d\log x_1}+\mu^2y_1\right)$$

und erhalten aus (6):

$$(x_1-1)\frac{d^2y_1}{d\log x_1^2}+[2\mu(x_1-1)+\alpha+\beta-(\gamma-1)x_1]\frac{dy_1}{d\log x_1}$$
$$+\{\mu^2(x_1-1)+\mu[\alpha+\beta-(\gamma-1)x_1]-\alpha\beta\}\,y_1=0.$$

Wenn nun der konstante Teil im Koeffizienten von y_1 wegfallen soll, so müssen wir

$$\mu^2-\mu(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0,$$

also

$$\mu=\alpha\quad\text{oder}\quad\mu=\beta$$

setzen. Nehmen wir $\mu=\alpha$, so folgt:

$$(8)\quad (1-x_1)\frac{d^2y_1}{d\log x_1^2}+[\alpha-\beta-(2\alpha-\gamma+1)x_1]\frac{dy_1}{d\log x_1}$$
$$-\alpha(\alpha-\gamma+1)x_1y_1=0,$$

und diese Gleichung hat das Integral

$$F(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1,\ x_1),$$

und demnach ist nach (6) und (8) ein Integral der Differentialgleichung (1):

$$\text{III}_1. \qquad x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{x}\right).$$

Da hier nun die Vertauschung von α mit β nicht dasselbe gibt, so erhalten wir noch ein anderes Integral von (1):

$$\text{III}_2. \qquad x^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right).$$

Hieraus können wir ohne weitere Transformationen das ganze System der hierher gehörigen Formeln ableiten. Es folgt nämlich aus III_1 und III_2, daß die beiden Funktionen

$$F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, x^{-1}),$$
$$x^{\alpha-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, x^{-1}),$$

oder, wenn wir

$$\alpha = \alpha', \quad \alpha - \gamma + 1 = \beta', \quad \alpha - \beta + 1 = \gamma', \quad x^{-1} = x'$$

setzen:

$$(9) \qquad \begin{gathered} F(\alpha', \beta', \gamma', x'), \\ x'^{1-\gamma'} F(\alpha' - \gamma' + 1, \beta' - \gamma' + 1, 2 - \gamma', x') \end{gathered}$$

partikulare Lösungen einer und derselben hypergeometrischen Differentialgleichung sind, die man aus (1) erhält, wenn man α, β, γ, x durch $\alpha', \beta', \gamma', x'$ ersetzt. Läßt man also die Akzente wieder weg, so erhält man aus der zweiten Funktion (9) eine weitere Lösung der Gleichung (1):

$$\text{I}_2. \qquad x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x).$$

Ebenso wie wir von I_1 zu I_2 übergehen, können wir von II_1 zu einem neuen Integral II_2 der Gleichung (1) übergehen:

$$\text{II}_2. \quad (1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x),$$

und wenn wir die Transformation II_1 auf die F-Funktion in II_2 anwenden:

$$\text{I}_3. \qquad (1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma, x),$$

und durch Anwendung der Transformation I_2 auf die F-Funktion in I_3 ergibt sich:

$$\text{I}_4. \qquad x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1 - \beta, 1 - \alpha, 2 - \gamma, x).$$

Hiermit haben wir vier verschiedene nach Potenzen von x fortschreitende Entwickelungen partikularer Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung:

$$
\text{I.}\quad
\begin{aligned}
&1.\quad F(\alpha, \beta, \gamma, x),\\
&2.\quad x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ 2 - \gamma,\ x),\\
&3.\quad (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta,\ \gamma - \alpha,\ \gamma,\ x),\\
&4.\quad x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(1 - \beta,\ 1 - \alpha,\ 2 - \gamma,\ x).
\end{aligned}
$$

Wenn wir auf diese vier F-Funktionen die Transformation II_1 anwenden, so erhalten wir vier Entwickelungen nach Potenzen von $1 - x$:

$$
\text{II.}\quad
\begin{aligned}
&1.\ F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1,\ 1 - x),\\
&2.\ x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1,\ \alpha + \beta - \gamma + 1,\ 1 - x),\\
&3.\ (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta,\ \gamma - \alpha,\ \gamma - \alpha - \beta + 1,\ 1 - x),\\
&4.\ x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(1 - \beta,\ 1 - \alpha,\ \gamma - \alpha - \beta + 1,\ 1 - x).
\end{aligned}
$$

Weiter wenden wir auf die F-Funktionen in I und in II die Transformation III_1 und III_2 an. Dadurch ergibt sich:

$$
\text{III.}\quad
\begin{aligned}
&1.\quad x^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha - \gamma + 1,\ \alpha - \beta + 1,\ \frac{1}{x}\right),\\
&2.\quad x^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta - \gamma + 1,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{x}\right),\\
&3.\quad x^{\beta - \gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F\left(\gamma - \beta,\ 1 - \beta,\ \alpha - \beta + 1,\ \frac{1}{x}\right),\\
&4.\quad x^{\alpha - \gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F\left(\gamma - \alpha,\ 1 - \alpha,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{x}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\text{IV.}\quad
\begin{aligned}
&1.\quad (1 - x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \gamma - \beta,\ \alpha - \beta + 1,\ \frac{1}{1 - x}\right),\\
&2.\quad (1 - x)^{-\beta} F\left(\beta,\ \gamma - \alpha,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{1 - x}\right),\\
&3.\quad x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - 1} F\left(\alpha - \gamma + 1,\ 1 - \beta,\ \alpha - \beta + 1,\ \frac{1}{1 - x}\right),\\
&4.\quad x^{1-\gamma}(1 - x)^{\gamma - \beta - 1} F\left(\beta - \gamma + 1,\ 1 - \alpha,\ \beta - \alpha + 1,\ \frac{1}{1 - x}\right).
\end{aligned}
$$

Endlich wenden wir auf die beiden Systeme III, IV die Transformation II_1 an, wodurch sich ergibt:

$$
\text{V.}\quad
\begin{aligned}
&1.\quad x^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha - \gamma + 1,\ \alpha + \beta - \gamma + 1,\ \frac{x - 1}{x}\right),\\
&2.\quad x^{-\beta} F\left(\beta,\ \beta - \gamma + 1,\ \alpha + \beta - \gamma + 1,\ \frac{x - 1}{x}\right),\\
&3.\quad x^{\beta - \gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F\left(\gamma - \beta,\ 1 - \beta,\ \gamma - \alpha - \beta + 1,\ \frac{x - 1}{x}\right),\\
&4.\quad x^{\alpha - \gamma}(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F\left(\gamma - \alpha,\ 1 - \alpha,\ \gamma - \alpha - \beta + 1,\ \frac{x - 1}{x}\right).
\end{aligned}
$$

$$\text{VI.}\quad\begin{aligned}
&1.\quad (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right),\\
&2.\quad (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right),\\
&3.\quad x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right),\\
&4.\quad x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta-\gamma+1, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right).
\end{aligned}$$

Man könnte die abgeleiteten Transformationen noch in mannigfacher anderer Weise miteinander kombinieren, würde aber dadurch keine weiteren Formeln erhalten.

§ 8.

Die Konvergenzbereiche.

Wir haben im vorigen Paragraphen 24 verschiedene Entwickelungen partikularer Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung gefunden, die in sechs Gruppen von je vier zerfallen, deren jede nach den Potenzen von einer der sechs Variabeln.

$$\begin{array}{lcccccc}
 & \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} & \text{V.} & \text{VI.}\\
(1) & x, & 1-x, & \dfrac{1}{x}, & \dfrac{1}{1-x}, & \dfrac{x-1}{x}, & \dfrac{x}{x-1}
\end{array}$$

fortschreitet. Die erste Gruppe konvergiert, wie wir gesehen haben, solange der absolute Wert von x kleiner als 1 ist, also, wenn wir uns die komplexe Variable x in einer Ebene darstellen, innerhalb des Einheitskreises. Die Reihen der zweiten Gruppe konvergieren in einem Kreise, der mit dem Radius 1 um den Punkt $x = 1$ beschrieben ist, und die Reihen der dritten und vierten Gruppe konvergieren je außerhalb dieser beiden Kreise.

Die Reihen der fünften Gruppe konvergieren, solange der absolute Wert von $x - 1$ kleiner ist als der absolute Wert von x, also, wenn wir $x = x_1 + i x_2$ setzen, solange

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 < x_1^2 + x_2^2$$

oder, was dasselbe ist, solange der reelle Teil x_1 von x größer als 1/2 ist, und ebenso konvergieren die Reihen VI, solange der reelle Teil von x kleiner als 1/2 ist.

Um diese Verhältnisse zu veranschaulichen, teilen wir die x-Ebene durch zwei Kreise mit dem Radius 1 und den Mittelpunkten $x = 0$ und $x = 1$, und durch ihre gemeinschaftliche Sehne in sechs Regionen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, wie es die Fig. 1 zeigt. Dann haben wir folgende Konvergenzbereiche:

für die Reihen I:	Konvergenzbereich	2, 3, 4
„ „ „ II:	„	3, 4, 5
„ „ „ III:	„	1, 5, 6
„ „ „ IV:	„	1, 2, 6
„ „ „ V:	„	4, 5, 6
„ „ „ VI:	„	1, 2, 3.

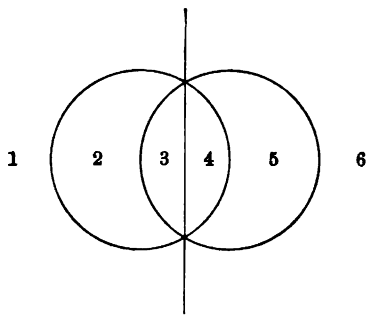
Nur solche Reihen können unmittelbar miteinander verglichen werden, die einen gemeinschaftlichen Konvergenzbereich haben, und zwischen je dreien von diesen muß, da die Differentialgleichung nur zwei linear unabhängige Lösungen hat, eine homogene lineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen.

Betrachten wir etwa die beiden Reihen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} F &= F(\alpha, \beta, \gamma, x), \\ F' &= x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x), \end{aligned}$$

so haben wir darin, abgesehen von dem Falle, daß γ eine ganze Zahl ist, zwei **unabhängige partikulare Integrale** der hypergeometrischen Differentialgleichung. Beide enthalten den Nullpunkt in ihrem Konvergenzbereiche; das erste erhält für $x = 0$ den Wert 1, das zweite wird Null oder unendlich. Es läßt sich nun jede der Reihen I bis VI, die den Nullpunkt in ihrem Konvergenzbereich enthält, etwa F'', linear homogen durch F und F' ausdrücken, und wenn

Fig. 1.



die Reihe F'' für $x = 0$ den Wert 1 erhält, so läßt sie sich in der Umgebung des Nullpunktes nach ganzen positiven Potenzen von x entwickeln. Es muß daher der Koeffizient von F' in dem Ausdruck für F'' verschwinden und aus dem Wert 1 für $x = 0$ ergibt sich, daß $F'' = F$ sein muß.

Wir schließen daraus, daß die Reihen, die den Nullpunkt in ihrem Konvergenzbereiche enthalten und bei unbestimmtem

γ für $x = 0$ den Wert 1 annehmen, in ihrem gemeinsamen Konvergenzbereiche dieselbe Funktion darstellen.

So erhalten wir vier Darstellungen einer Funktion F_1, die in dem Konvergenzbereiche 2, 3 gelten:

$$\begin{aligned}
F_1 &= F(\alpha, \beta, \gamma, x), \\
&= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma, x), \\
&= (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right), \\
&= (1-x)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).
\end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir in der Umgebung des Nullpunktes vier Darstellungen eines zweiten partikularen Integrals, das nach Multiplikation mit $x^{\gamma-1}$ für $x = 0$ in 1 übergeht:

$$\begin{aligned}
F_2 &= x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x), \\
&= x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\beta, 1-\alpha, 2-\gamma, x), \\
&= x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right), \\
&= x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta-\gamma+1, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right),
\end{aligned}$$

und wenn man die Punkte $x = 1$, $x = \infty$ ebenso behandelt wie hier den Punkt $x = 0$, so erhält man für den Konvergenzbereich 4,5:

$$\begin{aligned}
F_3 &= F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x), \\
&= x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x), \\
&= x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{x-1}{x}\right), \\
&= x^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{x-1}{x}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4 &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x), \\
&= x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\beta, 1-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x), \\
&= x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma-\beta, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{x-1}{x}\right), \\
&= x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma-\alpha, 1-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{x-1}{x}\right),
\end{aligned}$$

und für den Konvergenzbereich 1,6:

$$F_5 = x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{x}\right),$$
$$= x^{\beta-\gamma}(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma - \beta, 1 - \beta, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{x}\right),$$
$$= (x-1)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{1-x}\right)$$
$$= x^{1-\gamma}(x-1)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha - \gamma + 1, 1 - \beta, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{1-x}\right).$$
$$F_6 = x^{-\beta} F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right),$$
$$= x^{\alpha-\gamma}(x-1)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(\gamma - \alpha, 1 - \alpha, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right),$$
$$= (x-1)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma - \alpha, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{1-x}\right),$$
$$= x^{1-\gamma}(x-1)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta - \gamma + 1, 1 - \alpha, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{1-x}\right),$$

Wenn drei dieser Funktionen einen gemeinsamen Konvergenzbereich haben, so muß eine von ihnen linear durch die beiden anderen darstellbar sein. So wird z. B. F_1, F_2, F_3, F_4 durch die beiden ersten Reihen von vier Gruppen in dem Konvergenzbereich 3, 4 definiert und es muß also

$$F_3 = A_1 F_1 + A_2 F_2,$$
$$F_4 = B_1 F_1 + B_2 F_2$$

sein. Um die Konstanten zu bestimmen, läßt man x in 0 und in 1 übergehen, kommt aber dabei an die Grenze des Konvergenzbereichs. Zur wirklichen Bestimmung der Konstanten muß man den Wert kennen, in den die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $x = 1$ übergeht, einen Wert, den Gauß durch die Π-Funktion dargestellt hat. der aber nicht immer endlich ist. Wir kommen hierauf im nächsten Abschnitt zurück.

§ 9.

Die Ausnahmefälle.

Wir haben im vorigen Paragraphen für die hypergeometrische Differentialgleichung

$$(1) \quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

zwei unabhängige partikulare Integrale gefunden:

$$(2) \qquad \begin{aligned} y_1 &= F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ y_2 &= x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x), \end{aligned}$$

die in einem den Nullpunkt umgebenden Bereich dargestellt sind, und durch die übrigen Funktionen F_i ist dasselbe für die anderen Bereiche geleistet. Die Differentialgleichung ist dadurch also vollständig integriert. Wir haben aber hierbei vorausgesetzt, daß γ keine ganze Zahl sei. Wenn nämlich $\gamma = 1$ ist, so sind die beiden Funktionen (2) nicht voneinander verschieden, und wenn $\gamma - 1$ gleich einer negativen oder positiven ganzen Zahl ist, so verliert der erste oder zweite der Ausdrücke (2) seine Gültigkeit. Ist aber m eine positive ganze Zahl, so erhält man, wenn sich $\gamma + m - 1$ der Grenze Null nähert, als Grenzwert von $(\gamma + m - 1) F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, von einem konstanten Faktor abgesehen, $x^m F(\alpha + m, \beta + m, m + 1, x)$, und dies ist der Ausdruck von y_2 für $\gamma = 1 - m$. Die beiden Formeln (2) ergeben also auch in diesem Falle nur ein Integral der Differentialgleichung (1).

Ein partikulares Integral der Differentialgleichung (1) erhalten wir aber aus den Formeln (2) unter allen Umständen.

Ist $\alpha - 1$ eine negative ganze Zahl, so bricht die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ mit dem $(1 - \alpha)$ten Gliede ab, und ist also eine ganze rationale Funktion von x vom Grade $-\alpha$. Es wird also in diesem Falle die Differentialgleichung (1) durch eine ganze rationale Funktion von x integriert. Hierbei ist zunächst angenommen, daß $\gamma - 1$ nicht gleichzeitig eine negative ganze Zahl ist. Wenn aber auch γ ganzzahlig ist, und zugleich $\gamma \gtreqless \alpha$, so wird doch die Differentialgleichung (1) durch eine ganze rationale Funktion integriert, die man erhält, wenn man die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ auf ihre $1 - \alpha$ ersten Glieder beschränkt, in denen noch kein verschwindender Nenner vorkommt. [§ 5, (8).] Wir drücken dies so aus:

I. Die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bricht mit dem $(1 - \alpha)$ten Gliede ab, wenn α und γ ganze Zahlen sind, die einer der beiden Bedingungen

$$\gamma \leqq \alpha \gtreqless 0$$
$$\alpha \leqq 0, \quad \gamma > 0$$

genügen.

Hiernach läßt sich für alle Fälle, in denen α und γ ganze Zahlen sind, ein Integral der Differentialgleichung (1) in geschlossener Form angeben, wie man nach dem Satze I. aus nachstehender Zusammenstellung erkennt:

1. $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, a) $\gamma \gtreqless \alpha$: $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$,
   b) $\gamma > \alpha$: $x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x)$,
2. $\gamma > 0$, $\alpha \lesseqgtr 0$: $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$,
3. $\gamma \leqq 0$, $\alpha > 0$: $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x)$,
4. $\gamma \leqq 0$, $\alpha \lesseqgtr 0$, a) $\gamma \lesseqgtr \alpha$: $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$,
   b) $\gamma > \alpha$: $x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x)$.

Ebenso können wir schließen, wenn β eine ganze Zahl ist.

Wenn α und β als nicht ganzzahlig vorausgesetzt werden, so läßt sich durch die folgende Betrachtung der allgemeine Fall eines ganzzahligen γ auf den besonderen Fall $\gamma = 1$ zurückführen:

Wenn wir die Differentialgleichung (1) nach x differentiieren, und zur Abkürzung

$$y' = \frac{dy}{dx} \tag{3}$$

setzen, so folgt:

$$x(1-y)\frac{d^2y'}{dx^2} + [\gamma+1-(\alpha+\beta+3)x]\frac{dy'}{dx} - (\alpha+1)(\beta+1)y' = 0, \tag{4}$$

und diese Gleichung geht andererseits auch aus (1) hervor, wenn y durch y' und α, β, γ durch $\alpha+1, \beta+1, \gamma+1$ ersetzt wird.

Bezeichnen wir also eine Lösung der Differentialgleichung (1) mit $Y(\alpha, \beta, \gamma)$, so erhalten wir aus (3) und (4):

$$Y(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1) = \frac{d\,Y(\alpha, \beta, \gamma)}{dx}. \tag{5}$$

Für die Funktion F gibt dies die Relation:

$$F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) = \frac{\gamma}{\alpha\beta}\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx}, \tag{6}$$

die sich unmittelbar durch Differentiation der hypergeometrischen Reihe bestätigen läßt.

Nimmt man für $Y(\alpha, \beta, \gamma)$ zwei unabhängige Integrale y_1, y_2 von (1), so werden die Differentialquotienten dy_1/dx, dy_2/dx nur dann voneinander abhängig sein, wenn eine Relation $c_1y_1 + c_2y_2 = c$ besteht, worin c_1, c_2 Konstanten und c eine von Null verschiedene Konstante ist. Dies ist aber nur möglich, wenn c eine Lösung von (1), also α oder $\beta = 0$ ist. Da wir aber ganzzahlige α, β ausgeschlossen haben, so erhalten wir aus (5) jedes

$$Y(\alpha + 1,\ \beta + 1,\ \gamma + 1)$$

aus einem $Y(\alpha, \beta, \gamma)$ und es ist also durch diese Formel der Fall $\gamma + 1$ auf den Fall γ zurückgeführt.

Auf der anderen Seite können wir die Differentialgleichung (1) so darstellen:

$$(7)\quad \frac{d}{dx}\left\{x(1-x)\frac{dy}{dx} + [\gamma - 1 - (\alpha+\beta-1)x]y\right\} = (\alpha-1)(\beta-1)y.$$

Setzen wir also

$$z = x(1-x)\frac{dy}{dx} + [\gamma - 1 - (\alpha + \beta - 1)x]\,y,$$

und folglich nach (7):

$$\frac{dz}{dx} = (\alpha - 1)(\beta - 1)\,y, \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = (\alpha - 1)(\beta - 1)\frac{dy}{dx};$$

so ergibt sich

$$x(1-x)\frac{d^2 z}{dx^2} + [\gamma - 1 - (\alpha+\beta-1)x]\frac{dz}{dx} - (\alpha-1)(\beta-1)z = 0,$$

und es ist also z eine Funktion $Y(\alpha - 1,\ \beta - 1,\ \gamma - 1)$.

Wir erhalten so:

$$(8)\qquad Y(\alpha - 1,\ \beta - 1,\ \gamma - 1) =$$
$$x(1-x)\frac{dY(\alpha,\beta,\gamma)}{dx} + [\gamma - 1 - (\alpha + \beta - 1)x]\ Y(\alpha, \beta, \gamma),$$

und hierdurch ist der Fall $\gamma - 1$ auf den Fall γ zurückgeführt. Auch hier ist der Fall eines ganzzahligen α oder β auszuschließen.

Durch wiederholte Anwendung von (5) und (8) kann also die Integration der Differentialgleichung (1) für irgend ein ganzzahliges γ auf den Fall $\gamma = 1$ zurückgeführt werden.

In dem Falle ganzzahliger α, β lassen sich aber nicht alle Integrale für ein ganzzahliges γ durch bloße Differentiation aus dem Falle $\gamma = 1$ ableiten.

§ 10.

Das zweite partikulare Integral für $\gamma = 1$.

Wenn wir aus den beiden Integralen y_1, y_2, zunächst bei unbestimmtem γ, eine lineare homogene Funktion mit konstanten

Koeffizienten bilden, so erhalten wir wieder ein Integral. Ein solches ist also auch

(1) $$y = \frac{y_1 - y_2}{\gamma - 1}.$$

Da nun, wenn wir γ in 1 übergehen lassen, $y_1 = y_2$ wird, so erhält (1) die unbestimmte Form $0/0$ und wir können den Grenzwert durch Differentiation bestimmen. Wir erhalten so für $\gamma = 1$ das zweite partikulare Integral in der Form:

(2) $$y = \left(\frac{\partial y_1}{\partial \gamma} - \frac{\partial y_2}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=1}.$$

Es ist aber

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$
$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x),$$

und wenn wir also in bezug auf γ differentiieren, und der Kürze halber $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ mit F bezeichnen, so folgt für $\gamma = 1$:

$$\frac{\partial y_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial F}{\partial \gamma},$$
$$\frac{\partial y_2}{\partial \gamma} = -F \log x - \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \beta} - \frac{\partial F}{\partial \gamma},$$

und folglich wird

(3) $$y = F \log x + \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F}{\partial \gamma},$$

wenn nach der Differentiation $\gamma = 1$ gesetzt wird.

Um diesen Ausdruck explizite darzustellen, setzen wir zur Abkürzung

(4) $$A_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{1.2\ldots n} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)},$$

so daß

(5) $$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

ist. Es folgt nun:

$$\frac{\partial \log A_n}{\partial \alpha} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha + \nu},$$
$$\frac{\partial \log A_n}{\partial \beta} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\beta + \nu},$$
$$\frac{\partial \log A_n}{\partial \gamma} = -\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\gamma + \nu},$$

und wenn wir also

$$(6)\qquad a_n = \frac{\partial \log A_n}{\partial \alpha} + \frac{\partial \log A_n}{\partial \beta} + 2\frac{\partial \log A_n}{\partial \gamma}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma - \alpha}{(\alpha+\nu)(\gamma+\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\gamma - \beta}{(\beta+\nu)(\gamma+\nu)},$$

$$(7)\qquad B_n = A_n a_n$$

setzen, so ist a_n ein Ausdruck, der mit unendlich wachsendem n einen endlichen Grenzwert hat, und folglich ist die Reihe

$$(8)\qquad \Phi(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$

in demselben Umfange konvergent wie die Reihe (5), nämlich im Einheitskreis.

Es braucht hier auch der Fall nicht ausgenommen zu werden, daß α oder β negative ganze Zahlen sind, obwohl die Nenner von a_n dann gleich Null werden, weil die Faktoren $\alpha + \nu$, $\beta + \nu$ im Nenner von $B_n = A_n a_n$ nicht mehr vorkommen. Es ist aber nach (6), (7) und (8):

$$(9)\qquad \Phi(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\frac{\partial F}{\partial \gamma},$$

und demnach erhält man die beiden partikularen Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung für den Fall $\gamma = 1$ dargestellt durch die im Einheitskreis gültigen Entwickelungen:

$$(10)\qquad \begin{aligned} y_1 &= F(\alpha, \beta, 1, x), \\ y_2 &= \log x\, F(\alpha, \beta, 1, x) + \Phi(\alpha, \beta, 1, x). \end{aligned}$$

§ 11.

Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung bei ganzzahligem γ.

Um das zweite partikulare Integral einer Differentialgleichung zu finden, nachdem eines bekannt ist, können wir noch einen anderen Weg einschlagen.

Wenn wir die Formel Bd. I, § 65 (13):

$$(1)\qquad y_1 y_2' - y_2 y_1' = Ce^{-\int u\,dx}$$

auf unseren Fall anwenden wollen, haben wir zu setzen

$$u = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} = \frac{\gamma}{x} - \frac{\alpha + \beta - \gamma + 1}{1 - x}$$

$$= \frac{d}{dx} \log x^{\gamma} (1 - x)^{\alpha + \beta - \gamma + 1},$$

und es folgt also:

(2) $$y_1 y_2' - y_2 y_1' = C x^{-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$$

oder:

(3) $$\frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1} = C\,\frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{y_1^2}.$$

Nehmen wir also y_1 als bekannt an, so folgt hieraus, wenn wir die Konstante $C = 1$ setzen:

(4) $$y_2 = y_1 \int x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{dx}{y_1^2};$$

eine additive Konstante bei diesem Integral kann zugefügt werden, weil dadurch y_2 in eine lineare Kombination von y_2 und y_1 übergeht.

Ist zunächst γ eine positive ganze Zahl, so können wir

(5) $$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

setzen, und $x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} y_1^{-2}$ in eine Potenzreihe nach aufsteigenden Potenzen von x entwickeln:

(6) $$x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} y_1^{-2} = x^{-\gamma} + a_1 x^{-\gamma+1} + a_2 x^{-\gamma+2} \ldots$$

Hieraus ergibt sich durch Integration nach (4):

(7) $$y_2 = a_{\gamma-1} y_1 \log x + x^{1-\gamma}\,\Phi,$$

worin Φ eine nach ganzen positiven Potenzen von x fortschreitende Reihe bedeutet.

Die Koeffizienten dieser Entwickelung sind Funktionen von α, β, γ. Für $\gamma = 1$ ist $a_{\gamma-1} = 1$. Es kann aber für andere Werte von γ auch vorkommen, daß $a_{\gamma-1}$ verschwindet, und also in dem Integral y_2 kein logarithmisches Glied vorkommt. Dies findet z. B. für $\gamma = 2$, $\alpha = 1$ statt.

Ist $\gamma = 0$ oder gleich einer negativen ganzen Zahl, so kann man in (4)

(8) $$y_1 = x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x)$$

setzen, und erhält eine Entwickelung der Form:

$$x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} y_1^{-2} = x^{\gamma-2} + a_1 x^{\gamma-1} + a_2 x^{\gamma} + a_3 x^{\gamma+1} + \cdots$$

Also wird nach (4):

(9) $$y_2 = a_{1-\gamma} y_1 \log x + \Phi,$$

worin wieder Φ eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihe bedeutet. Auch hier kann es vorkommen, daß $a_{1-\gamma}$ verschwindet.

Zweiter Abschnitt.

Integration durch bestimmte Integrale.

§ 12.

Die Funktion $\Pi(\alpha)$.

Die Darstellungen der Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung durch die hypergeometrische Reihe sind, wie wir gesehen haben, nur in einem begrenzten Bereiche für die Variable x gültig. Allgemein gültige Ausdrücke erhält man, wenn man diese Reihen in bestimmte Integrale verwandelt. Dazu benutzen wir die Gaußsche Funktion $\Pi(\alpha)$, die im wesentlichen mit dem von Legendre als Gamma-Funktion bezeichneten Eulerschen Integral übereinstimmt $[\Pi(\alpha) = \Gamma(\alpha + 1)]$. Wir wollen sie hier durch ein bestimmtes Integral definieren:

$$\Pi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha \, dx, \tag{1}$$

wobei die Integration über reelle positive Werte von x zu erstrecken ist. Um die Potenz x^α eindeutig zu bestimmen, verstehen wir darunter für ein reelles α den reellen positiven Wert von x^α, und eine Potenz mit komplexen Exponenten $\alpha + \beta i$ definieren wir eindeutig durch

$$x^{\alpha + i\beta} = x^\alpha [\cos(\beta \log x) + i \sin(\beta \log x)] \tag{2}$$

mit reellem Logarithmus. Hiernach ist das Integral in (1) konvergent, solange der reelle Teil von α größer als -1 ist, und insoweit ist durch (1) die Funktion $\Pi(\alpha)$ definiert. Wenn wir unter dieser Voraussetzung die Formel

$$d(e^{-x} x^{\alpha+1}) = (\alpha + 1) e^{-x} x^\alpha dx - e^{-x} x^{\alpha+1} dx$$

zwischen den Grenzen 0 und ∞ integrieren, so ergibt sich die Grundformel:

(3) $$\Pi(\alpha + 1) = (\alpha + 1)\,\Pi(\alpha),$$

und durch wiederholte Anwendung:

(4) $$\Pi(\alpha + n) = (\alpha + 1)\,(\alpha + 2)\,\ldots\,(\alpha + n)\,\Pi(\alpha).$$

Durch diese Formel können wir $\Pi(\alpha)$ auch dann definieren, wenn der reelle Teil von α kleiner als -1 ist. Wir brauchen nur, wenn α nicht gleich einer negativen ganzen Zahl ist, n so groß zu nehmen, daß $\alpha + n$ positiv wird, und dann ist $\Pi(\alpha)$ durch (1) und (4), unabhängig von n, definiert.

Es ergibt sich aus (1):

(5) $$\Pi(0) = 1$$

und demnach aus (4), wenn n eine ganze positive Zahl ist:

(6) $$\Pi(n) = 1 . 2 . 3 \ldots n = n!$$

Es hat also $\Pi(n)$ dieselbe Bedeutung, in der wir dies Zeichen schon mehrfach gebraucht haben (Bd. I, § 15).

Wenn α eine negative ganze Zahl ist, so wird, wie die Formel (4) zeigt, $\Pi(\alpha)$ unendlich.

Von diesen Werten abgesehen, ist $\Pi(\alpha)$ nach (1) und (4) eine eindeutige und stetige Funktion der komplexen Variablen α.

Ist a eine positive Größe, so ergibt sich, wenn man unter dem Integralzeichen ax an Stelle von x setzt:

(7) $$\int_0^\infty e^{-ax}\,x^\alpha\,dx = \frac{\Pi(\alpha)}{a^{\alpha+1}}.$$

Es sei y eine positive Variable. Wir setzen in (7) $a = 1 + y$, also:

(8) $$\int_0^\infty e^{-(1+y)x}\,x^\alpha\,dx = \frac{\Pi(\alpha)}{(1+y)^{\alpha+1}}.$$

Diese Formel multiplizieren wir mit $y^\beta\,dy$, und integrieren von 0 bis ∞. Dadurch folgt:

$$\int_0^\infty y^\beta\,dy \int_0^\infty e^{-(1+y)x}\,x^\alpha\,dx = \Pi(\alpha)\int_0^\infty \frac{y^\beta\,dy}{(1+y)^{\alpha+1}},$$

und wenn wir auf der linken Seite die Integrationsfolge umkehren:

$$\Pi(\alpha)\int_0^\infty \frac{y^\beta\,dy}{(1+y)^{\alpha+1}} = \int_0^\infty e^{-x}\,x^\alpha\,dx \int_0^\infty e^{-xy}\,y^\beta\,dy.$$

Auf das innere Integral, das jetzt auf der rechten Seite steht, können wir wieder die Formel (7) anwenden und erhalten:

$$\Pi(\beta)\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-\beta-1}\,dx = \Pi(\beta)\,\Pi(\alpha-\beta-1).$$

Daraus folgt also:

$$\int_0^\infty \frac{y^\beta\,dy}{(1+y)^{\alpha+1}} = \frac{\Pi(\beta)\,\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha)},$$

oder, wenn wir α durch $\alpha+\beta+1$ ersetzen:

(9) $$\int_0^\infty \frac{y^\beta\,dy}{(1+y)^{\alpha+\beta+2}} = \frac{\Pi(\alpha)\,\Pi(\beta)}{\Pi(\alpha+\beta+1)}.$$

Wenn wir hier α mit β vertauschen, so bleibt die rechte Seite ungeändert, während dies auf der linken Seite nicht sofort ersichtlich ist. Macht man aber die Substitution

$$\frac{y}{1+y} = s, \quad \frac{1}{1+y} = 1-s, \quad \frac{dy}{(1+y)^2} = ds,$$

so ergibt sich:

(10) $$\int_0^1 (1-s)^\alpha s^\beta\,ds = \frac{\Pi(\alpha)\,\Pi(\beta)}{\Pi(\alpha+\beta+1)}$$

und hier werden auf der linken Seite α und β vertauscht, wenn man s durch $1-s$ ersetzt.

In der Formel (10) können α und β irgend zwei Zahlen sein, deren reelle Teile größer als -1 sind.

§ 13.

Ausdruck der hypergeometrischen Reihe durch ein bestimmtes Integral.

Die Relationen zwischen den Π-Funktionen gestatten, für die hypergeometrische Reihe einen geschlossenen Ausdruck zu finden, indem man die Binomialreihe zu Hilfe nimmt. Nach dem binomischen Lehrsatz ist nämlich, wenn der absolute Wert von z kleiner als 1 ist:

$$(1+z)^{-\alpha} = 1 - \alpha z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}z^2 - \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{1.2\ldots n}z^n$$

oder, mit Benutzung der Formel § 12, (4):

$$(1) \qquad (1 + z)^{-\alpha} = \frac{1}{\Pi(\alpha - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi(\alpha + n - 1)}{\Pi(n)} (-z)^n.$$

Mit Benutzung derselben Formel können wir die Funktion $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ so darstellen:

$$(2) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) =$$

$$\frac{\Pi(\gamma - 1)}{\Pi(\alpha - 1)\, \Pi(\beta - 1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi(\alpha + n - 1)\, \Pi(\beta + n - 1)}{\Pi(n)\, \Pi(\gamma + n - 1)} x^n$$

und nach § 12, (10) ist

$$\frac{\Pi(\beta + n - 1)\, \Pi(\gamma - \beta - 1)}{\Pi(\gamma + n - 1)} = \int_0^1 (1 - s)^{\gamma - \beta - 1} s^{\beta + n - 1} ds.$$

Hiernach können wir die Formel (2), wenn wir die Summation unter dem Integralzeichen vornehmen, so darstellen:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) =$$

$$\frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\, \Pi(\beta-1)\, \Pi(\gamma-\beta-1)} \int_0^1 (1-s)^{\gamma-\beta-1} s^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Pi(\alpha+n-1)}{\Pi(n)} (sx)^n ds$$

und mit Benutzung von (1), wenn man $z = - sx$ setzt:

$$(3) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) =$$

$$\frac{\Pi(\gamma - 1)}{\Pi(\beta - 1)\, \Pi(\gamma - \beta - 1)} \int_0^1 s^{\beta - 1} (1 - s)^{\gamma - \beta - 1} (1 - sx)^{-\alpha} ds,$$

woraus man eine zweite ähnliche Darstellung erhält, wenn man α mit β vertauscht.

Die Formel (3) ist in dieser Form nur anwendbar, wenn die reellen Teile von β und $\gamma - \beta$ positiv sind, weil sonst das Integral nicht konvergent wäre. Dagegen behält das Integral auf der rechten Seite von (3) auch dann einen Sinn, wenn der absolute Wert von x größer als 1 ist, wo die Konvergenz der F-Reihe aufhört.

Da aber die hypergeometrische Differentialgleichung identisch befriedigt ist, wenn man die Reihe F oder das ihr gleiche Integral (3) einsetzt, so wird dieses Integral für alle Werte von x ein Integral dieser Gleichung sein.

Die Formel (3) gestattet uns einen Schluß auf den Wert von $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für $x = 1$. Lassen wir in dem Integral (3) x in 1 übergehen, so ergibt sich:

$$\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\,ds,$$

und das ist nur dann endlich, wenn

(4) $$\gamma-\alpha-\beta>0$$

ist, oder wenn wenigstens der reelle Teil von $\gamma-\alpha-\beta$ positiv ist. Ist diese Bedingung erfüllt, so können wir den Wert des Integrals nach § 12, (10) bestimmen, und wir finden so

(5) $$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

§ 14.

Integration der hypergeometrischen Differentialgleichung durch bestimmte Integrale.

Wenn man den direkten Nachweis führen will, daß das Integral (3) des vorigen Paragraphen der hypergeometrischen Differentialgleichung

(1) $$x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0$$

genügt, so gelangt man zu einer wesentlichen Verallgemeinerung dieses Resultats.

Wir setzen, da es auf den konstanten Faktor hierbei nicht ankommt, indem wir einstweilen die Grenzen des Integrals unbestimmt lassen:

(2) $$\begin{aligned} y &= \int s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-sx)^{-\alpha}\,ds,\\ y' &= \alpha\int s^{\beta}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-sx)^{-\alpha-1}\,ds,\\ y'' &= \alpha(\alpha+1)\int s^{\beta+1}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-sx)^{-\alpha-2}\,ds, \end{aligned}$$

und daraus, wenn wir die linke Seite der Gleichung (1) mit $[y]$ bezeichnen, also für irgend eine Funktion y

(3) $$[y]=x(1-x)y''+[y-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y$$

und zur Abkürzung

(4) $$\varphi(s)=s^{\beta}(1-s)^{\gamma-\beta}(1-xs)^{-\alpha-1}$$

setzen, für den Ausdruck (2) von y:

(5) $$[y]=-\alpha\int\varphi(s)\frac{\beta-\gamma s+sx\,[\alpha-\beta+1-s(\alpha-\gamma+1)]}{s(1-s)(1-xs)}\,ds,$$

andererseits aber ergibt sich durch Differentiation nach s:

$$\frac{d\log\varphi(s)}{ds} = \frac{\beta - \gamma s + s x[\alpha - \beta + 1 - s(\alpha - \gamma + 1)]}{s(1-s)(1-xs)},$$

und wir erhalten also:

$$(6) \qquad [y] = -\alpha \int \frac{d\varphi(s)}{ds}\, ds.$$

Die Integration auf der rechten Seite läßt sich also ausführen, und es ergibt sich, daß $[y] = 0$, also die Differentialgleichung erfüllt ist, wenn man die Grenzen des Integrals so wählt, daß in ihnen die Funktion $\varphi(s)$ verschwindet.

Dies geschieht aber

$$(7) \qquad \begin{array}{llll} \text{für } & s = 0, & \text{wenn} & \beta > 0, \\ ,, & s = 1, & ,, & \gamma - \beta > 0, \\ ,, & s = \frac{1}{x}, & ,, & -\alpha - 1 > 0, \\ ,, & s = \infty, & ,, & \alpha - \gamma + 1 > 0, \end{array}$$

und wenn daher a, b irgend zwei von den vier Werten

$$(8) \qquad 0,\ 1,\ \frac{1}{x},\ \infty$$

bedeuten, so ist, wenn die betreffende Voraussetzung (7) erfüllt ist:

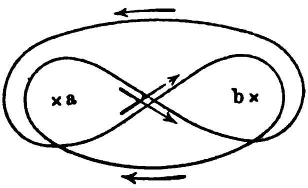
$$(9) \qquad y = \int_a^b s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-sx)^{-\alpha}\, ds$$

ein Integral der Differentialgleichung (1). Es ist hierbei nur noch zu bemerken, daß, wenn eine der Grenzen des Integrals gleich $1/x$ ist, bei der Bildung von y' und y'' zunächst noch Glieder hinzukommen würden, die von der Differentiation in bezug auf die Grenzen herrühren. Diese Glieder fallen aber beim Einsetzen der Grenze wieder heraus, weil sie die Faktoren $(1-sx)^{-\alpha}$, $(1-sx)^{-\alpha-1}$ enthalten.

Da man aus vier Dingen sechs verschiedene Paare auswählen kann, so erhält man auf diesem Wege sechs verschiedene Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung, die jedoch niemals alle zugleich brauchbar sind, weil die vier Bedingungen (7) nicht alle zugleich bestehen können.

Man kann sich von der in (7) enthaltenen beschränkenden Voraussetzung frei machen, wenn man erwägt, daß der Ausdruck $[y]$ nach (6) auch dann verschwindet, wenn man die Integration in bezug auf die komplexe Variable s auf einem in sich zurücklaufenden Wege ausführt, der keinen der Punkte $0, 1, 1/x, \infty$ berührt, und der so bestimmt ist, daß die Funktion $\varphi(s)$ bei stetiger Veränderung zu demselben Wert zurückkehrt, von dem sie ausgegangen ist, bei dem jedoch das Integral y selbst nicht identisch verschwindet.

Fig. 2.



Solche Integrationswege kann man, nach Pochhammer[1]), durch die sogenannten Doppelumläufe bilden. Die Fig. 2 zeigt einen solchen Weg. Hier wird jeder der beiden kritischen Punkte a, b zweimal, und zwar in entgegengesetztem Sinne umlaufen, so daß sich die Faktoren, die die Funktion $\varphi(s)$ bei jedem Umlauf annimmt, gegenseitig aufheben. Trotzdem verschwindet das Integral

$$y = \int \frac{\varphi(s)(1 - xs)\,ds}{s(1-s)},$$

auf diesem Wege genommen, nicht identisch.

Denn nehmen wir 0 und 1 für a und b und setzen β und $\gamma - \beta$ positiv voraus, so können wir die vier Strecken 1, 2, 3, 4 des Integrationsweges in Fig. 2 alle auf die Strecke ab zusammenziehen. Hat in entsprechenden Punkten dieser vier Strecken die Funktion φ die Werte φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, so ist

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= e^{-2\pi i(\gamma-\beta)}\,\varphi_1 \\
\varphi_3 &= e^{2\pi i\beta}\,\varphi_2 = e^{4\pi i\beta}\,e^{-2\pi i\gamma}\,\varphi_1 \\
\varphi_4 &= e^{2\pi i(\gamma-\beta)}\,\varphi_3 = e^{2\pi i\beta}\,\varphi_1
\end{aligned}$$

und das über den Integrationsweg der Fig. 2 genommene Integral

$$y = \int s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-xs)^{-\alpha}\,ds$$

erhält den Wert

$$(10)\quad y = (1-e^{2\pi i\beta})(1-e^{2\pi i(\beta-\gamma)})\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-xs)^{-\alpha}\,ds,$$

ist also von Null verschieden, wenn nicht β oder $\beta - \gamma$ eine ganze Zahl ist.

[1]) Pochhammer, „Über die Integrale mit doppeltem Umlauf", Mathematische Annalen, Bd. 35.

§ 15.

Lineare Transformation.

Durch Umformung der in § 14 besprochenen Integraldarstellungen gewinnt man aufs neue die früher gefundenen 24 Darstellungen durch hypergeometrische Reihen, indem man die verschiedenen Integrationsgrenzen durch lineare Transformation auf 0 und 1 zurückführt.

In einer linearen Substitution zwischen zwei Variablen s und t

$$t = \frac{As + B}{Cs + D} \tag{1}$$

lassen sich die Koeffizienten A, B, C, D so bestimmen, daß drei gegebenen Werten von s drei gleichfalls gegebene Werte von t entsprechen. Wenn wir also die vier Werte

$$s = 0,\ 1,\ \infty,\ \frac{1}{x}$$

den vier Werten

$$t = 0,\ 1,\ \infty,\ \frac{1}{x_1}$$

in irgend einer Reihenfolge entsprechen lassen, woraus, wenn x gegeben ist, x_1 eben aus (1) zu bestimmen ist, so erhält man 24 solcher Substitutionen, die das Integral

$$y = \int_a^b s^{\beta-1}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-sx)^{-\alpha}\,ds$$

auf ein ähnlich gebildetes zurückführen.

Bezeichnen wir die Werte 0, 1, ∞, $1/x_1$ in irgend einer Reihenfolge mit a, b, c, e, so können wir also festsetzen, daß die Werte

$$\begin{aligned} s &= 0,\ 1,\ \infty,\ \frac{1}{x} \\ t &= a,\ b,\ c,\ e \end{aligned} \tag{2}$$

sich in dieser Reihenfolge entsprechen sollen. Dann können wir die lineare Substitution (1) in der Form annehmen:

$$s = \frac{t-a}{t-c} \cdot \frac{b-c}{b-a}, \tag{3}$$

die mit jeder der beiden folgenden gleichbedeutend ist:

$$(4)\qquad \begin{aligned} 1 - s &= \frac{t-b}{t-c} \cdot \frac{a-c}{a-b}, \\ 1 - xs &= \frac{t-e}{t-c} \cdot \frac{a-c}{a-e}, \end{aligned}$$

woraus man noch erhält, wenn man in (3) $t = e$, $s = 1/x$ setzt:

$$(5)\qquad x = \frac{e-c}{e-a}\,\frac{b-a}{b-c}, \quad 1 - x = \frac{(b-e)\,(a-c)}{(b-c)\,(a-e)},$$

und durch logarithmische Differentation von (3):

$$(6)\qquad \frac{ds}{s} = \frac{(a-c)\,dt}{(t-a)\,(t-c)}.$$

Danach findet man die folgende Transformation [§ 13, (3)]:

$$(7)\quad \frac{\Pi(\beta-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}{\Pi(\gamma-1)} F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \int_0^1 s^{\beta}(1-s)^{\gamma-\beta-1}(1-sx)^{-\alpha}\frac{ds}{s}$$

$$= \int_a^b \frac{(t-a)^{\beta-1}\,(t-b)^{\gamma-\beta-1}\,(t-c)^{\alpha-\gamma}\,(t-e)^{-\alpha}}{(c-b)^{-\beta}\,(a-c)^{\alpha+\beta-\gamma}\,(a-b)^{\gamma-1}\,(a-e)^{-\alpha}}\,dt,$$

und hierin sind 24 verschiedene Darstellungen der F-Funktion durch bestimmte Integrale enthalten. Die Variable x, die aus (5) bestimmt wird, erhält hierbei nur sechs verschiedene Ausdrücke:

$$x = x_1, \quad 1 - x_1, \quad \frac{1}{x_1}, \quad \frac{x_1 - 1}{x_1}, \quad \frac{1}{1 - x_1}, \quad \frac{x_1}{x_1 - 1}.$$

Nehmen wir z. B. $a = 0$, $b = 1$, $c = 1/x_1$, $e = \infty$, so gibt die Gleichung (5):

$$\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = \frac{x}{x-1},$$

und das Integral in der Formel (7) wird

$$(1 - x_1)^{\beta} \int_0^1 t^{\beta-1}\,(1-t)^{\gamma-\beta-1}\,(1 - x_1 t)^{\alpha-\gamma}\,dt,$$

wodurch man eine der Formeln aus § 8 erhält.

Dritter Abschnitt.

Die P-Funktion von Riemann.

§ 16.

Definition der Q-Funktion.

Die Methoden und Hilfsmittel, die die Funktionentheorie Riemann verdankt, deren Grundgedanke darin besteht, eine Funktion durch eine möglichst kleine Zahl voneinander unabhängiger Eigenschaften zu definieren, und erst in zweiter Linie zu ihrer analytischen Darstellung überzugehen, haben sich in der Theorie der linearen Differentialgleichungen als besonders fruchtbar erwiesen, und sind auch in den Anwendungen auf mathematische Physik von großem Nutzen. Es scheint daher zweckmäßig, hier einen Überblick über die Ergebnisse dieser Methode zu geben, soweit sie die hypergeometrischen Funktionen betreffen.

Es werde eine Funktion

$$(1) \qquad Q\begin{pmatrix} a, & b, & c & \\ \alpha, & \beta, & \gamma & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{pmatrix}$$

der komplexen Variablen x, die wir die Q-Funktion nennen, durch folgende Eigenschaften definiert, wobei die Frage nach der Möglichkeit einer solchen Funktion zunächst noch gänzlich offen bleibt.

I. Die Funktion Q sei in der Umgebung eines jeden von a, b, c verschiedenen Punktes x_0 endlich und stetig.

Nach Bd. I, § 51 ist damit ausgesprochen, daß sich die Funktion Q in eine Reihe entwickeln läßt, die nach ganzen positiven Potenzen von $(x - x_0)$ fortschreitet, deren Konvergenzkreis um den Punkt x_0 bis zum nächsten der drei Punkte a, b, c reicht. Ist keiner der Punkte a, b, c im Unendlichen, so läßt sich Q außerhalb eines gewissen Kreises in eine konvergente Reihe nach Potenzen von $1/x$ entwickeln.

Die drei Punkte a, b, c nennen wir den ersten, zweiten und dritten Verzweigungspunkt der Funktion Q.

Wir schließen auch den Fall nicht aus, daß einer dieser Verzweigungspunkte ins Unendliche fällt.

Wenn wir den Punkt x in seiner Ebene von irgend einer Anfangslage x_0 aus einen geschlossenen Weg beschreiben lassen, so wird Q bei stetiger Änderung wieder zu seinem Ausgangswert zurückgekehrt sein, wenn dieser geschlossene Weg keinen der drei Verzweigungspunkte oder auch alle drei einschließt. Denn in beiden Fällen kann der geschlossene Weg ohne Überschreitung eines Verzweigungspunktes auf einen Punkt zusammengezogen werden.

Wenn aber der geschlossene Weg anders beschaffen ist, so wird Q im allgemeinen zu einem anderen Werte Q' gelangt sein; es ist also Q mehrwertig, und es kann Q auf diese Weise selbst in unbegrenzt viele andere Werte übergehen, die wir die Zweige der Q-Funktion nennen. Jeder solche Zweig ist dann, von den Verzweigungspunkten abgesehen, eine endliche und stetige Funktion von x.

Wir setzen voraus:

II. Es gibt zwei Zweige Q', Q'', die nicht in konstantem Verhältnis stehen, aber zwischen irgend drei Zweigen Q, Q', Q'' der Q-Funktion besteht eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten:

$$cQ + c'Q' + c''Q'' = 0. \tag{2}$$

Durch irgend zwei nicht in konstantem Verhältnis stehende Zweige Q', Q'' einer Q-Funktion kann jeder andere Zweig linear homogen mit konstanten Koeffizienten ausgedrückt werden.

Es kommt eine dritte Bestimmung hinzu, die das Verhalten der Q-Funktion in der Umgebung der Verzweigungspunkte charakterisiert.

III. Die Funktion Q ist in jeder der drei Formen darstellbar:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&c_\alpha Q^\alpha + c_{\alpha'} Q^{\alpha'},\\
&c_\beta Q^\beta + c_{\beta'} Q^{\beta'},\\
&c_\gamma Q^\gamma + c_{\gamma'} Q^{\gamma'},
\end{aligned}
$$

mit konstanten Koeffizienten $c_\alpha, c_{\alpha'}, \ldots, c_{\gamma'}$, so daß

$$
(4)\qquad (x-a)^{-\alpha} Q^\alpha, \quad (x-a)^{-\alpha'} Q^{\alpha'}
$$

in der Umgebung von a endlich, stetig und für $x = a$ von Null verschieden, also nach positiven ganzen Potenzen von $(x - a)$ entwickelbar sind und daß

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&(x-b)^{-\beta} Q^\beta, \quad (x-b)^{-\beta'} Q^{\beta'},\\
&(x-c)^{-\gamma} Q^\gamma, \quad (x-c)^{-\gamma'} Q^{\gamma'}
\end{aligned}
$$

in der Umgebung der beiden anderen Verzweigungspunkte dieselbe Eigenschaft haben.

Wenn einer der Verzweigungspunkte, etwa b, im Unendlichen liegt, so ist hier $1/x$ an Stelle von $x - b$ zu setzen.

In den verschiedenen Zweigen einer Q-Funktion sollen die $Q^\alpha, \ldots, Q^{\gamma'}$ dieselben sein, und nur die Konstanten $c_\alpha, \ldots, c_{\gamma'}$ verschieden.

Die α, α'; β, β'; γ, γ' sind gegebene reelle oder imaginäre Größen, die das erste, zweite, dritte Exponentenpaar heißen. Für diese wird sich nachher noch eine Beschränkung ergeben.

Zur eindeutigen Bestimmung der $Q^\alpha \ldots$ können wir etwa noch festsetzen, daß die Entwickelungen der Funktionen (4) und (5) mit 1 beginnen.

Die Zerlegung von Q in die beiden Bestandteile Q^α, $Q^{\alpha'}$ wäre nur dann nicht eindeutig, wenn Q^α und $Q^{\alpha'}$ in konstantem Verhältnis ständen, und dies ist nur möglich, wenn $\alpha = \alpha'$ ist.

Da wir die Existenz zweier linear unabhängiger Zweige der Q-Funktion:

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
Q' &= c'_\alpha Q^\alpha + c'_{\alpha'} Q^{\alpha'},\\
Q'' &= c''_\alpha Q^\alpha + c''_{\alpha'} Q^{\alpha'}
\end{aligned}
$$

vorausgesetzt haben, so lassen sich auch Q^α, $Q^{\alpha'}$ linear durch Q', Q'' ausdrücken, und daraus folgt, daß die Q^α, $Q^{\alpha'}$, wenn man sie über die ganze Ebene stetig fortsetzt, selbst Q-Funktionen sind. Das Gleiche gilt von den $Q^\beta, \ldots, Q^{\gamma'}$.

Aus der Annahme (6) ergibt sich noch, daß Q^{α} und $Q^{\alpha'}$ nicht in konstantem Verhältnis stehen und dasselbe gilt von den zwei Paaren Q^{β}, $Q^{\beta'}$; Q^{γ}, $Q^{\gamma'}$.

§ 17.

Folgerungen aus der Definition.

Wir haben bei der Definition der Q-Funktion keinen Unterschied zwischen den drei Punkten a, b, c gemacht.

Wir haben hiernach den Satz:

1. Die Q-Funktion bleibt ungeändert, wenn die drei Vertikalreihen
$$\begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix}$$
beliebig untereinander vertauscht werden.

2. Wir können die Variable x in einer Q-Funktion einer linearen Transformation unterwerfen, wenn wir gleichzeitig die Punkte a, b, c derselben linearen Transformation unterwerfen.

Wenn also A, B, C, D Konstanten bedeuten, deren Determinante $AD - BC$ von Null verschieden ist, und

$$x = \frac{Ax' + B}{Cx' + D} \tag{1}$$

gesetzt wird und a', b', c' die Werte bedeuten, die x' für

$$x = a, \quad x = b, \quad x = c$$

annimmt, so ist

$$Q\begin{pmatrix} a, & b, & c & \\ \alpha, & \beta, & \gamma & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} a', & b', & c' & \\ \alpha, & \beta, & \gamma & x' \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Es ist dies eine unmittelbare Folgerung aus der Definition, wenn man berücksichtigt, daß, wenn $Ca' + D$ von Null verschieden ist,

$$x - a = \frac{(AD - BC)\,(x' - a')}{(Cx' + D)\,(Ca' + D)}$$

ist, und daß jede Potenz von $Cx' + D$ in der Umgebung des Punktes $x' = a'$ nach steigenden Potenzen von $x' - a'$ entwickelbar ist.

Ist dagegen $a = \infty$, so ist $Ca' + D = 0$, und jede Potenz von $1/x$ ist nach steigenden Potenzen von $x' - a'$ entwickelbar.

Durch Anwendung des Satzes 2. können wir nun durch lineare Transformation jede Q-Funktion aus einer speziellen ableiten, in der a, b, c die Werte 0, ∞, 1 haben, und es genügt also, wenn wir uns von jetzt ab mit diesen speziellen Q-Funktionen beschäftigen.

Zur Vereinfachung der Bezeichnung setzen wir

$$(3)\qquad Q\begin{pmatrix} 0, & \infty, & 1 & \\ \alpha, & \beta, & \gamma & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma & \\ & & & x \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & \end{pmatrix}.$$

Wenn wir an Stelle von x eine der sechs Variablen

$$x,\quad 1-x,\quad \frac{1}{x},\quad \frac{x-1}{x},\quad \frac{1}{1-x},\quad \frac{x}{x-1}$$

einführen, so werden die drei Werte 0, ∞, 1 auf alle mögliche Arten miteinander permutiert, und aus 2. ergibt sich der Satz:

3. **Eine Q-Funktion mit den Verzweigungspunkten 0, ∞, 1 kann auf folgende sechs Arten dargestellt werden:**

$$(4)\qquad \begin{gathered} Q\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma & \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & x \end{pmatrix},\quad Q\begin{pmatrix} \gamma, & \beta, & \alpha & \\ \gamma', & \beta', & \alpha' & 1-x \end{pmatrix},\quad Q\begin{pmatrix} \beta, & \alpha, & \gamma & \\ \beta', & \alpha', & \gamma' & \frac{1}{x} \end{pmatrix}, \\ Q\begin{pmatrix} \gamma, & \alpha, & \beta & \\ \gamma', & \alpha', & \beta' & \frac{x-1}{x} \end{pmatrix},\quad Q\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \alpha & \\ \beta', & \gamma', & \alpha' & \frac{1}{1-x} \end{pmatrix},\quad Q\begin{pmatrix} \alpha, & \gamma, & \beta & \\ \alpha', & \gamma', & \beta' & \frac{x}{x-1} \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

Endlich lassen sich, wie gleichfalls aus der Definition unmittelbar zu ersehen ist, die Exponenten der Q-Funktion verändern, und man erhält, wenn ε, δ beliebige Größen sind:

$$(5)\qquad x^{\delta}(1-x)^{\varepsilon}\, Q\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma & \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & x \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} \alpha+\delta, & \beta-\delta-\varepsilon, & \gamma+\varepsilon & \\ \alpha'+\delta, & \beta'-\delta-\varepsilon, & \gamma'+\varepsilon & x \end{pmatrix}.$$

Man bemerke, daß bei der Umformung (5) die Summe der Exponenten

$$(6)\qquad \alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = s$$

in beiden Q-Funktionen dieselbe geblieben ist.

Alle diese Umformungen haben den Sinn, daß, wenn unter zwei einander gleich gesetzten Q-Funktionen die eine den Definitionen entspricht, dasselbe von der anderen gilt. Auf eine wirkliche Identität würde erst dann zu schließen sein, wenn die Definitionen dahin erweitert werden, daß sie die Q-Funktion eindeutig bestimmen, und wenn beide Q-Funktionen diesen erweiterten Bedingungen genügen.

§ 18.
Bestimmung der Q-Funktion durch eine Differentialgleichung.

Es mögen Q, Q' zwei nicht in konstantem Verhältnis stehende Zweige einer Q-Funktion

$$Q\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & x\\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \end{pmatrix} \tag{1}$$

sein. Setzen wir:

$$\varDelta(y) = \begin{vmatrix} \frac{d^2 y}{dx^2}, & \frac{d^2 Q}{dx^2}, & \frac{d^2 Q'}{dx^2} \\ \frac{dy}{dx}, & \frac{dQ}{dx}, & \frac{dQ'}{dx} \\ y, & Q, & Q' \end{vmatrix}, \tag{2}$$

so ist $\varDelta(y) = 0$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die die beiden partikularen Integrale Q, Q' hat, und folglich das allgemeine Integral

$$y = CQ + C'Q', \tag{3}$$

wenn C, C' die Integrationskonstanten sind.

Wir setzen

$$\varDelta(y) = \varDelta_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + \varDelta_1 \frac{dy}{dx} + \varDelta_2 y, \tag{4}$$

also

$$\begin{aligned} \varDelta_0 &= Q' \frac{dQ}{dx} - Q \frac{dQ'}{dx}, \\ \varDelta_1 &= Q \frac{d^2 Q'}{dx^2} - Q' \frac{d^2 Q}{dx^2}, \\ \varDelta_2 &= \frac{dQ'}{dx}\frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{dQ}{dx}\frac{d^2 Q'}{dx^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Funktionen $\varDelta_0$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ sind überall endlich und stetig, mit Ausnahme der Verzweigungspunkte. Wir haben ihr Verhalten in diesen Punkten, also in den Punkten 0, 1, ∞, näher zu untersuchen.

Diese Untersuchung wird sehr vereinfacht durch die folgende Bemerkung:

Nach § 16 (6) ist

$$Q = c_\alpha Q^\alpha + c_{\alpha'} Q^{\alpha'},$$
$$Q' = c'_\alpha Q^\alpha + c'_{\alpha'} Q^{\alpha'},$$

wenn die c_α, c'_α, $c_{\alpha'}$, $c'_{\alpha'}$ Konstanten sind, deren Determinante

$$A = c_\alpha c'_{\alpha'} - c_{\alpha'} c'_\alpha$$

von Null verschieden ist.

Bezeichnen wir also mit $\varDelta_0^\alpha$, $\varDelta_1^\alpha$, $\varDelta_2^\alpha$ die Funktionen, die aus $\varDelta_0$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ entstehen, wenn wir Q, Q' durch Q^α, $Q^{\alpha'}$ ersetzen, so ergibt sich aus dem Multiplikationssatze der Determinanten

$$(6) \qquad \varDelta_0 = A\varDelta_0^\alpha, \quad \varDelta_1 = A\varDelta_1^\alpha, \quad \varDelta_2 = A\varDelta_2^\alpha,$$

und ebenso ergibt sich

$$(7) \qquad \varDelta_0 = B\varDelta_0^\beta, \quad \varDelta_1 = B\varDelta_1^\beta, \quad \varDelta_2 = B\varDelta_2^\beta,$$
$$(8) \qquad \varDelta_0 = C\varDelta_0^\gamma, \quad \varDelta_1 = C\varDelta_1^\gamma, \quad \varDelta_2 = C\varDelta_2^\gamma,$$

worin A, B, C von Null verschiedene Konstanten sind.

Wir nehmen nun folgende Anfänge der Entwickelung:

$$Q^\alpha = x^\alpha + \cdots, \ \frac{dQ^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} + \cdots, \ \frac{d^2 Q^\alpha}{dx^2} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + \cdots,$$

$$Q^{\alpha'} = x^{\alpha'} + \cdots, \ \frac{dQ^{\alpha'}}{dx} = \alpha' x^{\alpha'-1} + \cdots, \ \frac{d^2 Q^{\alpha'}}{dx^2} = \alpha'(\alpha'-1)x^{\alpha'-2} + \cdots,$$

woraus sich ergibt:

$$(9) \qquad \begin{aligned} \varDelta_0^\alpha &= (\alpha - \alpha')x^{\alpha+\alpha'-1} + \cdots, \\ \varDelta_1^\alpha &= (\alpha - \alpha')(1 - \alpha - \alpha')x^{\alpha+\alpha'-2} + \cdots, \\ \varDelta_2^\alpha &= \alpha\alpha'(\alpha - \alpha')x^{\alpha+\alpha'-3} + \cdots, \end{aligned}$$

und hierin wachsen die Exponenten immer um eine Einheit. Ebenso findet man:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \varDelta_0^\gamma &= -(\gamma - \gamma')(1-x)^{\gamma+\gamma'-1} + \cdots, \\ \varDelta_1^\gamma &= (\gamma - \gamma')(1 - \gamma - \gamma')(1-x)^{\gamma+\gamma'-2} + \cdots, \\ \varDelta_2^\gamma &= -\gamma\gamma'(\gamma - \gamma')(1-x)^{\gamma+\gamma'-3} + \cdots \end{aligned}$$

in der Umgebung des Punktes $x = 1$ und

$$(11) \qquad \begin{aligned} \varDelta_0^\beta &= -(\beta - \beta')x^{-\beta-\beta'-1} + \cdots, \\ \varDelta_1^\beta &= -(\beta - \beta')(\beta + \beta' + 1)x^{-\beta-\beta'-2} + \cdots, \\ \varDelta_2^\beta &= -\beta\beta'(\beta - \beta')x^{-\beta-\beta'-3} + \cdots \end{aligned}$$

in der Umgebung des Punktes $x = \infty$.

Aus (6), (7), (9), (10) ergibt sich also, daß die drei Funktionen

$$
(12) \qquad \begin{aligned}
x^{1-\alpha-\alpha'}(1-x)^{1-\gamma-\gamma'} \varDelta_0 &= f_0,\\
x^{2-\alpha-\alpha'}(1-x)^{2-\gamma-\gamma'} \varDelta_1 &= f_1,\\
x^{3-\alpha-\alpha'}(1-x)^{3-\gamma-\gamma'} \varDelta_2 &= f_2
\end{aligned}
$$

für alle endlichen Werte von x endlich und stetig sind, und aus (7) und (11) folgt, daß

$$
(13) \qquad x^{s-1} f_0, \quad x^{s-2} f_1, \quad x^{s-3} f_2
$$

für $x = \infty$ endlich und stetig bleibt, wenn s wie früher die Bedeutung hat

$$
(14) \qquad s = \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma'.
$$

Man sieht hieraus, daß die Differentialquotienten von f_0, f_1, f_2, deren Grade höher sind als $1-s$, $2-s$, $3-s$, für alle endlichen Werte von x endlich und stetig sind, und im Unendlichen verschwinden und diese Differentialquotienten sind also (Bd. I, § 51, II.) identisch gleich Null.

Hiernach sind die f_0, f_1, f_2 ganze rationale Funktionen von x, und ihre Grade sind nach (13) gleich $1-s$, $2-s$, $3-s$ oder um eine ganze Zahl niedriger.

Hieraus ergibt sich eine Beschränkung für die Exponenten, die erfüllt sein muß, wenn unsere Q-Funktion existieren soll:

IV. Die Exponentensumme

$$
s = \alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma'
$$

muß eine ganze Zahl sein und kann nicht größer als 1 sein.

Wenn wir einen allen Gliedern gemeinsamen Faktor abwerfen, so ergibt sich hiernach für die Differentialgleichung, der die Q-Funktion genügen muß, die Form:

$$
(15) \qquad x^2(1-x)^2 f_0 \frac{d^2 y}{dx^2} + x(1-x) f_1 \frac{dy}{dx} + f_2 y = 0,
$$

und wir haben also eine Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten.

Über den Zusammenhang der Funktionen f_0, f_1, f_2 mit den Exponenten können wir aus (9), (10), (11) noch einen Schluß ziehen, wenn wir nach (12) die Quotienten bilden. Es folgt daraus:

$$
(16) \qquad \begin{aligned}
\frac{f_1}{f_0} = x(1-x)\frac{\varDelta_1}{\varDelta_0} &= 1 - \alpha - \alpha' && \text{für } x = 0,\\
&= -1 + \gamma + \gamma' && \quad " \quad x = 1,\\
&= -x(\beta + \beta' + 1) && \quad " \quad x = \infty;
\end{aligned}
$$

$$\text{(17)}\qquad \frac{f_2}{f_0} = x^2(1-x)^2\frac{\Delta_2}{\Delta_0} = \alpha\alpha' \quad \text{für } x = 0,$$
$$= \gamma\gamma' \quad \text{„} \quad x = 1,$$
$$= \beta\beta' x^2 \quad \text{„} \quad x = \infty.$$

§ 19.

Die P-Funktion und die hypergeometrische Differentialgleichung.

Der ausgezeichnetste Fall der Q-Funktion ist der, in dem die Summe s ihren größten Wert 1 hat. Diese besondere Art der Q-Funktion wollen wir die P-**Funktion** nennen und mit

$$\text{(1)}\qquad P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma & \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & x\end{pmatrix}$$

bezeichnen.

In diesem Falle ist die Funktion f_0 konstant und kann $= 1$ gesetzt werden. f_1 ist vom ersten, f_2 vom zweiten Grad, und durch die Relationen § 18, (16), (17) sind diese beiden Funktionen völlig bestimmt. Es ergibt sich:

$$\text{(2)}\qquad f_1 = (1-\alpha-\alpha')(1-x) - (1-\gamma-\gamma')x,$$
$$= 1-\alpha-\alpha' - (1+\beta+\beta')x,$$

$$\text{(3)}\qquad f_2 = -\beta\beta' x(1-x) + \alpha\alpha'(1-x) + \gamma\gamma' x.$$

Die Differentialgleichung für die P-Funktion läßt sich aber noch vereinfachen. Es ist nämlich nach § 17, (5)

$$\text{(4)}\qquad P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma & \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & x\end{pmatrix} =$$

$$x^{\alpha'}(1-x)^{\gamma'} P\begin{pmatrix}\alpha-\alpha', & \beta+\alpha'+\gamma', & \gamma-\gamma' & \\ 0, & \beta'+\alpha'+\gamma', & 0 & x\end{pmatrix},$$

und es ist daher ausreichend, wenn wir weiterhin die Funktion

$$\text{(5)}\qquad y = P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma & \\ 0, & \beta', & 0 & x\end{pmatrix}$$

allein betrachten, also $\alpha' = \gamma' = 0$ setzen.

Es ist dann

$$\text{(6)}\qquad \alpha+\beta+\gamma+\beta' = 1,$$

und die Funktion (5) ist ein Integral der Differentialgleichung:

$$\text{(7)}\qquad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [(1-\alpha)-(\beta+\beta'+1)x]\frac{dy}{dx} - \beta\beta' y = 0,$$

die, wie man sieht, mit der hypergeometrischen Differentialgleichung übereinstimmt [§ 5 (6)].

Eine partikulare Lösung dieser Gleichung ist

$$y = F(\beta, \beta', 1 - \alpha, x), \tag{8}$$

wenn F die hypergeometrische Reihe bedeutet.

§ 20.

Darstellung der P-Funktion durch hypergeometrische Reihen.

Wir wollen nun noch zeigen, wie man umgekehrt aus der hypergeometrischen Differentialgleichung zu der P-Funktion gelangt.

Eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung hat, wie wir wissen, nur zwei linear unabhängige partikulare Lösungen y_1, y_2. Gehen wir von irgend einer Lösung y aus und beschreiben in der x-Ebene irgend einen Weg, so kann, solange sich y und seine Differentialquotienten stetig ändern, die Differentialgleichung nicht aufhören zu bestehen. Geht man mit x zum Ausgangspunkt zurück, so wird sich y im allgemeinen geändert haben. Aber der so gewonnene Zweig y' ist immer noch eine Lösung der Differentialgleichung. Alle verschiedenen Zweige der Funktion y sind also Lösungen derselben Differentialgleichung, und für diese Funktion ist also immer die Bedingung § 16, II. befriedigt.

Wenden wir dies auf die hypergeometrische Differentialgleichung an, so haben wir nur die drei singulären Punkte $0, \infty, 1$ zu berücksichtigen.

Jede partikulare Lösung kann aber dann nach § 8 linear durch

F_1, F_2 in der Umgebung von $x = 0$,
F_3, F_4 „ „ „ „ $x = 1$,
F_5, F_6 „ „ „ „ $x = \infty$

dargestellt werden, und wenn wir also nach § 19 (8)

$$F_1 = F(\beta, \beta', 1 - \alpha, x)$$

setzen, so ist die Lösung der Differentialgleichung § 19 (7) eine P-Funktion:

$$P\begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & 1 - \alpha - \beta - \beta' & \\ 0, & \beta', & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Wollen wir zur allgemeinen P-Funktion übergehen, so haben wir die Formel § 19 (4) anzuwenden, und wir erhalten für die Funktion

$$P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma & \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & x\end{pmatrix}$$

die sechs Bestandteile $P^{\alpha}, \ldots, P^{\gamma'}$, wenn wir in den Formeln für die $F_1, \ldots, F_6$ (§ 8)

$$\begin{array}{llll} & \alpha, & \beta, & \gamma, \\ \text{durch} & \beta + \alpha' + \gamma', & \beta' + \alpha' + \gamma', & 1 - \alpha + \alpha' \end{array}$$

ersetzen:

$$(1)\quad \begin{aligned} P^{\alpha} &= x^{\alpha}(1-x)^{\gamma'} F(\alpha+\beta+\gamma', \alpha+\beta'+\gamma', 1+\alpha-\alpha', x), \\ P^{\alpha'} &= x^{\alpha'}(1-x)^{\gamma'} F(\alpha'+\beta+\gamma', \alpha'+\beta'+\gamma', 1-\alpha+\alpha', x), \\ P^{\beta} &= x^{-\beta}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\gamma'} F\left(\alpha'+\beta+\gamma', \alpha+\beta+\gamma', 1+\beta-\beta', \frac{1}{x}\right), \\ P^{\beta'} &= x^{-\beta'}\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\gamma'} F\left(\alpha'+\beta'+\gamma', \alpha+\beta'+\gamma', 1-\beta+\beta', \frac{1}{x}\right), \\ P^{\gamma} &= x^{\alpha'}(1-x)^{\gamma} F(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, 1+\gamma-\gamma', 1-x), \\ P^{\gamma'} &= x^{\alpha'}(1-x)^{\gamma'} F(\alpha'+\beta+\gamma', \alpha'+\beta'+\gamma', 1-\gamma+\gamma', 1-x). \end{aligned}$$

Hierbei ist aber vorausgesetzt, daß keine der drei Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl sei. In diesen Fällen treten, wie wir in § 11 gesehen haben, bei der vollständigen Integration der hypergeometrischen Differentialgleichung logarithmische Glieder auf, und die Bedingungen für die P-Funktion können nicht mehr vollständig befriedigt werden. Nur unter besonderen Voraussetzungen können die logarithmischen Glieder wegfallen, so daß dann wieder P-Funktionen existieren. Beispielsweise ist nach § 11 $F(\beta, 1, 2, x)$, also

$$P\begin{pmatrix}-1, & \beta, & 1-\beta & \\ 0, & 1, & 0 & x\end{pmatrix}$$

eine echte P-Funktion, obwohl $\alpha - \alpha'$ eine ganze Zahl ist.

§ 21.

Ableitung der Q-Funktionen aus den P-Funktionen.

Aus den P-Funktionen kann man Q-Funktionen auf folgende Weise herleiten. Es ist zunächst, wenn

$$P = P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma & \\ \alpha', & \beta', & \gamma' & x\end{pmatrix}$$

angenommen wird,

$$\frac{dP}{dx} = Q\begin{pmatrix} \alpha - 1, & \beta + 1, & \gamma - 1 & \\ \alpha' - 1, & \beta' + 1, & \gamma' - 1 & x \end{pmatrix}$$

und folglich

$$x(1-x)\frac{dP}{dx} = Q\begin{pmatrix} \alpha, & \beta - 1, & \gamma & \\ \alpha', & \beta' - 1, & \gamma' & x \end{pmatrix}.$$

Wenn wir also mit $A(x)$ und $B(x)$ zwei ganze rationale Funktionen von x bezeichnen, die kein besonderes Verhalten zu den Punkten 0, 1 haben, $A(x)$ vom Grade $n-1$, $B(x)$ vom Grade n, so ist

$$(1)\qquad A(x)x(1-x)\frac{dP}{dx} + B(x)P = Q\begin{pmatrix} \alpha, & \beta - n, & \gamma & \\ \alpha', & \beta' - n, & \gamma' & x \end{pmatrix},$$

und hierin ist die Summe der Exponenten

$$(2)\qquad s = \alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' - 2n = 1 - 2n,$$

also eine ungerade negative ganze Zahl. Die Funktionen $A(x)$ und $B(x)$ enthalten zusammen, wenn man von einem gemeinschaftlichen konstanten Faktor absieht, $2n$ willkürliche Konstanten, die in P nicht vorkommen, und es enthält also diese Q-Funktion (1) $2n = 1 - s$, willkürliche Konstanten mehr als die Funktion P.

Den Fall eines geraden s können wir hieraus durch Spezialisierung ableiten. Wenn wir nämlich die Koeffizienten von $A(x)$ und $B(x)$ der Bedingung unterwerfen, daß

$$(3)\qquad \alpha A(0) + B(0) = 0$$

sein soll, so fängt die Entwickelung von Q^α in (1) erst mit der Potenz $x^{\alpha+1}$ an, während die anderen Entwickelungen ungeändert bleiben. Wir erhalten also eine Funktion

$$(4)\qquad Q\begin{pmatrix} \alpha + 1, & \beta - n, & \gamma & \\ \alpha', & \beta' - n, & \gamma' & x \end{pmatrix},$$

für die die Summe s den Wert hat:

$$s = \alpha + \beta + \gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' + 1 - 2n = 2 - 2n.$$

Die Anzahl der Konstanten, die in (1) bleiben, ist hier wegen (3) nur $2n - 1$, also gleichfalls $1 - s$.

Die Frage, ob auf diese Weise **alle** Q-Funktionen aus den P-Funktionen abgeleitet werden können, wollen wir hier nicht weiter erörtern. Ihre Beantwortung hängt davon ab, wie viele willkürliche Konstanten in der Differentialgleichung für die Q-Funktion § 18 (15) übrig bleiben. Man hat dabei zu beachten, daß f_0 eine Funktion vom Grade $1 - s$ ist, und daß die Nullpunkte dieser Funktion, wenn f_1, f_2 unbestimmt bleiben, zu den singulären Punkten der Differentialgleichung gehören. Es sind also noch Bedingungen für die Koeffizienten von f_1, f_2 aufzustellen, durch die der singuläre Charakter dieser Punkte aufgehoben wird [1]).

§ 22.

Spezielle Umformungen der P-Funktion.

Die Fruchtbarkeit der Riemannschen Betrachtungsweise zeigt sich deutlich in der großen Einfachheit, mit der sich die speziellen Umformungen ergeben, die Kummer zuerst mit einem großen Rechnungsaufwande abgeleitet hat [2]). Nehmen wir an, es habe in einer P-Funktion eine der Exponentendifferenzen, etwa $\alpha' - \alpha$, den Wert $1/2$, dann können wir diese Funktion nach § 17 (5) durch

$$P\begin{pmatrix} 0, & \beta, & \gamma & \\ 1/2, & \beta', & \gamma' & x \end{pmatrix} \tag{1}$$

ersetzen. Von den beiden Funktionen P^{α}, $P^{\alpha'}$ schreitet die erste nach ganzen Potenzen von x, die zweite nach ganzen Potenzen von $\sqrt{x}$ fort, und wenn wir also $\sqrt{x} = \xi$ setzen, so ist der Punkt $\xi = 0$ in der ξ-Ebene kein Verzweigungspunkt mehr, sondern ein Punkt, in dem die Funktion eindeutig und stetig ist. Dagegen sind jetzt die beiden Punkte $\xi = \pm 1$, in denen $1 - x$ verschwindet, Verzweigungspunkte, und die Entwickelungen nach Potenzen von $1 - \xi$ und $1 + \xi$ beginnen mit $(1 \pm \xi)^{\gamma}$, $(1 \pm \xi)^{\gamma'}$.

---

[1]) Vgl. Riemanns mathematische Werke, 2. Aufl., S. 387 f. Danach müssen für jede Wurzel λ von $f_0(x) = 0$ zwei Bedingungen bestehen, von denen die eine so lautet:

$$\frac{f_1(\lambda)}{\lambda(1 - \lambda) f_0'(\lambda)} = 1. \tag{5}$$

Hierzu kommen die sechs Bedingungen § 18 (16), (17). Man findet leicht durch Partialbruchzerlegung von $f_1(x)/x(1-x) f_0(x)$, daß von den $1 - s$ Bedingungen (5) eine mittels § 18 (16) aus den übrigen folgt, und danach enthält die Differentialgleichung für die Q-Funktion, abgesehen von einem konstanten Faktor, noch

$$1 - s + 3 - s + 4 - s - 2(1 - s) - 6 + 1 = 1 - s$$

unbestimmte Konstanten, übereinstimmend mit der oben gefundenen Zahl der Konstanten in der Q-Funktion (1) und (4).

[2]) Crelles Journal 15 (1895).

Die Entwickelung in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes beginnt mit $x^{-\beta}$, $x^{-\beta'}$, also mit $\xi^{-2\beta}$, $\xi^{-2\beta'}$. Demnach ergibt sich folgende Umformung:

$$(2)\qquad P\begin{pmatrix} 0, & \beta, & \gamma & \\ {}^1/_2, & \beta', & \gamma' & x \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -1, & \infty, & +1 & \\ \gamma, & 2\beta, & \gamma & \sqrt{x} \\ \gamma', & 2\beta', & \gamma' & \end{pmatrix};$$

um in der zweiten Funktion die Verzweigungspunkte 0, ∞, 1 zu erhalten, muß man eine neue Variable ${}^1/_2\left(1+\sqrt{x}\right)$ einführen, und erhält so

$$(3)\qquad P\begin{pmatrix} 0, & \beta, & \gamma & \\ {}^1/_2, & \beta', & \gamma' & x \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \gamma, & 2\beta, & \gamma & \frac{1+\sqrt{x}}{2} \\ \gamma', & 2\beta', & \gamma' & \end{pmatrix}.$$

Da man auf diese beiden Funktionen noch die linearen Transformationen § 17 (4) anwenden kann, so ergibt sich hieraus eine sehr große Anzahl von Umformungen dieser speziellen P-Funktion und entsprechende Umformungen der hypergeometrischen Differentialgleichung.

Ebenso erhält man noch weitere Umformungen bei einer noch spezielleren P-Funktion, bei der zwei Exponentendifferenzen den Wert ${}^1/_3$ haben. Für die Funktion

$$(4)\qquad P\begin{pmatrix} 0, & 0, & \gamma & \\ {}^1/_3, & {}^1/_3, & \gamma' & x \end{pmatrix}$$

sind, wenn man $\xi = \sqrt[3]{x}$ setzt, die Punkte $\xi = 0$, $\xi = \infty$ nicht mehr Verzweigungspunkte. Dagegen werden die drei Punkte Verzweigungspunkte, in denen $1 - \xi^3 = 0$ ist, d. h. $\xi = 1, \varrho, \varrho^2$, wenn ϱ eine imaginäre dritte Einheitswurzel ist. Man hat also:

$$(5)\qquad P\begin{pmatrix} 0, & 0, & \gamma & \\ {}^1/_3, & {}^1/_3, & \gamma' & x \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1, & \varrho, & \varrho^2 & \\ \gamma, & \gamma, & \gamma & \sqrt[3]{x} \\ \gamma', & \gamma', & \gamma' & \end{pmatrix},$$

oder

$$(6)\qquad P\begin{pmatrix} 0, & 0, & \gamma & \\ {}^1/_3, & {}^1/_3, & \gamma' & x \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \gamma, & \gamma, & \gamma & -\varrho\,\frac{\varrho^2-\sqrt[3]{x}}{\varrho-\sqrt[3]{x}} \\ \gamma', & \gamma', & \gamma' & \end{pmatrix},$$

Formeln, die wieder den Ausgangspunkt für lineare Umformungen bilden.

Wir können zum Schluß noch die Bemerkung beifügen, daß wir, wenn wir eine Funktion R mit n u r z w e i Verzweigungspunkten, sonst aber denselben Eigenschaften wie die Q-Funktion definieren, wir nur ganz elementare Funktionen erhalten, nämlich wenn wir die Verzweigungspunkte nach 0 und ∞ verlegen, und unter A, A' ganze rationale Funktionen von x verstehen, nur Funktionen von der Form

$$R = x^{\alpha} A + x^{\alpha'} A'.$$

Denn wenn R^{α}, $R^{\alpha'}$ zwei Zweige von R sind, wie in § 16 (3), so sind $x^{-\alpha} R^{\alpha}$, $x^{-\alpha'} R^{\alpha'}$ in der ganzen Ebene endlich und stetig, und da sie im Unendlichen nur von endlicher Ordnung unendlich werden können, so sind es ganze rationale Funktionen von x.

Vierter Abschnitt.

Oszillationstheoreme.

§ 23.

Normalform linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir kommen nun zur Ableitung eines Zyklus von Sätzen, die sich auf lineare Differentialgleichungen allgemeiner Art beziehen, und die uns auch in solchen Fällen, in denen die Integration nicht durchgeführt werden kann, über das Verhalten der Integrale wichtige Aufschlüsse geben, die, besonders bei Schwingungsproblemen, auch ihre physikalische Bedeutung haben. Es dürfte um so mehr am Platze sein, auf diese Sätze hier einzugehen, als sie eine Übertragung auf gewisse partielle Differentialgleichungen, z. B. die für die schwingende Membran, gestatten, wo aber die Frage bei weitem nicht so einfach liegt[1].

Wir beschränken uns hier wieder auf lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wiewohl die Sätze, namentlich in der Abhandlung von Kneser, eine viel weitere Ausdehnung erhalten haben.

Wir bringen zunächst eine vorgelegte lineare Differentialgleichung:

---

[1]) Die ersten dieser Sätze rühren von Sturm und Liouville her, und stehen in einem gewissen Zusammenhange mit dem nach Sturm benannten berühmten Lehrsatze der Algebra (Liouvilles Journal I, 1836). Sie sind später von mehreren Anderen teils neu bewiesen, teils erweitert. Wir wollen nur die folgenden Arbeiten über den Gegenstand erwähnen:

Rayleigh, Theory of Sound, second edition, Vol. I, p. 217.

Pockels, Über die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, S. 67. Leipzig 1891.

Kneser, Mathematische Annalen, 42, 409, 1892.

Bôcher, Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, Heft 4.

$$(1) \qquad p_0 \frac{d^2 u}{d x^2} + p_1 \frac{d u}{d x} + p_2 u = 0,$$

von der wir annehmen, daß p_0, p_1, p_2 für endliche Werte von x nicht unendlich werden, auf eine einfachere Form:

$$(2) \qquad \frac{d^2 y}{d x^2} + \varrho y = 0,$$

in der der erste Differentialquotient fehlt, und ϱ eine Funktion von x ist.

Man erreicht dies durch eine Substitution

$$(3) \qquad u = \lambda y,$$

wenn man

$$(4) \qquad 2 p_0 \lambda' + p_1 \lambda = 0, \quad p_0 \varrho \lambda = p_0 \lambda'' + p_1 \lambda' + p_2 \lambda$$

setzt. Hieraus leitet man ab:

$$(5) \qquad \lambda = e^{-\int \frac{p_1}{2 p_0} dx},$$

$$(6) \qquad \varrho = \frac{4 p_0 p_2 - 2 p_0 p_1' - p_1^2 + 2 p_1 p_0'}{4 p_0^2}.$$

Hierzu wollen wir noch bemerken, daß λ nur in solchen Punkten Null oder unendlich werden kann, in denen p_0 verschwindet. Also, wenn p_0 eine ganze rationale Funktion von x ist, nur in einer endlichen Anzahl von Punkten. Ebenso kann auch ϱ nur in den Nullpunkten von p_0 unendlich werden, und wenn p_1 und p_2 gleichfalls ganze rationale Funktionen sind, so kann ϱ auch nur in einer endlichen Anzahl von Punkten verschwinden. Für die Betrachtungen des gegenwärtigen Abschnittes kommen nur reelle Werte der Variablen x in Betracht.

> Wir setzen also über die Funktion ϱ in der Differentialgleichung (2) voraus, daß sie von einem bestimmten Werte von x an keinen Zeichenwechsel mehr habe und nicht mehr unendlich werde.

Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, können wir diesen Wert von x zum Nullpunkt machen, und wir haben dann die folgenden beiden Fälle zu unterscheiden:

ϱ ist für positive Werte von x endlich und stetig und

I. nur negativ,
II. nur positiv.

Es soll aber nicht ausgeschlossen sein, daß ϱ für ein unendlich wachsendes x dem absoluten Werte nach über alle Grenzen wächst oder unter jede Grenze heruntersinkt.

Von besonderem Interesse ist die Frage nach den Nullpunkten, die eine stetige Lösung y der Differentialgleichung (2) und folglich auch eine stetige Lösung u der Differentialgleichung (1) hat.

Wir betrachten hier immer nur solche Integrale y, die mit ihrem ersten Differentialquotienten y' endlich und stetig sind. Die Differentialgleichung zeigt, daß dann auch y'' endlich und stetig ist.

Eine Folge dieser Annahme ist, daß für keinen Wert von x die Funktion y und ihr erster Differentialquotient y' zugleich verschwinden können. Denn wenn y_1, y_2 zwei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (2) sind, so folgt nach einer schon wiederholt angewandten Formel [Bd. I, § 65 (13)]:

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = C,$$

worin C eine von Null verschiedene Konstante ist. Man sieht hieraus, daß, wenn y_2, y_2' endlich sind, y_1 und y_1' niemals zugleich Null sein können.

§ 24.

I. Die Funktion ϱ ist beständig negativ.

Wenn die Funktion ϱ in der Differentialgleichung

$$(1) \qquad y'' + \varrho y = 0$$

für positive Werte von x nur negativ ist, so haben y und y'' immer dasselbe Vorzeichen, während y' das gleiche oder auch das entgegengesetzte Vorzeichen haben kann. Wir haben dann mehrere Fälle zu unterscheiden.

Es bezeichnen dabei x_0, x_1 irgend positive Werte von x und y_0, y_0', y_0'', y_1, y_1', y_1'' die zugehörigen Werte von y, y', y''.

Erster Fall $\qquad y_0, y_0'' > 0, \quad y_0' \gtreqless 0.$

Hier wird y' von x_0 an mit wachsendem x zunächst wachsen, und also, auch wenn $y_0' = 0$ ist, zunächst positiv bleiben.

Wenn nun x_1 der dem x_0 zunächst gelegene größere Wert von x ist, für den y' verschwindet, so muß y' zwischen x_0 und x_1 aus dem Wachsen ins Abnehmen übergegangen sein. Es muß also y'' und folglich nach (1) auch y zwischen x_0 und x_1 verschwinden. Folglich muß auch y, das bei x_0 positiv ist und anfangs wächst, aus dem Wachsen ins Abnehmen übergehen, und folglich muß y' zwischen x_0 und x_1 verschwinden, was gegen die Annahme ist, daß x_1 der dem x_0 nächste Wert sei, in dem y' verschwindet. Unter der Voraussetzung des ersten Falles ist also y' für alle Werte von $x > x_0$ positiv, y wächst und bleibt also auch positiv, ebenso y'', und folglich wächst y' beständig.

Wenn also $x > x_0$ ist, so ist $y > y_0$, $y' > y'_0$ und

$$(2) \qquad y - y_0 = \int_{x_0}^{x} y'\, dx > y'_0 (x - x_0),$$

woraus man schließt, daß y (von y_0 an) ohne Zeichenwechsel mit x ins Unendliche wächst (Fig. 3).

Fig. 3.

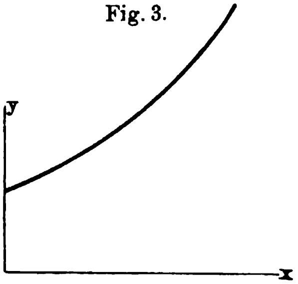
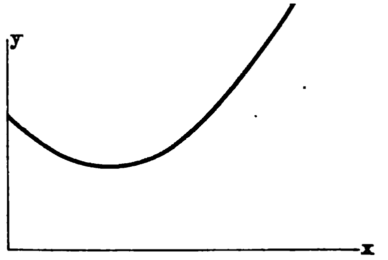


Fig. 4.



Zweiter Fall $\qquad y_0, y''_0 < 0, \quad y'_0 \gtreqless 0.$

Dieser zweite Fall geht aus dem ersten durch Vertauschung von y mit $-y$ hervor. Es wird also in diesem Falle y von y_0 an ohne Zeichenwechsel negativ unendlich groß werden.

Dritter Fall $\qquad y_0, y''_0 > 0, \quad y'_0 < 0.$

Hier wird y' so lange wachsen, als y'' und folglich y positiv ist, und es sind hier wieder verschiedene Möglichkeiten zu unterscheiden:

a) y' wird $= 0$, ehe noch y und y'' Null geworden sind. Dann wächst y' von da an weiter und wird also positiv. Es tritt dann von hier aus der erste Fall ein, und y wird ebenso wie dort mit x zugleich unendlich, nur mit dem Unterschiede, daß y einen positiven Minimumwert hat (Fig. 4).

b) y wird $= 0$, ehe $y' = 0$ geworden ist. Dann bleibt beim Durchgang durch diese Stelle y' negativ, und wenn wir x_1 hinlänglich nahe jenseits dieser Stelle annehmen, so kommen wir auf den zweiten Fall zurück. Es geht also dann y stetig abnehmend einmal durch Null und wird negativ unendlich (Fig. 5).

Fig. 5.

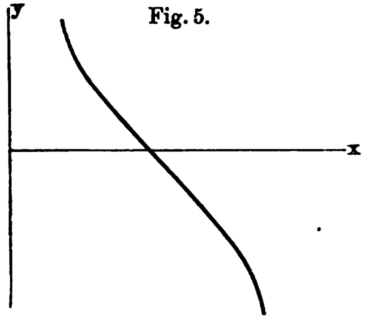
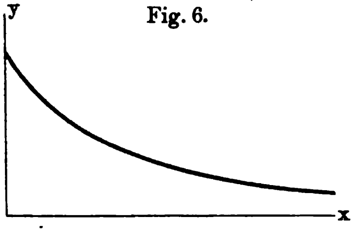


Fig. 6.



c) Weder y noch y' werden Null, wenn $x > x_0$ ist. Dann müssen sich y und y' endlichen Grenzen nähern, y abnehmend, y' zunehmend. Die Grenze für y' muß notwendig $= 0$ sein, da sonst

$$y = \int^{x} y' \, dx$$

für ein unendlich wachsendes x keine endliche Grenze haben könnte (Fig. 6). Der Grenzwert von y kann auch von Null verschieden (positiv) sein, aber, wie man aus der Gleichung

$$y' = \int y'' \, dx = -\int^{x} \varrho \, y \, dx$$

ersieht, nur dann, wenn ϱ mit unendlich wachsendem x verschwindet, und zwar in höherer als der ersten Ordnung.

In dem Falle $y_0, y_0'' < 0$, $y_0' > 0$ verhält sich alles ebenso, nur mit verändertem Vorzeichen.

Um diese Resultate zusammenzufassen, können wir also sagen:

1. Wenn in der Differentialgleichung (1) ϱ für positive x beständig negativ ist, so kann y in diesem Intervall höchstens einmal verschwinden, und wenn dies eintritt, so geht von da an y stetig wachsend oder stetig abnehmend ins Unendliche.

Es kann auch y ein positives Minimum oder ein negatives Maximum haben und geht von da an stetig wachsend oder stetig abnehmend mit unendlich wachsendem x ins Unendliche.

Es kann auch y ohne Minimum oder Maximum mit x ins Unendliche gehen, oder es kann y stetig abnehmend oder stetig wachsend, ohne zu verschwinden, einer endlichen Grenze zustreben.

Daß alle diese Fälle möglich sind, zeigen einfache Beispiele, z. B. wenn man ϱ gleich einer negativen Konstanten annimmt. (Vgl. Bd. I, § 60, 61.)

§ 25.

II. Die Funktion ϱ ist beständig positiv.

Ganz anders verhält sich das Integral der Differentialgleichung

$$y'' + \varrho y = 0, \tag{1}$$

wenn ϱ beständig positiv bleibt.

In diesem Falle können, wie schon das Beispiel eines konstanten ϱ zeigt, Integrale vorkommen, die unendlich viele Nullstellen haben. Solche Integrale nennen wir **oszillierende Integrale** und es ist unsere Aufgabe, zu entscheiden, unter welchen Umständen die Gleichung (1) ein oszillierendes Integral hat. Das wichtigste Hilfsmittel für diese Untersuchung ist eine Formel, die wir schon im ersten Bande (§ 73) bei der Untersuchung der Besselschen Funktionen angewandt haben.

Es sei z eine Funktion, die einer Differentialgleichung

$$z'' + \sigma z = 0 \tag{2}$$

genügt, worin σ eine gegebene Funktion von x ist.

Wir erhalten aus (1) und (2):

$$\frac{d}{dx}(zy' - yz') + (\varrho - \sigma) yz = 0,$$

und daraus durch Integration:

$$zy' - yz' = -\int (\varrho - \sigma) yz\, dx + \text{const}, \tag{3}$$

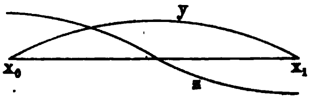
und hieraus können wir nun durch Spezialisierung der Funktion σ mannigfaltige Schlüsse ziehen:

Nehmen wir zunächst $\sigma = \varrho$, so sind y und z partikulare Integrale derselben Differentialgleichung (1), und wenn sie sich nicht bloß durch einen konstanten Faktor voneinander unterscheiden, so ist

$$zy' - yz' = c \tag{4}$$

eine von Null verschiedene Konstante. Sind nun $x = x_0$ und $x = x_1$ zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von y, so haben y_0' und y_1' verschiedene Vorzeichen. Andererseits haben nach (4) $z_0 y_0'$ und $z_1 y_1'$ dasselbe Vorzeichen, folglich z_0 und z_1 entgegengesetzte Vorzeichen. Es muß also z zwischen x_0 und x_1 mindestens einmal durch Null gehen. Es kann aber z auch nur einmal durch Null gehen, da man ebenso schließen kann, daß zwischen zwei Nullstellen von z eine Nullstelle von y liegen muß, während doch y zwischen x_0 und x_1 nicht verschwinden sollte (Fig. 7).

Fig. 7.



Wir haben also den Satz, wenn wir die Nullstellen einer Funktion ihre Wurzeln nennen:

2. Wenn von den beiden partikularen Integralen der Differentialgleichung (1) das eine oszillatorisch ist, so ist es auch das andere, und die Wurzeln der beiden separieren sich gegenseitig, d. h. zwischen je zwei Wurzeln der einen liegt eine und nur eine Wurzel der andern.
3. Die Gleichung (4) zeigt noch, daß y und y' in keinem Punkte zugleich verschwinden können und aus der Fig. 7 ersieht man, daß zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullpunkten von y immer wenigstens ein Nullpunkt von y' liegt.

Wir lassen jetzt die Annahme $\sigma = \varrho$ wieder fallen. Wenn dann x_0 und $x_1 > x_0$ zwei aufeinanderfolgende Wurzeln von z sind, so haben z_0' und $-z_1'$ das gleiche Vorzeichen, und zwar dasselbe wie die Funktion z in dem Intervall (x_0, x_1). Wenn wir das Integral (3) zwischen den Grenzen x_0 und x_1 nehmen, so folgt, da $z_0 = 0$, $z_1 = 0$ ist:

$$y_1 z_1' - y_0 z_0' = \int_{x_0}^{x_1} (\varrho - \sigma) y z \, dx; \tag{5}$$

nehmen wir nun weiter an, daß in dem Intervall (x_0, x_1) durchweg $\varrho \gtrless \sigma$ sei, so kann y nicht in dem ganzen Intervall das gleiche Vorzeichen haben, weil sonst beide Seiten von (5) entgegengesetzte Zeichen hätten.

Hieraus ergibt sich der Satz:

4. Hat die Differentialgleichung (2) oszillatorische Integrale, und ist (von einem gewissen x an) fortwährend $\varrho \geqq \sigma$, so hat auch die Differentialgleichung (1) oszillatorische Integrale.

Nennen wir die Nullstellen eines oszillatorischen Integrals seine Knotenpunkte, so können wir hieraus noch folgern:

5. Ist $\varrho > \sigma$, so liegt zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten von z mindestens ein Knotenpunkt von y. Sind a und b zwei Knotenpunkte von z, so hat y im Innern des Intervalls (ab) wenigstens einen Knotenpunkt mehr als z.

Hieraus ergibt sich ein wichtiges allgemeines Resultat. Ist ϱ in der Differentialgleichung (1) positiv, mit einer positiven unteren Grenze μ^2, so daß $\varrho > \mu^2$ ist, so können wir, um den Satz 5. anzuwenden, σ gleich der Konstanten μ^2 setzen, und erhalten als Integral von (2):

$$z = \sin \mu (x - \alpha), \tag{6}$$

worin α ein beliebiger Wert ist. Diese Funktion ist aber oszillatorisch, und ihre Nullpunkte sind $\alpha + m\pi/\mu$, wenn m eine ganze Zahl ist. Wir haben also:

6. Hat ϱ eine positive untere Grenze μ^2, so sind die Integrale von (1) oszillatorisch, und in jedem Intervall von der Größe π/μ liegt wenigstens eine Wurzel von y.

Wenn nun aber ϱ zwar positiv ist, aber die untere Grenze Null hat, so können wir so schließen:

Die Differentialgleichung mit konstantem μ:

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + \left(\mu^2 + \frac{1}{4}\right) \frac{z}{x^2} = 0 \tag{7}$$

hat die beiden partikularen Lösungen

$$x^{1/2 + i\mu}, \quad x^{1/2 - i\mu},$$

oder, wenn α eine willkürliche Konstante ist,

$$z = \sqrt{x} \sin\left(\mu \log \frac{x}{\alpha}\right), \tag{8}$$

und die Differentialgleichung (1) hat also dann oszillierende Integrale, wenn sich ein positives μ so angeben läßt, daß von einem gewissen x an immer

$$x^2 \varrho > \mu^2 + \frac{1}{4} \tag{9}$$

bleibt, und es liegt für ein beliebiges α eine Wurzel von y immer zwischen α und $\alpha e^{\pi/\mu}$.

Wir ergänzen also den Satz 6. so:

7. Die Differentialgleichung (1) hat oszillatorische Integrale, wenn die untere Grenze von $x^2\varrho - {}^1/_4$ positiv ist.

Ist die untere Grenze von $x^2\varrho - {}^1/_4$ negativ, so wird von einem gewissen x an

$$\varrho < \frac{1}{4x^2} \tag{10}$$

bleiben. Dann vergleichen wir die Differentialgleichung (1) mit

$$z'' + \frac{z}{4x^2} = 0, \tag{11}$$

deren beide partikulare Integrale

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt{x} \log x$$

nicht oszillatorisch sind; nach dem Satze 4. kann also auch (1) keine oszillatorischen Integrale haben, da sonst wegen (10) auch die Lösungen von (11) oszillatorisch sein müßten.

8. Die Differentialgleichung (1) hat keine oszillatorischen Integrale, wenn die untere Grenze von $x^2\varrho - {}^1/_4$ negativ ist.

Es bleibt also wiederum der Fall unentschieden, wo die Grenze von $x^2\varrho - {}^1/_4$ Null ist.

Wie in diesem Falle die Untersuchung weiter zu führen ist, ergibt die folgende Umformung:

Wir setzen in (1)

$$y = \sqrt{x}\,\eta, \quad \xi = \log x$$

und erhalten für η die folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} + \left(x^2\varrho - \frac{1}{4}\right)\eta = 0. \tag{12}$$

Diese Gleichung hat aber dieselbe Form wie die Differentialgleichung (1), nur daß ξ an Stelle von x und $x^2\varrho - {}^1/_4 = \varrho'$ an Stelle von ϱ getreten ist, und ξ wächst mit x gleichzeitig ins Unendliche. Wenn sich dann ϱ' von negativen Werten der Grenze Null nähert, so tritt der Satz 1. in Kraft. Wenn sich aber ϱ' von der positiven Seite der Grenze Null nähert, dann müssen wir die Umformung (12) wiederholen, und kommen zu einer unbegrenzten Kette von Unterscheidungen derselben Art. (Etwa wie bei den aus der Integralrechnung bekannten Kriterien für die Konvergenz eines bestimmten Integrals.)

§ 26.

Anwendung auf die hypergeometrische Reihe.

Als ein Beispiel für die in den vorangegangenen Paragraphen bewiesenen Sätze wollen wir die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe betrachten:

(1) $$x(1-x)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]u' - \alpha\beta u = 0,$$

und damit die Koeffizienten dieser Gleichung reell werden, nehmen wir γ reell, α und β entweder reell oder konjugiert imaginär an.

Um die Umformung des § 23 anzuwenden, setzen wir

(2) $$u = \lambda y$$

und bestimmen λ so, daß die Differentialgleichung für y die Form erhält:

(3) $$y'' + \varrho y = 0.$$

Setzt man für den Augenblick zur Abkürzung

(4) $$\alpha + \beta + 1 = a,$$

so ergeben die Formeln § 23 (5), (6)

(5) $$\lambda = x^{-\frac{\gamma}{2}}(1-x)^{\frac{\gamma - a}{2}},$$

(6) $$x^2\left(\alpha\beta + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4}\right) - x\left(\alpha\beta + \gamma - \frac{a\gamma}{2}\right) + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{4} = x^2(1-x)^2\varrho,$$

und für ein unendlich großes x, worauf es allein ankommt:

$$x^2\varrho = \alpha\beta + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4},$$

oder wenn man für a seinen Wert (4) zurücksetzt:

$$\rho' = x^2 \rho - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(\alpha - \beta)^2, \tag{7}$$

und ρ' ist also negativ für reelle, positiv für konjugiert imaginäre α, β.

Ist $\alpha = \beta$, so wird ρ' für ein unendliches x unendlich klein von der Ordnung x^{-1}, und wir haben nach § 25 (12) das Verhalten von

$$(\log x)^2 \rho' - \frac{1}{4}$$

zu untersuchen, welches negativ wird. Hiernach ergibt sich aus den Sätzen 5. und 6.:

Die hypergeometrische Differentialgleichung hat oszillatorische Integrale, wenn α und β konjugiert imaginär sind; sie hat keine oszillatorischen Integrale, wenn α und β reell sind.

Man hätte dieses Verhalten auch aus der Entwickelung der Lösung in eine nach fallenden Potenzen von x fortschreitende hypergeometrische Reihe schließen können. (Die Funktionen F_5, F_6 im § 8.)

§ 27.

Die Nullstellen verschiedener partikularer Integrale.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich bei einer festen Differentialgleichung

$$y'' + \rho y = 0 \tag{1}$$

mit oszillierenden Integralen die Nullpunkte ändern, wenn man von einem partikularen Integral zu einem anderen übergeht.

Um zunächst an einem einfachen Beispiel das Verhalten zu veranschaulichen, nehmen wir $\rho = \mu^2$ konstant, und erhalten

$$y = \cos \mu (x - \alpha), \tag{2}$$

was, von einem konstanten Faktor abgesehen, die allgemeine Lösung ist. Das einzelne Integral wird charakterisiert durch den Wert der Konstanten

$$\left(\frac{y'}{y}\right)_0 = \mu \operatorname{tang} \mu \alpha = h, \tag{3}$$

wobei sich ein konstanter Faktor bei y wegheben würde. Die Nullpunkte von (2) sind, wenn ν eine ungerade ganze Zahl ist:

(4) $$x_\nu = \alpha + \frac{\nu\pi}{2\mu}$$

und wenn nun h von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, so geht $\mu\alpha$ von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ und jede Wurzel x_ν geht stetig wachsend in die nächstfolgende über.

Dies Verhalten entspricht einem allgemeinen Gesetz: Nehmen wir an, es sei für irgend ein konstantes $x = a$ für eine Lösung y der Differentialgleichung (1)

(5) $$\left(\frac{y'}{y}\right)_0 = h,$$

so wird auch hier durch den Wert von h ein partikulares Integral, abgesehen von einem konstanten Faktor, bestimmt.

Für eine zweite, von y unabhängige partikulare Lösung z sei

(6) $$\left(\frac{z'}{z}\right)_0 = k.$$

Dann ist nach § 25 (4):

(7) $$yz' - zy' = c = y_0 z_0 (k - h),$$

und wenn k und h endlich sind, so müssen y_0, z_0 von Null verschieden sein. Wir können sie unbeschadet der Allgemeinheit positiv annehmen.

Wir lassen x von a an wachsen und nehmen an, daß der nächste Nullpunkt von y näher an a liegt als der von z. Dann ist in diesem Punkte

$$y = 0, \quad z > 0, \quad y' < 0,$$

und es folgt aus (7)

$$k - h > 0.$$

Wir können also auch sagen, daß von zwei Funktionen y, die für a dasselbe Zeichen haben, die zuerst verschwindet, die dem kleineren Werte von h entspricht, und das kann auch so ausgedrückt werden:

9. Wenn wir nach (5) ein Integral der Differentialgleichung (1) mit dem variablen Parameter h bilden, so wachsen die Nullpunkte von y stetig mit h.

Wenn $h = \pm\infty$ ist, so wird a selbst ein Nullpunkt von y, und so ergibt sich:

10. **Wenn h von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, so geht jeder Nullpunkt von y, stetig in der positiven Richtung fortschreitend, in den nächstfolgenden über.**

§ 28.

Harmonische Funktionen[1]).

Es sei jetzt μ ein variabler Parameter und $f(x, \mu)$ eine stetige Funktion der beiden Variablen x, μ, von der wir voraussetzen, daß sie bei hinlänglich großem μ und x eine positive untere Grenze hat, und für jeden konstanten Wert von x von $\mu = 0$ an beständig zunimmt, oder wenigstens nicht abnimmt.

Unter dieser Voraussetzung hat die Differentialgleichung

$$y'' + f(x, \mu) y = 0 \tag{1}$$

für jedes hinlänglich große μ oszillatorische Integrale. Für die Differentialgleichung der Besselschen Funktion $\sqrt{x}\, J(\mu x)$ wäre beispielsweise [Bd. I, § 72 (14)]:

$$f(x, \mu) = \mu^2 - \frac{4n^2 - 1}{4x^2}. \tag{2}$$

Ein Integral der Differentialgleichung (1) ist dadurch bis auf einen konstanten Faktor vollständig bestimmt, daß es für einen gegebenen Wert von x, den wir zum Nullpunkt wählen, verschwindet. Den konstanten Faktor wollen wir noch dadurch bestimmen, daß $y' = 1$ sei für $x = 0$. Die so definierte Funktion ist noch von μ abhängig und ist eine stetige Funktion der beiden Variablen x und μ. Wir bezeichnen sie mit

$$y = V(x, \mu). \tag{3}$$

Nach (1) ist dann:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, \mu) V = 0,$$

und wenn wir dies nach μ differenzieren:

$$\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial \mu} + f(x, \mu) \frac{\partial V}{\partial \mu} + V \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial \mu} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial \mu} - V \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \mu}\right) = V^2 \frac{\partial f(x, \mu)}{\partial \mu}. \tag{4}$$

[1]) C. Sturm, Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre. Liouvilles Journal, Bd. I, 1836.

Für $x = 0$ ist nun $V = 0$ und $\frac{\partial V}{\partial \mu} = 0$, und folglich durch Integration von (4):

$$\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial \mu} - V\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \mu} = \int_0^x V^2 \frac{\partial f(x,\mu)}{\partial \mu}\, dx, \tag{5}$$

und nach unserer Voraussetzung ist

$$\frac{\partial f(x,\mu)}{\partial \mu} > 0. \tag{6}$$

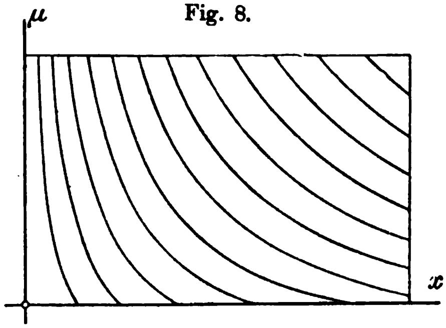
Tragen wir x und μ als rechtwinklige Koordinaten in eine Ebene auf, so werden durch die Gleichung $V(x,\mu) = 0$ Kurven dargestellt. Aus (5) und (6) ergibt sich dann, daß längs dieser Kurven die beiden partiellen Ableitungen $\partial V / \partial x$ und $\partial V / \partial \mu$ das gleiche Vorzeichen haben und daß also wegen

$$\frac{\partial V}{\partial x}\, dx + \frac{\partial V}{\partial \mu}\, d\mu = 0$$

das Differentialverhältnis $dx : d\mu$ negativ ist. Die Kurven $V = 0$ verlaufen also bei wachsendem μ in der Richtung der abnehmenden x (Fig. 8).

Fig. 8.

μ



x

Da die Funktion $V(x,\mu)$ für ein konstantes μ unendlich viele Knotenpunkte hat, so ist die Anzahl dieser Kurven, die von diesen Knotenpunkten auslaufen, unbegrenzt. Sie verlaufen ähnlich wie gleichseitige Hyperbeln, und werden in der Tat solche Hyperbeln ($\mu x = n\pi$) in dem besonderen Fall, wo $f(x,\mu) = \mu^2$ ist. Keine dieser Kurven kann irgendwo in der $x\mu$-Ebene endigen, und wir schließen:

11. Die Knotenpunkte von $V(x,\mu)$ wandern bei stetig wachsendem μ in der Richtung der negativen x.

Es sei ein festes Intervall Δ auf der x-Achse, etwa

$$0 < x < 1.$$

Alle Funktionen $V(x,\mu)$ haben den Anfangspunkt von Δ zum Knotenpunkt, und es gibt unendlich viele Werte von μ, für die auch der Endpunkt von Δ Knotenpunkt ist. Die so gebildeten Funktionen $V(x,\mu)$ heißen die harmonischen Funktionen des Intervalls Δ. Es folgt aus 5., § 25, daß es eine und nur eine harmonische Funktion gibt, die keinen Knotenpunkt im Innern von Δ hat; jede folgende dieser Funktionen hat einen Knotenpunkt mehr als die vorangehende.

Wir können also die harmonischen Funktionen nach der Anzahl der Knotenpunkte im Innern von Δ ordnen. Bei der Anwendung auf die schwingende Saite entspricht die Funktion ohne Knotenpunkt dem Grundton; die folgenden entsprechen dem ersten, zweiten, dritten, ... Oberton. Die harmonischen Funktionen mögen nach der Anzahl der im Innern von Δ gelegenen Knotenpunkte mit

$$V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots$$

bezeichnet sein. Die Knotenpunkte von V_n teilen das Intervall Δ in $n+1$ Teilintervalle Δ_n, in denen die Funktion V_n abwechselnd positiv und negativ ist. Nach § 25, 5. folgt aus der über $f(x,\mu)$ gemachten Voraussetzung, daß in jedem der Teilintervalle Δ_n ein und nur ein Knotenpunkt von V_{n+1} liegt.

§ 29.

Zusammengesetzte harmonische Funktionen.

Für das Folgende wollen wir die Funktion $f(x,\mu)$ etwas spezialisieren. Wir setzen

$$f(x,\mu) = \mu - \varrho \tag{1}$$

und verstehen unter ϱ eine Funktion von x allein, die in dem betrachteten Intervall Δ positiv ist. [Ersetzen wir μ durch $\mu + h$ und $\mu - \varrho$ durch $\mu + h - (h - \varrho)$, so können wir, wenn ϱ innerhalb Δ endlich bleibt, über die Konstante h so verfügen, daß $h - \varrho$ jedenfalls positiv bleibt.] Diese Voraussetzung trifft z. B. für die Differentialgleichung der trigonometrischen und der Besselschen Funktion, § 28 (2), zu.

Die aufeinanderfolgenden harmonischen Funktionen seien

$$V_0, V_1, V_2, \ldots$$

und die entsprechenden Werte von μ:

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$$

Wir bezeichnen mit m, n zwei positive ganze Zahlen, $m < n$ und setzen:

$$U = c_m V_m + c_{m+1} V_{m+1} + \cdots + c_n V_n \tag{2}$$

mit konstanten Koeffizienten $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_n$, und nennen U eine **zusammengesetzte harmonische Funktion des Intervalls** $\varDelta$. Sie verschwindet in den beiden Endpunkten des Intervalls $\varDelta$. Die Funktion V_ν genügt der Differentialgleichung

$$V_\nu'' + (\mu_\nu - \varrho) V_\nu = 0, \tag{3}$$

und daraus leitet man für U die Gleichung her:

$$U'' - \varrho U = -(c_m \mu_m V_m + c_{m+1} \mu_{m+1} V_{m+1} + \cdots + c_n \mu_n V_n). \tag{4}$$

Setzen wir:

$$U_1 = c_m \mu_m V_m + c_{m+1} \mu_{m+1} V_{m+1} + \cdots + c_n \mu_n V_n, \tag{5}$$

so ist

$$U_1 = \varrho U - U'' \tag{6}$$

gleichfalls eine zusammengesetzte harmonische Funktion.

Jeder innere Nullpunkt von U liegt nun zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullpunkten von U' und daraus ergibt sich, daß U' wenigstens einen inneren Nullpunkt mehr hat als U. Es seien α, β zwei aufeinanderfolgende Nullpunkte von U', die einen und nur einen Nullpunkt γ von U zwischen sich enthalten.

12. Es ist zu zeigen, daß in dem Intervall (α, β) wenigstens eine Nullstelle von U_1 liegt.

1. Wenn in γ nicht nur U, sondern auch U'' verschwindet, so verschwindet auch U_1 in γ und unsere Behauptung ist richtig.

2. Es kann in γ nicht nur U, sondern auch U' verschwinden. Dann hat U in $(\alpha\gamma)$ dasselbe Vorzeichen wie in $(\gamma\beta)$, nämlich das Vorzeichen von U'' in γ; nehmen wir an, dies Vorzeichen sei positiv, so ist nach (6) U_1 in γ positiv. Da aber U' in α, β und γ verschwindet, so muß U'' in jedem der Intervalle $(\alpha\gamma)$ und $(\gamma\beta)$ wenigstens einmal verschwinden, und in diesem Punkte wird U_1 negativ. Wir haben dann mindestens zwei Nullpunkte von U_1 in $(\alpha\beta)$.

3. Ist U' in γ und folglich in dem ganzen Intervall $(\alpha\beta)$ von Null verschieden, so gibt es im Innern dieses Intervalls einen Punkt ε, in dem U'' verschwindet. Ist U' und U'' in γ positiv, so liegt ε in dem Intervall $(\gamma\beta)$, in dem U positiv ist, und U_1 ist positiv in γ und negativ in ε, hat also einen Nullpunkt zwischen γ und ε. Ist dagegen U' positiv, U'' negativ, so liegt ε in $(\alpha\gamma)$, wo U negativ ist. Es ist also U_1 in γ negativ und in ε positiv (Fig. 9 und 10).

Daraus ergibt sich der Satz:

13. Die Funktion U_1 hat in dem Intervall Δ wenigstens ebenso viele Nullpunkte wie U.

Ebenso wie von U zu U_1, gehen wir von U_1 zu U_2, von U_2 zu U_3 usf. über und setzen für eine beliebige ganze Zahl r:

$$U_r = c_m \mu_m^r V_m + c_{m+1} \mu_{m+1}^r V_{m+1} + \cdots + c_n \mu_n^r V_n \tag{7}$$

und finden also, daß jede der Funktionen mindestens so viele Knotenpunkte in Δ hat, wie jede der vorangehenden, also mindestens so viel wie U selbst.

Fig. 9.

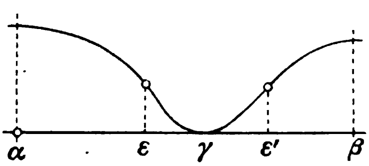
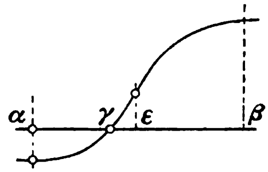


Fig. 10



Man kann hierbei sogar solche Nullpunkte, in denen U und U' zugleich verschwinden, für zwei zählen. Setzen wir:

$$\gamma_m = \frac{c_m}{c_n}\left(\frac{\mu_m}{\mu_n}\right)^r, \qquad \gamma_{m+1} = \frac{c_{m+1}}{c_n}\left(\frac{\mu_{m+1}}{\mu_n}\right)^r, \ldots \tag{8}$$

so erhalten wir die Nullpunkte von U_r aus der Gleichung:

$$V = V_n + \gamma_{n-1} V_{n-1} + \cdots + \gamma_m V_m = 0. \tag{9}$$

Nun sind $\mu_m/\mu_n, \mu_{m+1}/\mu_n, \ldots$ echte Brüche (da $\mu_m, \mu_{m+1}, \ldots, \mu_n$ wegen $n > m$ eine wachsende Zahlenreihe bilden), und folglich nähern sich die $\gamma_m, \gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_{n-1}$ mit unendlich wachsendem r der Grenze Null.

Nun hat V_n, wie wir wissen, n Knotenpunkte, in deren keinem V_n' verschwindet. Wir können jeden dieser n Knotenpunkte in ein beliebig kleines Intervall δ einschließen, und dann können wir die Koeffizienten γ so klein annehmen, daß die durch (9) definierte Funktion V außerhalb dieser Intervalle nicht verschwindet, daß sie, ebenso wie V_n, an beiden Endpunkten von δ entgegengesetzte Vorzeichen hat, und daß V' im Innern von δ nicht verschwindet. Dann liegt in jedem Intervall δ ein Nullpunkt von V, und in keinem mehr als einer, und V hat also n und nicht mehr Knotenpunkte. Bezeichnen wir also mit ν die Anzahl der Knotenpunkte von U, so ist

$$\nu \gtreqless n. \tag{10}$$

Ersetzen wir in U

$$c_m,\ c_{m+1},\ \ldots,\ c_n$$

durch

$$c_m \mu_m^{-r},\ c_{m+1} \mu_{m+1}^{-r},\ \ldots,\ c_n \mu_n^{-r},$$

so geht $U_r(x)$ nach (7) in U über, während U selbst in

(11) $$U_{-r}(x) = c_m \mu_m^{-r} V_m + c_{m+1} \mu_{m+1}^{-r} V_{m+1} + \cdots + c_n \mu_n^{-r} V_n$$

übergeht, und nach dem bereits gewonnenen Ergebnis hat U mindestens so viele Wurzeln als $U_{-r}(x)$. Wenn wir dann wieder die ganze Zahl r unbegrenzt wachsen lassen, so gehen die Knotenpunkte von $U_{-r}(x)$ in die von V_m über, deren Zahl m ist. Daraus folgt also

(12) $$m \gtreqless \nu.$$

Damit ist folgendes bewiesen:

14. Die Anzahl der Knotenpunkte der zusammengesetzten Funktion U ist
    a) höchstens gleich n,
    b) mindestens gleich m.

Wir haben den Satz 14. so formuliert, daß jeder Punkt, in dem die Funktion U verschwindet, als ein Knotenpunkt gezählt wird. Wir hätten aber auch anders zählen können, nämlich so, daß wir einen inneren Punkt, in dem U mit seinen $q - 1$ ersten Derivierten verschwindet, für q (zusammenfallende) Knotenpunkte gezählt hätten, und der Satz hätte sich auch bei dieser Zählung als richtig erwiesen. In dieser Fassung besagt der Satz mehr als 14a, aber weniger als 14b.

Wenn dagegen in einem der Endpunkte U mit seinen $q - 1$ ersten Differentialquotienten verschwindet, so würde der Satz nicht mehr richtig bleiben, wenn wir, was nahe liegt, einen solchen Punkt als $(q - 1)$-fachen Knotenpunkt zählen wollten. So hat z. B. die Funktion

$$V = a \sin 2x + b \sin 3x$$

im Intervall $(0, \pi)$ im allgemeinen, je nach dem Wert des Verhältnisses a/b einen oder zwei Knotenpunkte, aber die spezielle Funktion

$$3 \sin 2x - 2 \sin 3x = 2 \sin x\,(1 - \cos x)\,(1 + 4 \cos x)$$

hat für $x = 0$ einen Nullpunkt dritter Ordnung und außerdem noch einen inneren Knotenpunkt. Der Nullpunkt dritter Ordnung darf also, wenn der Satz richtig bleiben soll, nicht für drei Knotenpunkte gezählt werden.

Es ergibt sich ferner aus dem Satz 14. die Folgerung:

15. Die Funktion

$$U = c_m V_m + c_{m+1} V_{m+1} + \cdots + c_n V_n \tag{13}$$

kann nur dann identisch verschwinden, wenn alle Koeffizienten c_i gleich Null sind.

Wenn nämlich U identisch Null und c_n von Null verschieden ist, so können wir $c_n = 1$ annehmen, und es ergibt sich

$$V_n = -c_m V_m - c_{m+1} V_{m+1} - \cdots - c_{n-1} V_{n-1}.$$

Dies ist aber unmöglich, da die linke Seite n Knotenpunkte hat, während die rechte nach 14. höchstens $n-1$ haben kann.

§ 30.

Darstellung einer willkürlichen Funktion durch harmonische Funktionen.

Die harmonischen Funktionen eines Intervalls Δ kann man zu einer Darstellung willkürlicher Funktionen durch unendliche Reihen benutzen, von denen die Fourierschen Reihen ein spezieller Fall sind. Freilich können wir im allgemeinen Falle nichts weiter tun, als unter der Voraussetzung, daß eine solche Entwickelung möglich sei, die Koeffizienten durch bestimmte Integrale ausdrücken. Bezeichnen wir wieder mit

$$V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots \tag{1}$$

die harmonischen Funktionen, in aufsteigender Reihe geordnet, und wie in § 28, 29 möge V_n der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 V_n}{d x^2} + (\mu_n - \varrho) V_n = 0 \tag{2}$$

genügen. Irgend zwei dieser Funktionen ergeben nach § 25:

$$V_m V_n' - V_n V_m' = (\mu_m - \mu_n) \int V_m V_n \, dx + \text{const} \tag{3}$$

und wenn man das Integral über das ganze Intervall Δ, also von $x = 0$ bis $x = 1$ ausdehnt, und μ_m von μ_n verschieden annimmt:

$$\int_0^1 V_m V_n \, dx = 0. \tag{4}$$

Wenn $V_m = V_n$ wäre, so könnte das Integral (3) nicht mehr verschwinden. Sein Wert wird dann von den in den V_n noch unbestimmt gelassenen konstanten Faktoren abhängen. Wir setzen:

$$\int_0^1 V_n^2 dx = p_n. \tag{5}$$

Ist dann $f(x)$ eine in dem Intervall $\varDelta$ gegebene willkürliche Funktion, so können wir setzen:

$$f(x) = c_0 V_0 + c_1 V_1 + c_2 V_2 + \cdots, \tag{6}$$

worin die Konstanten $c_0, c_1, c_2, \ldots$ von $f(x)$ abhängen und nach (4) und (5) bestimmt werden, wenn man (6) mit V_n multipliziert und zwischen den Grenzen 0, 1 integriert. Man erhält:

$$c_n = \frac{1}{p_n} \int_0^1 f(x)\, V_n dx, \tag{7}$$

ganz analog wie bei der Fourierschen Koeffizientenbestimmung.

ZWEITES BUCH.

WÄRMELEITUNG.

Fünfter Abschnitt.

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung.

---

§ 31.

Temperaturmaß.

Unter den unmittelbar, d. h. durch körperliches Gefühl meßbaren Größen der Physik ist wohl neben Raum, Zeit, Kraft, die wichtigste die Temperatur. Die Berührung verschiedener Körper bringt eine verschiedene Wärmeempfindung hervor, wonach wir den einen Körper wärmer nennen als den anderen. Eine andere Definition läßt sich nicht geben.

Die Wärmeempfindung kann auch bei einem und demselben Körper veränderlich sein. Wir sagen dann, die Temperatur des Körpers habe sich mit der Zeit verändert. Unser Wärmegefühl gibt uns aber noch keine oder höchstens eine sehr rohe Möglichkeit, die Temperatur zu messen, d. h. die verschiedenen Wärmeempfindungen auf das Zahlenreich abzubilden. Dazu führt uns die Erfahrung, daß mit der Temperaturänderung immer noch gewisse andere physikalische Änderungen verschiedener Art verbunden sind, die einer Messung zugänglich sind, Änderungen des Volumens, chemische Umsetzungen, elektrische Vorgänge usf., und es liegt in unserer Willkür oder ist vielmehr eine Zweckmäßigkeitsfrage, welche dieser Vorgänge wir als Maß der Temperatur betrachten wollen. Das Objekt der Messung ist hier nicht die absolute Temperatur, deren Maß und Begriff erst durch weitab liegende theoretische Betrachtung gewonnen wird, sondern nur die Temperaturdifferenz, d. h. wir wählen eine bestimmte willkürliche Temperatur als Nullpunkt.

Als Maß für die Temperaturdifferenz nehmen wir dann irgend einen der angeführten meßbaren Vorgänge, z. B. die Steighöhe eines bestimmten Quecksilberfadens, mit dessen Länge wir die

Temperatur proportional setzen. Jedes andere Thermometer muß aber „kalibriert“ werden, d. h. es muß z. B. die Steighöhe eines Weingeistthermometers durch Beobachtung als Funktion der Temperatur bestimmt werden, und diese Kalibrierung wird anders ausfallen, wenn man von einem anderen Thermometer ausgeht. Um die hierin liegende Unsicherheit zu beschränken, machen wir zunächst, wie fast überall in der Anwendung der Mathematik auf reale Dinge, von dem Taylorschen Lehrsatz Gebrauch, in dem wir uns auf die beiden ersten Glieder beschränken, d. h. wir betrachten innerhalb mäßiger Temperaturdifferenzen alle diese meßbaren Größen als lineare Funktionen der Temperatur. Das ist unter allen Umständen nur eine erste Annäherung und wie weit diese bei einem gewissen Stand der Genauigkeit unserer Meßmethoden zulässig ist, kann nur die Erfahrung lehren.

Nehmen wir z. B. als Maß für die Temperatur das Volumen v einer bestimmten Quecksilbermasse, so ist die Temperatur u definitionsweise gleich einer linearen Funktion von v zu setzen:

$$u = av + b$$

und man kann a und b bestimmen, wenn man zwei Paar zusammengehörige Werte $u_0\, v_0$; u_1, v_1 von u und v kennt. Die Natur bietet uns zwei feste unveränderliche Temperaturen im Gefrierpunkt und Siedepunkt des Wassers (bei mittlerem Barometerstand), und wenn man diesen Temperaturen zwei willkürliche Zahlen zuweist, z. B. $u = 0$, $u = 100$, und die zugehörigen Werte von v beobachtet, so kann man a und b bestimmen.

Die jetzt allgemein gebräuchliche — bei uns sogar gesetzliche — Temperaturskale erhält man, wenn man die Steighöhe des Normalthermometers beim Übergang von der Temperatur des siedenden zu der des gefrierenden Wassers in hundert gleiche Teile teilt.

Nun zeigt aber die Erfahrung, daß bedeutendere Temperaturänderungen noch Veränderungen von ganz anderer Art zur Folge haben, Änderung der Aggregatzustände, Schmelzen, Verdampfen, chemische Änderungen, wie Verbrennung und damit verbundene Explosionen, kurz unstetige Vorgänge, wobei von einer linearen Abhängigkeit nicht die Rede sein kann. Aber auch diese Vorgänge stehen mit den Temperaturänderungen im Zusammenhang. Die Thermodynamik sucht diesen Zusammenhängen durch ihre beiden Hauptsätze, das Energiegesetz und das Entropiegesetz beizukommen, wobei dann auch eine andere, auf theoretischer Grundlage ruhende Definition des Temperaturmaßes gewonnen wird.

In der Theorie der Wärmeleitung wird nicht nur von solchen Vorgängen abgesehen, sondern auch, was bei festen Körpern und mäßigen Temperaturen näherungsweise gestattet ist, von allen anderen als thermischen, also auch von Volumenänderungen, und es bleibt also als einfachste und allgemeinste Tatsache die Wahrnehmung übrig, daß zwei Körper verschiedener Temperatur bei der Berührung den Temperaturunterschied allmählich ausgleichen.

Die ältere Wärmelehre, die ihre Begründung und Ausbildung in erster Linie Fourier verdankt[1]), erklärt die Erscheinungen der geleiteten Wärme aus der Annahme eines imponderabeln Wärmestoffes, und die neuere Physik hat für die Theorie der Wärmeleitung bisher auch nichts anderes an die Stelle gesetzt, wenn sie auch erkannt hat, daß dieser Stoff keineswegs unzerstörbar und unveränderlich ist, und seine Umsetzung in andere Energieformen das wesentlichste Problem der neuen Thermodynamik ist.

Aus dem Temperaturmaß erhält man ein Maß für die Wärmemenge. Um die Temperatur einer Masse m von u auf $u + du$ zu erhöhen, ist eine Wärmemenge dq erforderlich, die man, wenn du unendlich klein ist, mit du proportional setzt. Außerdem wird man sie mit der Masse m proportional annehmen, also:

$$dq = mc\,du, \tag{1}$$

wo c der Proportionalitätsfaktor ist. Erfahrungen wie die, daß zwei Körper verschiedener Substanz oder auch derselben Substanz und verschiedener Temperatur, die sich bei Berührung mit einem Meßkörper, z. B. mit Wasser einer bestimmten Temperatur, um dieselbe Temperaturdifferenz erwärmen, die Temperatur des Meßkörpers ungleich erniedrigen, zwingen dazu, den Proportionalitätsfaktor c als Funktion der Temperatur und außerdem von der Substanz abhängig anzunehmen. Er wird die spezifische Wärme der betreffenden Substanz genannt. Hat man ihn für irgendeinen Körper, z. B. für Wasser bei 15° C willkürlich etwa $= 1$ angenommen, so kann man ihn für alle anderen Fälle durch Messung der Temperaturerhöhung von einer bestimmten

---

1) Fourier, „Théorie analytique de la chaleur", Paris 1822; Poisson, „Théorie mathématique de la chaleur", Paris 1835.

Temperatur, die der gleichen Abkühlung des Meßkörpers entspricht, bestimmen.

> Die Einheit für die Wärmemenge ist alsdann die Wärmemenge, die erforderlich ist, um (bei Ausschließung aller anderen Wirkungen der Wärme) Wasser von 15° auf 16° zu erwärmen.

Hier ist für das unendlich kleine du ein Grad gesetzt, was den Tatsachen mit hinlänglicher Genauigkeit entspricht.

Diese Wärmeeinheit heißt eine kleine Kalorie. Andere Arten, die Wärmeeinheit zu definieren, Nullpunktkalorien, mittlere Kalorien, findet man in physikalischen Werken. Hat man sich über die anzuwendende Kalorie geeinigt, so kann man die Wärmemenge, ebenso wie die Temperatur, durch eine Zahl ausdrücken, deren Einheit von Raum-, Zeit- und Masseneinheit unabhängig ist. Die spezifische Wärme c ist dann die Wärmemenge, die erforderlich ist, um ein Gramm einer Substanz um einen Grad zu erwärmen.

Nach dem ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie ist aber die Wärme äquivalent mit Arbeit oder Energie und kann durch diese gemessen werden.

Eine Kalorie ist äquivalent mit 427 Gramm-Metern und diese Zahl heißt das mechanische Wärmeäquivalent. Multiplizieren wir die Anzahl der Kalorien mit dieser Zahl, so erhalten wir die Wärmemenge in mechanischem Maße ausgedrückt und die Dimensionen werden dann dieselben, wie die der Energie: $[m\, l^2 t^{-2}]$. Die spezifische Wärme erhält die Dimension $[l^2 t^{-2}]$[1]).

§ 32.

Wärmefluß.

In bezug auf den Übergang der Wärme von einem wärmeren Körper zu einem kälteren, oder kurz die Wärmeleitung gilt nun erfahrungsmäßig folgender Grundsatz[2]):

Wenn eine ausgedehnte Platte von irgend einem Stoff auf beiden Seiten mit Räumen verschiedener Temperatur, z. B. auf der einen Seite mit schmelzendem Eis, auf der anderen mit Wasser von höherer Temperatur in Berührung steht, so wird,

---

[1]) Vgl. die Darstellung in Weber-Wellstein, „Enzyklopädie der Elementarmathematik", Bd. III, 2. Aufl., § 27, 28.

[2]) Vgl. Riecke, Lehrbuch der Experimentalphysik.

wenn die Temperatur beiderseits konstant erhalten wird, Wärme von der warmen nach der kalten Seite durch die Platte hindurchgehen, die z. B. durch die Menge geschmolzenen Eises gemessen werden könnte.

Die ganze Vorrichtung denken wir uns nach außen durch eine zylindrische Fläche, senkrecht zur Ebene der Platte, begrenzt, durch die keine in Betracht kommende Wärmemenge aus- oder eintritt; die Temperaturen, die auf beiden Seiten der Platte herrschen, mögen mit u_0, u_1 bezeichnet sein.

Die Wärmemenge Q, die in der Zeit t durch die Platte hindurchgeht, ist dann proportional mit der Temperaturdifferenz $u_1 - u_0$, proportional mit der Oberfläche ω der Platte, und proportional mit der Zeit t, endlich umgekehrt proportional mit der Dicke $\varDelta$ der Platte, also

$$Q = k\frac{u_1 - u_0}{\varDelta}\omega t, \tag{1}$$

worin k ein Faktor ist, der die Wärmeleitfähigkeit der Substanz der Platte heißt. Dieser Faktor k ist nur in erster Annäherung konstant, er ist streng genommen noch eine Funktion der beiden Temperaturen u_0, u_1, und kann, wenn die Temperaturdifferenz $u_1 - u_0$ klein ist, mit einer weiteren Annäherung auch als Funktion der mittleren Temperatur $\frac{1}{2}(u_0 + u_1)$ angesehen werden.

Wir machen nun die Annahme, daß ein Wärmeaustausch nur zwischen den sich unmittelbar berührenden Teilen eines Körpers stattfinde[1]) und wenden demgemäß die Formel (1) auf die unendlich kleinen Teile eines Körpers an, in dem die Temperatur u eine Funktion des Ortes ist. Wenn wir auch die Zeitdauer t auf ein unendlich kleines Zeitelement dt beschränken, können wir auch noch die Voraussetzung fallen lassen, daß u_0, u_1 von der Zeit unabhängig sind, und können also die Temperatur u auch als Funktion der Zeit ansehen.

Wenn wir dann die Formel (1) auf das unendlich Kleine übertragen, so ergibt sich der folgende Satz:

> Ist die Temperatur u im Innern eines Wärmeleiters eine Funktion des Ortes und der Zeit, ist $d\omega$ ein Flächenelement im Innern dieses Körpers,

[1]) Hierdurch schließen wir die Wärmestrahlung, also die Vorgänge in den diathermanen Körpern, von der Betrachtung aus.

dn ein Element der Normalen an $d\omega$, in einer beliebigen der beiden Richtungen positiv genommen, so fließt in der Richtung von dn in dem Zeitelement dt eine Wärmemenge

$$dq = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\omega dt, \tag{2}$$

wenn k die Leitfähigkeit der Substanz ist, die eine Funktion des Ortes und auch der Temperatur u (also implizite auch der Zeit) sein kann, in erster Annäherung aber auch als konstant angesehen wird.

Zur Vereinfachung des Ausdruckes führen wir jetzt den Temperaturgradienten ein, und nennen den Vektor (Bd. I, § 94)

$$\mathfrak{Q} = -k \operatorname{grad} u \tag{3}$$

den Wärmefluß. Es ist dann nach (2) die Komponente Q_n dieses Vektors die in der Zeiteinheit in der Richtung n durch die Flächeneinheit hindurchgegangene Wärmemenge.

§ 33.

Die Differentialgleichung der Wärmeleitung.

Um nun zu der Differentialgleichung für die Wärmebewegung zu gelangen, betrachten wir einen beliebigen Raumteil τ eines Wärmeleiters, in dem die Temperatur und das Temperaturgefälle stetig sind, und in dem auch die Leitfähigkeit k keine Unstetigkeit erleidet.

Ist O die Oberfläche von τ, do ein Element von O und n die ins Innere gerichtete Normale, so ist

$$\int Q_n do \tag{1}$$

die Wärmemenge, die durch Leitung von außen in der Zeiteinheit in den Raum τ eintritt, und dieser Ausdruck läßt sich nach dem Gaußschen Integralsatz (Bd. I, § 95, I.) auch durch ein Raumintegral darstellen:

$$-\int \operatorname{div} \mathfrak{Q}\, d\tau. \tag{2}$$

Um allgemein zu sein, nehmen wir an, daß zugleich im Innern des Körpers, etwa durch elektrische Vorgänge oder auf andere Weise, Wärme erzeugt oder vernichtet werde, und bezeichnen die so im Raumelement $d\tau$ in dem Zeitelement dt gebildete Wärmemenge mit

$$(3) \qquad A\,d\tau\,dt,$$

worin A eine Funktion von Ort und Zeit bedeuten kann. Der gesamte Gewinn an Wärme, den der Raum τ in dem Zeitelement dt erfährt, ist daher nach (2) und (3):

$$(4) \qquad dt\int(A - \operatorname{div}\mathfrak{Q})\,d\tau.$$

Wir sehen ab von den mit den Temperaturänderungen verbundenen Volumänderungen, so daß jedes Raumelement dauernd von demselben Massenelement erfüllt gedacht wird. Dann ist die Masse des Elementes $d\tau$, wenn ϱ die Dichtigkeit bedeutet, gleich $\varrho\,d\tau$ und die Temperaturzunahme im Zeitelement dt gleich $(\partial u/\partial t)\,dt$. Um diese Temperaturzunahme zu bewirken, ist aber nach § 31 (1) eine Wärmemenge erforderlich gleich

$$c\varrho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,d\tau\,dt,$$

also für den ganzen Raum τ

$$(5) \qquad dt\int c\varrho\,\frac{\partial u}{\partial t}\,d\tau.$$

Die Ausdrücke (4) und (5) müssen also einander gleich sein, und da der Raum τ beliebig war, die Gleichheit beider Ausdrücke also auch für jeden Teil von τ bestehen muß, so folgt

$$(6) \qquad c\varrho\,\frac{\partial u}{\partial t} = A - \operatorname{div}\mathfrak{Q} = A + \operatorname{div} k \operatorname{grad} u,$$

oder explizite geschrieben [Bd. I, § 93 (3)]:

$$\text{I.} \qquad c\varrho\,\frac{\partial u}{\partial t} = A + \frac{\partial k\,\frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial k\,\frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial k\,\frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z}.$$

Dies ist also die allgemeine Differentialgleichung, der die Temperatur im Innern eines Leiters zu genügen hat. Die Größe A ist aber nicht immer von vornherein bekannt, sondern sie hängt ihrerseits wieder von noch unbekannten Funktionen, z. B. von der Intensität der elektrischen Strömung, ab. Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, wo $A = 0$ gesetzt werden kann, wo also im Innern des Leiters ein zu berücksichtigender Umsatz von Energie nicht stattfindet. Dann nimmt I. die einfache Gestalt an:

$$\text{Ia.} \qquad c\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial k \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial k \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial k \frac{\partial u}{\partial z}}{\partial z}.$$

Wenn die Leitfähigkeit k als konstant betrachtet werden kann, so vereinfacht sich diese Gleichung noch weiter, und sie wird, wenn

$$(7) \qquad \frac{k}{c\varrho} = a^2$$

gesetzt wird:

$$\text{Ib.} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

oder abgekürzt:

$$\text{Ic.} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u.$$

Ist auch die spezifische Wärme c und die Dichtigkeit ϱ konstant, so ist a^2 eine Konstante, die der Temperatur-Leitungskoeffizient genannt wird[1]).

Setzt man in den Formeln I. bis Ic. $\partial u/\partial t = 0$, so ergeben sich die Bedingungen für den stationären Zustand. Die Gleichungen Ib. und Ic. werden dann dieselben, wie die für das elektrische Potential bei stationärer elektrischer Strömung (Bd. I, § 173).

§ 34.

Grenzbedingungen.

Bei den Wärmeleitungsproblemen haben wir es immer mit begrenzten Körpern zu tun. Bei den Versuchen sind feste Wärmeleiter mit der Luft in Berührung, oder sie befinden sich in einem Wasserbade, in dem die Temperatur konstant gehalten wird, usf.

Zwar ist jeder endliche Körper Teil eines unbegrenzten Temperaturfeldes, aber in diesem Felde sind flüssige und gasförmige Körper enthalten, es kommt auch die Wärmestrahlung in Betracht, und die Theorie ist weit davon entfernt, diese Umstände alle berücksichtigen zu können. Man beschränkt sich daher auf die Betrachtung endlicher Körper, muß dann aber die ergänzenden Bedingungen an der Grenze aus der Erfahrung oder

[1]) Die Dimensionen der hier vorkommenden Größen in absolutem Maße sind, wenn Temperaturdifferenzen als reine Zahlen angesehen werden:

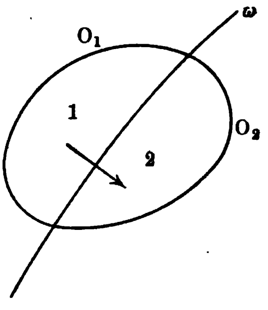
$$[k] = [mlt^{-3}],\ [c] = [l^2t^{-2}],\ [\varrho] = [ml^{-3}],\ [a^2] = [l^2t^{-1}].$$

durch wahrscheinliche Annahmen hinzufügen, die nachträglich durch die Erfahrung zu prüfen sind.

1. Stetigkeitsbedingungen. Es wird angenommen, daß die Temperatur an jeder Stelle eine stetige Funktion der Zeit ist. In einem Raumteil, in dem sich die Koeffizienten k, ϱ, c stetig ändern, ist die Temperatur eine stetige Funktion des Ortes.

2. Anfangszustand. In irgend einem Augenblicke, von dem aus wir den Vorgang verfolgen wollen, und in dem wir $t = 0$ setzen, ist die Temperatur eine beliebig gegebene Funktion des Ortes, die wir den Anfangszustand nennen. Diese Funktion braucht nicht stetig zu sein. Nach 1. muß aber nach Verlauf einer noch so kurzen Zeit eine etwa vorhandene Unstetigkeit sich ausgeglichen haben. An einzelnen Stellen, etwa an Flächen, in denen der Anfangszustand unstetig ist, wird also auch eine sprungweise Änderung mit der Zeit angenommen werden müssen.

Fig. 11.



Eine Verletzung der Stetigkeitsbedingung 1. muß daher für $t = 0$ zugelassen werden. Wir formulieren daher die Bedingung für den Anfangszustand etwas schärfer dahin, daß die Temperatur u für $t = 0$ überall da stetig in den Anfangszustand übergehen soll, wo dieser Anfangszustand eine stetige Funktion des Ortes ist.

Bezeichnen wir mit Φ den Anfangszustand, so drücken wir diese Bedingung so aus:

II. für $t = 0$ ist $u = \Phi$.

3. Bedingung an Unstetigkeitsflächen. Wenn sich zwei heterogene Leiter 1, 2 in einer Fläche ω berühren, so können wir dies so auffassen, als ob die Koeffizienten k, ϱ, c an dieser Fläche eine sprungweise Änderung erleiden. Wir bezeichnen die Werte zu beiden Seiten der Fläche ω mit k_1, ϱ_1, c_1; k_2, ϱ_2, c_2. Die Temperatur u kann an dieser Fläche gleichfalls unstetig sein, und ihre Werte auf beiden Seiten seien u_1, u_2. Wir grenzen zwei Räume τ_1, τ_2 ab, die ein Stück von ω als gemeinschaftliche Grenze haben, und außerdem durch Flächen O_1, O_2 begrenzt sind (Fig. 11) und bestimmen nun die Wärmemenge, die in jeden dieser

Räume eintritt. Dabei werde die Annahme gemacht, daß durch ein Element $d\omega$ von ω in dem Zeitelement dt eine Wärmemenge von 1 nach 2 übertritt, die mit der Temperaturdifferenz $u_1 - u_2$ proportional ist, und die wir gleich

$$h(u_1 - u_2)\, d\omega\, dt \tag{1}$$

setzen. Der Koeffizient h kann eine Funktion des Ortes und der Temperaturen u_1, u_2 sein, und wird im einfachsten Falle als konstant angesehen. Er heißt die **Übergangs-Leitfähigkeit** und wird wesentlich auch von der Beschaffenheit der Berührungsfläche abhängig sein.

Die Wärmemenge, die der Raumteil τ_1 in dem Zeitelement dt gewinnt, auf die Zeiteinheit berechnet, ist dann wie im § 33 zu bestimmen und ergibt sich, wenn n die innere Normale an O_1 bedeutet:

$$\int Q_n\, dO_1 - \int h(u_1 - u_2)\, d\omega + \int A\, d\tau_1, \tag{2}$$

und nach dem Gaußschen Integralsatze, auf τ_1 angewandt, ist dann

$$\int Q_n\, dO_1 - \int Q_n\, d\omega = -\int \operatorname{div} \mathfrak{Q}\, d\tau_1, \tag{3}$$

wenn im zweiten Integral n die Normale an $d\omega$, von 1 nach 2 gerichtet, bedeutet; also ist der Wärmegewinn von τ_1

$$\int [Q_n - h(u_1 - u_2)]\, d\omega + \int (A - \operatorname{div} \mathfrak{Q})\, d\tau_1. \tag{4}$$

Andererseits ergibt sich aus der Temperaturerhöhung für diese Wärmemenge der Ausdruck

$$\int c\varrho \frac{\partial u}{\partial t}\, d\tau_1, \tag{5}$$

und nach § 33 (6) ist daher

$$\int [Q_n - h(u_1 - u_2)]\, d\omega = 0.$$

Da diese Gleichung für jeden Teil der Fläche ω gültig sein muß, so folgt aus ihr für jeden Punkt von ω die Gleichung

$$Q_n - h(u_1 - u_2) = 0. \;*)$$

Es ist hierin n die von 1 nach 2 gerichtete Normale an ω, und nach § 32 (3) ist:

$$Q_n = -k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}.$$

*) This relation foll. dir'y fr. (1).

Dieselbe Betrachtung läßt sich auf τ_2 anwenden, und so erhalten wir also die Bedingungen:

$$\text{III.}\qquad \begin{aligned} k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} &= -h(u_1 - u_2) \\ k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} &= -h(u_1 - u_2) \end{aligned}$$

für die Fläche ω.

Man sieht, daß die Konstante k eine Längendimension mehr enthält als h. Es werden also die Verhältnisse $k_1 : h$ und $k_2 : h$ durch Längenmaß ausgedrückt. Lassen wir diese Länge verschwindend klein werden (im Vergleich zu den übrigen in Betracht kommenden Längen), so ergibt sich eine andere Bedingung, nämlich:

$$\text{III a.}\qquad u_1 = u_2, \qquad k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}$$

an der Fläche ω.

Dies entspricht also der Annahme über den Ausgleich der Temperaturen zwischen 1. und 2., daß eine sprungweise Temperaturänderung auch beim Übergang aus dem einen Körper in den anderen nicht bestehen kann, und sich sofort auflösen muß, wenn sie am Anfang bestand. Der Gradient wird an der Grenze eine durch IIIa. bestimmte Unstetigkeit erleiden müssen.

Diese Betrachtung, auf den Fall $k_1 = k_2$ angewandt, zeigt uns, daß der Temperaturgradient nicht an Flächen unstetig werden kann, wenn nicht die Leitfähigkeit unstetig ist.

4. Oberflächenbedingung. Auf dem gleichen Wege erhalten wir die Bedingung für die Oberfläche des Körpers. Wir nehmen die Temperatur U der Umgebung, z. B. der Zimmerluft, als gegeben an; sie kann konstant oder auch eine gegebene Funktion von Zeit und Ort sein. Es kommt nur auf den Wert von U an der Grenze des betrachteten Körpers an. Man nimmt dann wieder an, daß durch ein Element do dieser Grenze im Zeitelement eine Wärmemenge aus dem Körper in die Umgebung tritt, die durch

$$h(u - U)\, do\, dt$$

ausgedrückt ist, und nennt h die äußere Leitfähigkeit des Körpers. Es ist dann alles wie vorher für den Körper τ_2, nur daß jetzt an Stelle von u_1 die gegebene Funktion U tritt, und man findet, wenn n die nach innen gerichtete Normale bedeutet und durch einen darüber gesetzten Strich angedeutet ist, daß die Werte der Funktionen an der Oberfläche zu nehmen sind:

$$\text{IV.} \qquad k\,\overline{\frac{\partial u}{\partial n}} = h(\bar{u} - U).$$

Die äußere Leitfähigkeit h hängt von der Temperatur selbst und sehr wesentlich von der Beschaffenheit der Oberfläche ab.

Auch hier können wir den Grenzfall betrachten:

$$\text{IVa.} \qquad \bar{u} = U.$$

Eine Bedingung für den Differentialquotienten ergibt sich in diesem Falle nicht. Man kann IVa. als Grenzfall aus IV. ableiten, wenn man h unendlich werden läßt.

§ 35.

Eindeutigkeit der Lösung.

Die Differentialgleichung und die Grenzbedingungen, die wir in den beiden vorangegangenen Paragraphen abgeleitet haben, sind linear, wenn wir die Koeffizienten c, ϱ, k, h als von der Temperatur unabhängig voraussetzen dürfen. Unter dieser Voraussetzung sind diese Größen, die ihrer Natur nach positiv sind, entweder konstant oder nur von den Koordinaten, nicht von der Zeit abhängig.

Wenn wir außerdem noch voraussetzen, daß die im Innern des Leiters erzeugte Wärme A entweder gleich Null oder doch eine gegebene Funktion des Ortes und der Zeit ist, so läßt sich beweisen, daß durch die Bedingungen I., II., III., IV. der beiden letzten Paragraphen die Funktion u **eindeutig** bestimmt ist.

Nehmen wir an, es existieren zwei Funktionen u', u'', die denselben Bedingungen I. ... IV. genügen, und zwar für dieselben Funktionen A und U, so genügt die Differenz

$$(1) \qquad u = u' - u''$$

den folgenden Bedingungen:

$$1. \quad c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} k \operatorname{grad} u,$$

$$2. \quad u = 0 \quad \text{für} \quad t = 0,$$

$$3. \quad k_1\frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial n} = -h(u_1 - u_2)$$

an einer Unstetigkeitsfläche ω,

$$4. \quad k\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = h\bar{u}$$

an der Oberfläche. Dabei bedeutet h in 4. die äußere, in 3. die Übergangs-Leitfähigkeit.

(Wir nehmen hier die allgemeineren Bedingungen III., IV. Bei Annahme der Bedingungen IIIa., IVa. würde sich der Beweis noch etwas einfacher gestalten.)

Wenn wir von der Formel:

$$\frac{\partial k u \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} = k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u \frac{\partial k \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}$$

und den beiden entsprechenden Gebrauch machen, so folgt

(2) $$\operatorname{div} k u \operatorname{grad} u = k D(u) + u \operatorname{div} k \operatorname{grad} u,$$

wenn

(3) $$D(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

Die Gleichung (2) gibt aber nach 1.:

$$\operatorname{div} k u \operatorname{grad} u = k D(u) + c \varrho u \frac{\partial u}{\partial t},$$

oder auch, da $c\varrho$ von t unabhängig ist:

(4) $$\operatorname{div} k u \operatorname{grad} u = k D(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial c \varrho u^2}{\partial t}.$$

Wenn wir nun über den ganzen Raum τ des Wärmeleiters integrieren und das Gaußsche Theorem anwenden, wobei die Unstetigkeitsflächen ω als Schnitte mit zur Begrenzung zu rechnen sind, so folgt:

$$\int \operatorname{div} k u \operatorname{grad} u \, d\tau = -\int k u \frac{\partial u}{\partial n} \, do + \int \left(k_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - k_2 u_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) d\omega$$

oder mit Rücksicht auf 3. und 4.:

$$-\int \operatorname{div} k u \operatorname{grad} u \, d\tau = \int h u^2 \, do + \int h (u_1 - u_2)^2 \, d\omega,$$

also nach (4):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int c \varrho u^2 \, d\tau + \int k D(u) \, d\tau + \int h u^2 \, do + \int h (u_1 - u_2)^2 \, d\omega = 0,$$

und wenn man endlich noch in bezug auf die Zeit t zwischen den Grenzen 0 und t integriert, und dabei die Bedingung 2. berücksichtigt

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\int c\,\varrho\,u^2 d\tau$$
$$+\int_0^t dt\left\{\int k\,D(u)\,d\tau+\int h\,u^2 do+\int h\,(u_1-u_2)^2\,d\omega\right\}=0.$$

Wenn nun u irgendwo im Raume τ und in irgend einem Zeitintervall von Null verschieden ist, so ist die linke Seite von (5) eine Summe von positiven Gliedern, die nicht verschwinden kann. Folglich muß $u = 0$ oder $u' = u''$ sein, wie bewiesen werden sollte.

§ 36.

Wärmebewegung in einem Stabe.

Wenn der Leiter ein Stab ist, dessen Querdimensionen als unendlich klein betrachtet werden können, dann läßt sich das Problem der Wärmebewegung dadurch vereinfachen, daß man die Oberflächenbedingung in die Differentialgleichung mit hineinzieht.

Wir betrachten also einen Stab, der geradlinig oder auch gekrümmt sein kann, der einen beliebig gestalteten Querschnitt vom Flächeninhalt q hat, wobei q auch von einer Stelle zur anderen veränderlich sein könnte. Um die Staboberfläche zu erzeugen und zugleich den Querschnitt exakt zu definieren, denke man sich eine kleine ebene, möglicherweise veränderliche Fläche q so längs einer gegebenen Raumkurve, der Stabachse, bewegt, daß der geometrische Schwerpunkt von q immer auf der Kurve bleibt, und q senkrecht auf ihr steht. Auf der Achse des Stabes zählen wir in einer beliebigen Richtung und von einem beliebigen Anfangspunkte aus die Abszisse x. Es wird vorausgesetzt, daß man von den Schwankungen der Temperatur u innerhalb eines Querschnittes absehen kann. Die Temperatur U der Umgebung kann in diesem Falle angesehen werden als eine Funktion von x und von t.

Man erhält die Differentialgleichung am einfachsten, wenn man den Wärmegewinn eines Elementes dieses Stabes von der unendlich kleinen Länge dx während des Zeitelementes dt berechnet. Ist k die Leitfähigkeit, die auch eine Funktion von x sein kann, so tritt durch den ersten Querschnitt dieses Elementes, dessen Fläche q gleichfalls eine Funktion von x sein kann, eine Wärmemenge ein, die durch

$$(1) \qquad - qk \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

ausgedrückt ist, und durch den letzten Querschnitt, der der Abszisse $x + dx$ entspricht, fließt die Wärmemenge von der Größe

$$(2) \qquad - \left(qk \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial qk \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} dx \right) dt,$$

in der Richtung der positiven x, also aus dem Element heraus.

Außerdem aber tritt noch durch die Oberfläche des Elementes gegen die Luft eine gewisse Wärmemenge aus, die nach den Voraussetzungen von § 34, IV. zu bestimmen ist. Bedeutet l den Umfang eines Querschnittes q, so ist $l\,dx$ bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung die Größe der Oberfläche, und wenn also h die äußere Leitfähigkeit bedeutet, so ist diese Wärmemenge

$$(3) \qquad hl\,(u - U)\,dx\,dt.$$

(1) gibt den Gewinn, (2) und (3) den Verlust an Wärme, und folglich ist der ganze Gewinn, der zur Temperaturerhöhung verwandt wird,

$$(4) \qquad \left[\frac{\partial qk \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} - hl\,(u - U) \right] dx\,dt.$$

Wenn nun c und ϱ spezifische Wärme und Dichtigkeit bedeuten, so ist diese Wärmemenge gleich

$$(5) \qquad c\varrho \frac{\partial u}{\partial t} q\,dx\,dt,$$

und es ergibt sich also die Differentialgleichung:

$$\text{V.} \qquad qc\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial qk \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} - hl\,(u - U).$$

Wollen wir auch den Fall berücksichtigen, daß im Innern des Leiters noch Wärme durch Umsatz von Energie erzeugt wird, so tritt, wenn A die in der Volumeneinheit und der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge ist, an Stelle von V. die allgemeinere Gleichung

$$\text{Va.} \qquad qc\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = Aq + \frac{\partial qk \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x} - hl\,(u - U).$$

Sechster Abschnitt.

Probleme der Wärmeleitung, die nur von einer Koordinate abhängig sind.

§ 37.

Die Temperatur ist nur von einer Koordinate abhängig. Unbegrenzter Körper.

Um die allgemeine Theorie auf besondere Fälle anzuwenden, machen wir die Annahme, daß die Koeffizienten k, ϱ, c (Leitfähigkeit, Dichtigkeit, spezifische Wärme) Konstanten sind, und wenden also zunächst die Differentialgleichung für die Temperatur in der Form § 33, Ic.:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

an, worin $a^2 = k / c \varrho$ eine positive Konstante ist. Wir wollen diese Gleichung aber zunächst noch weiter vereinfachen durch die Annahme, daß u nur von einer räumlichen Koordinate x abhänge, also die Differentialgleichung (1) die Form habe:

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Dies setzt voraus, daß wir uns den Leiter in der Richtung der yz-Ebene unendlich ausgedehnt vorstellen.

Aber auch die Differentialgleichung für die Wärmebewegung in einem Stabe läßt sich auf diese Form bringen, wenn wir die Temperatur der Umgebung U und die Leitfähigkeiten h und k und den Querschnitt q konstant annehmen. Es lautet nämlich unter diesen Voraussetzungen die Differentialgleichung § 36 V.:

$$(3) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 (u - U),$$

worin $b^2 = h l : c \varrho q$ eine zweite Konstante ist.

Setzt man aber

$$u - U = e^{-b^2 t} v,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{-b^2 t}\left(\frac{\partial v}{\partial t} - b^2 v\right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-b^2 t}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

so geht (3) in

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{4}$$

über, was mit (2) der Form nach übereinstimmt.

Wenn wir uns den Körper auch in der Richtung der x-Achse unendlich ausgedehnt denken, so fällt die Grenzbedingung weg, und die Funktion u ist durch (2) und durch den Anfangszustand völlig bestimmt.

Um das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung zu finden, wenden wir die Methode der partikularen Lösungen an.

Man sieht nämlich leicht, daß die Differentialgleichung (2) befriedigt ist, wenn für u eine der Funktionen

$$e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x, \quad e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x$$

gesetzt wird, worin λ eine willkürliche Konstante ist, die positiv vorausgesetzt werden kann. Jede dieser Lösungen können wir mit einem willkürlichen konstanten Faktor, der eine Funktion von λ sein kann, multiplizieren, und die Summe aller dieser Glieder nehmen. Wir erhalten so, wenn A und B willkürliche Funktionen von λ sind, eine allgemeine Lösung von (2):

$$u = \int_0^\infty (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)\, e^{-\lambda^2 a^2 t}\, d\lambda, \tag{5}$$

und nun sind diese Funktionen A, B so zu bestimmen, daß u für $t = 0$ in den gegebenen Anfangszustand $\Phi(x)$ übergeht.

Es ist aber nach dem Fourierschen Lehrsatze [Bd. I, § 18 (10)]

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \cos \lambda(\alpha - x)\, d\alpha, \tag{6}$$

und dies soll nach (5) gleich

$$\int_0^\infty (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)\, d\lambda \tag{7}$$

werden. Die Vergleichung von (6) und (7) ergibt aber

$$A = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \cos \alpha\lambda \, d\alpha, \quad B = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \sin \alpha\lambda \, d\alpha,$$

und wenn wir dies endlich in (5) einsetzen, so erhalten wir

$$(8) \qquad u = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \, d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \cos \lambda(\alpha - x) \, d\alpha,$$

wodurch u als Funktion von t und x dargestellt ist.

Dieser Ausdruck für u ist aber für viele Zwecke noch nicht geeignet, und wir formen ihn noch um. Solange nämlich $t > 0$ ist, ist es gestattet, in (8) die Reihenfolge der Integrationen umzukehren, und also zu setzen

$$(9) \qquad u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) \, d\alpha \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\alpha - x) \, d\lambda.$$

Hier läßt sich nun die Integration in bezug auf λ nach Formel Bd. I, § 64 (7) ausführen, wonach

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\alpha - x) \, d\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} \, e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}}$$

ist, und es ergibt sich also

$$(10) \qquad u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha) e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}} \, d\alpha.$$

Zu dieser Formel kann man auch dadurch gelangen, daß man bemerkt, daß die Funktion

$$(11) \qquad \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}}$$

für ein unbestimmtes α ein partikulares Integral der Differentialgleichung (2) ist.

In der Formel (10) führen wir nun eine neue Integrationsvariable β ein durch die Substitution

$$\alpha = x + 2\beta a\sqrt{t},$$

und erhalten:

$$(12) \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x + 2\beta a\sqrt{t}) e^{-\beta^2} \, d\beta,$$

woraus man wieder unmittelbar ersieht, daß u für $t = 0$ in $\Phi(x)$ übergeht.

Die Formel (12) hat vor (8) noch den Vorzug, daß (8) nur dann anwendbar ist, wenn das nach α genommene Integral einen Sinn hat; dazu ist notwendig, daß $\Phi(\alpha)$ im Unendlichen verschwindet. Das Integral (12), von dem man leicht auch direkt nachweist, daß es der Differentialgleichung (2) genügt, ist an diese Beschränkung nicht gebunden.

§ 38.

Begrenzter Körper.

Die Formel (10) oder (12) § 37 kann in manchen Fällen auch dazu dienen, das Wärmeproblem für einen begrenzten Körper zu lösen, dann nämlich, wenn es gelingt, die Funktion Φ über den Leiter hinaus so fortzusetzen, daß die Grenzbedingung identisch befriedigt wird. Es wird dann an Stelle des begrenzten Körpers ein unbegrenzter mit einem solchen Anfangszustande substituiert, daß die Wärmebewegung in einem Teil des unbegrenzten Körpers ebenso vor sich gehen würde, wie in dem begrenzten Körper.

Wenn wir z. B. annehmen, es sei der Körper bei $x = 0$ durch eine unendliche Ebene begrenzt, und im Innern des Leiters habe x positive Werte, so können wir für negative x die Funktion $\Phi(x)$ aus der Formel bestimmen:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x),$$

und erhalten dann, wie man aus der Symmetrie erkennt, einen Zustand, bei dem die Temperatur bei $x = 0$ beständig Null ist. Macht man diese Annahme in der Formel (10), § 37, so ergibt sich:

$$(1) \qquad u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \Phi(\alpha) \left(e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\alpha + x)^2}{4a^2 t}} \right) d\alpha,$$

oder in (12):

$$(2) \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \Phi(2\beta a\sqrt{t} + x) e^{-\beta^2} d\beta$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \Phi(2\beta a\sqrt{t} - x) e^{-\beta^2} d\beta.$$

Ist z. B. die Anfangstemperatur $\Phi(x)$ konstant, gleich C, und von Null verschieden, während die Oberflächentemperatur bei $x = 0$ auf Null gehalten wird, so ergibt die Gleichung (2)

$$u = \frac{C}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta = \frac{2C}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta, \tag{3}$$

oder wenn wir, wie im § 28 des ersten Bandes,

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-\beta^2} d\beta \tag{4}$$

setzen,

$$u = C\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{5}$$

Die Formel (4) zeigt, daß, wenn die Temperaturdifferenz zwischen einem Punkt im Innern des Leiters und der Oberfläche auf einen gegebenen Bruchteil von C herabgesunken sein soll, der Bruch $x/2a\sqrt{t}$ einen gegebenen, aus der Tafel für $\Theta(x)$ zu entnehmenden Wert haben muß. Die Zeit, die dazu erforderlich ist, ist also mit dem Quadrate der Tiefe proportional. Soll die Temperaturdifferenz z. B. auf die Hälfte herabgesunken sein, so muß

$$\frac{x}{2a\sqrt{t}} = 0{,}477\ \ldots,$$

also in roher Annäherung

$$t = \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

sein.

Nehmen wir beispielsweise zwei extreme Fälle, so haben wir (im Gramm-Centimeter-Sekunden-System)

für Silber . . . . $a = 1{,}850$,
für Wismut . . . . $a = 0{,}046$ [1]).

Beim Silber würde also schon nach $1/4$ Sekunde in der Tiefe von 1 cm die Temperatur auf die Hälfte gesunken sein, während in der Tiefe von 1 m dazu fast eine Stunde erforderlich wäre.

---

[1]) Diese Zahlen sind dem Lehrbuch der Physik von Riecke (Bd. 2, S. 451) entnommen.

Beim Wismut sind die entsprechenden Zeiten etwa acht Minuten und $1^1/_2$ Monate.

Wir heben noch die Folgerung hervor, von der wir später Gebrauch zu machen haben, daß die Funktion

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha \tag{6}$$

eine partikulare Lösung der Differentialgleichung § 37 (2) ist, was durch Rechnung leicht zu bestätigen ist.

§ 39.

Abkühlung durch Leitung nach außen.

Wir behalten die Voraussetzung bei, daß der Anfangszustand $\Phi(x)$ nur für positive x gegeben sei, nehmen aber an, daß der Leiter bei $x = 0$ mit einer Umgebung der Temperatur 0 in Berührung steht, gegen die er das äußere Leitvermögen h hat. Wir haben dann die Grenzbedingung § 34, IV. anzuwenden:

$$k\frac{\partial u}{\partial x} = h u, \qquad \text{für } x = 0. \tag{1}$$

Wir nehmen die Lösung nach § 37 (10) in der Form an:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \left(\Phi(\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} + \Phi(-\alpha)\, e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2t}}\right) d\alpha, \tag{2}$$

aus der wir durch Differentiation nach x erhalten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tag{3}$$

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty \left(\Phi(\alpha)\frac{\alpha - x}{2a^2t}\, e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} - \Phi(-\alpha)\frac{\alpha+x}{2a^2t}\, e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2t}}\right) d\alpha,$$

und für $x = 0$:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty [\Phi(\alpha) + \Phi(-\alpha)]\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}}\, d\alpha, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^\infty [\Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha)]\, e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}}\, \frac{\alpha\, d\alpha}{2a^2t}. \tag{5}$$

Den letzteren Ausdruck formen wir durch partielle Integration um. Es ergibt sich nämlich durch Differentiation nach α

$$\frac{d}{d\alpha}\left\{[\Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha)]\,e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}}\right\} = \tag{6}$$
$$[\Phi'(\alpha) + \Phi'(-\alpha)]\,e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}} - [\Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha)]\,e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}}\,\frac{\alpha}{2a^2t},$$

worin $\Phi'(\alpha)$ die Derivierte von $\Phi(\alpha)$ ist. Wir bestimmen nun $\Phi(-x)$ zunächst so, daß $\Phi(x)$ bei $x = 0$ stetig ist, d. h. so, daß

$$\Phi(0) = \Phi(-0), \tag{7}$$

und dadurch ergibt sich durch Integration von (6) zwischen den Grenzen 0 und ∞

$$\int_0^\infty [\Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha)]\,e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}}\,\frac{\alpha\,d\alpha}{2a^2t} = \int_0^\infty [\Phi'(\alpha) + \Phi'(-\alpha)]\,e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}}\,d\alpha,$$

also für $x = 0$ nach (5):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty [\Phi'(\alpha) + \Phi'(-\alpha)]\,e^{-\frac{\alpha^2}{4a^2t}}\,d\alpha. \tag{8}$$

Aus (4) und (8) folgt nun, daß die Bedingung (1) befriedigt ist, wenn $\Phi(-\alpha)$ aus der Gleichung

$$\Phi'(\alpha) + \Phi'(-\alpha) = \frac{h}{k}\,[\Phi(\alpha) + \Phi(-\alpha)] \tag{9}$$

bestimmt wird. Dies ist eine lineare, aber nicht homogene Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $\Phi(-\alpha)$:

$$\frac{d\Phi(-\alpha)}{d\alpha} + \frac{h}{k}\Phi(-\alpha) = \Phi'(\alpha) - \frac{h}{k}\Phi(\alpha), \tag{10}$$

die sich nach Bd. I, § 65 leicht integrieren läßt. Die Konstante wird aus der Bedingung (7) bestimmt, und so ergibt sich:

$$\Phi(-\alpha) = e^{-\frac{h}{k}\alpha}\int_0^\alpha e^{\frac{h}{k}x}\left(\Phi'(x) - \frac{h}{k}\Phi(x)\right)dx + \Phi(0)\,e^{-\frac{h}{k}\alpha}, \tag{11}$$

was sich durch die partielle Integration

$$\int e^{\frac{h}{k}x}\,\Phi'(x)\,dx = e^{\frac{h}{k}x}\,\Phi(x) - \frac{h}{k}\int e^{\frac{h}{k}x}\,\Phi(x)\,dx$$

auf die Form bringen läßt:

$$\Phi(-\alpha) = \Phi(\alpha) - 2\frac{h}{k}\,e^{-\frac{h}{k}\alpha}\int_0^\alpha \Phi(x)\,e^{\frac{h}{k}x}\,dx. \tag{12}$$

Diese Form verdient vor der Form (11) den Vorzug, weil sie nicht mehr den Differentialquotienten der Funktion $\Phi(x)$ enthält.

Um ein Beispiel durchzuführen, nehmen wir auch hier $\Phi(x) = C$, d. h. konstant an. Dann erhält man aus (12)

$$\Phi(-\alpha) = C(2e^{-\frac{h}{k}\alpha} - 1), \tag{13}$$

und wenn man diesen Ausdruck in (2) einsetzt, so folgt

$$u = \frac{C}{2a\sqrt{\pi t}}\left\{\int_0^\infty e^{-\frac{(\alpha - x)^2}{4a^2 t}} d\alpha - \int_0^\infty e^{-\frac{(\alpha + x)^2}{4a^2 t}} d\alpha \right. \tag{14}$$

$$\left. + 2\int_0^\infty e^{-\frac{(\alpha + x)^2}{4a^2 t} - \frac{h}{k}\alpha} d\alpha\right\}.$$

Den Exponenten des letzten Integrals in (14) ergänzen wir zu einem Quadrat, indem wir setzen:

$$\frac{(\alpha + x)^2}{4a^2 t} + \frac{h}{k}\alpha = \frac{1}{4a^2 t}\left(\alpha + x + \frac{2a^2 h}{k}t\right)^2 - \frac{a^2 h^2}{k^2}t - \frac{h}{k}x,$$

und dann läßt sich alles auf die Funktion $\Theta(x)$ [§ 38 (4)] zurückführen. Wir substituieren in den drei Integralen der Formel (14) der Reihe nach

$$\alpha = x + 2a\sqrt{t}\,\beta,$$
$$\alpha = -x + 2a\sqrt{t}\,\beta,$$
$$\alpha = -x - \frac{2a^2 h}{k}t + 2a\sqrt{t}\,\beta,$$

wodurch sich ergibt:

$$u = \frac{C}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta - \frac{C}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta$$

$$+ \frac{2C}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{a^2 h^2}{k^2}t + \frac{h}{k}x} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \frac{ah}{k}\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta,$$

oder mit Benutzung der Formeln (Bd. I, § 28):

$$\int_x^\infty e^{-\beta^2} d\beta = \int_0^\infty e^{-\beta^2} d\beta - \int_0^x e^{-\beta^2} d\beta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,[1 - \Theta(x)],$$

$$\Theta(x) = -\Theta(-x), \quad \Theta(\infty) = 1:$$

$$(15)\quad u = C\Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + Ce^{\frac{a^2h^2}{k^2}t + \frac{h}{k}x}\left[1 - \Theta\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \frac{ah}{k}\sqrt{t}\right)\right].$$

Setzt man hierin $x = 0$, so erhält man die Oberflächentemperatur $\bar{u}$ als Funktion der Zeit:

$$(16)\qquad \bar{u} = Ce^{\frac{a^2h^2}{k^2}t}\left[1 - \Theta\left(\frac{ah}{k}\sqrt{t}\right)\right].$$

Wenn seit dem Anfangszustand eine hinlängliche Zeit verflossen ist, so kann man für die Funktion Θ die in Bd. I, § 28 (14) gegebene Entwickelung

$$1 - \Theta(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\sum\frac{(-1)^n\Pi(2n)}{\Pi(n)\,(2z)^{2n+1}}$$

anwenden und erhält

$$(17)\qquad \bar{u} = C\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum\frac{(-1)^n\Pi(2n)}{\Pi(n)}\left(\frac{k}{2ah\sqrt{t}}\right)^{2n+1},$$

und wenn der Anfangszustand in einer unendlich fernen Vergangenheit liegt, kann man sich hier auf das erste Glied beschränken, und erhält

$$(18)\qquad \bar{u} = \frac{kC}{ah\sqrt{\pi t}}$$

als Ausdruck für die Oberflächentemperatur.

§ 40.

Berührung heterogener Körper.

Dieselbe Methode kann auch angewandt werden auf den Fall, daß zwei sonst unbegrenzte heterogene Leiter 1, 2 in der Ebene $x = 0$ aneinander grenzen. Der Einfachheit halber soll hier nur der Fall berücksichtigt werden, wo die Temperatur an der Grenze sich momentan ausgleicht, also die Grenzbedingung § 34 IIIa:

$$(1)\qquad u_1 = u_2, \qquad k_1\frac{\partial u_1}{\partial x} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial x}$$

gilt.

Im Körper 1 möge x negativ sein, im Körper 2 positiv. Die Anfangstemperaturen C_1, C_2 sollen als konstant vorausgesetzt werden. Hier müssen die Funktionen u_1, u_2 jede für sich bestimmt werden. Von den Funktionen $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, die die Anfangswerte von u_1 und u_2 darstellen, ist die erste nur für negative, die zweite für positive x gegeben. Denken wir uns für den Augenblick den ganzen Raum nur mit der Substanz 1 erfüllt, so können wir den Versuch machen, einen Anfangszustand $\Phi_1(x)$ im ganzen Raum so anzunehmen, daß u_1 für negative x so ausfällt, wie es in dem gestellten Problem wirklich der Fall ist, und können, wenn $\Phi_1(x)$ bekannt ist, u_1 nach § 37 bestimmen. Ebenso denken wir uns $\Phi_2(x)$ für den ganzen Raum bestimmt. Diese Funktionen $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ sind aus den Grenzbedingungen (1) zu bestimmen.

Wir wollen versuchen, diesen Forderungen durch die Annahme

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= C_1, \quad x < 0; \quad \Phi_1(x) = C_1', \quad x > 0, \\ \Phi_2(x) &= C_2', \quad x < 0; \quad \Phi_2(x) = C_2, \quad x > 0, \end{aligned} \tag{2}$$

zu genügen, worin C_1, C_1', C_2, C_2' Konstanten sein sollen, und erhalten aus § 37 (12)

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}} e^{-\beta^2} d\beta + \frac{C_1'}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta \\ &= \frac{C_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta + \frac{C_1'}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\beta^2} d\beta, \end{aligned}$$

und mit Benutzung des Funktionszeichens $\Theta(x)$ [§ 38 (4)] und der Relation $\Theta(x) = -\Theta(-x)$:

$$u_1 = \frac{1}{2}(C_1 + C_1') + \frac{1}{2}(C_1 - C_1')\,\Theta\left(\frac{-x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \tag{3}$$

und ebenso

$$u_2 = \frac{1}{2}(C_2 + C_2') + \frac{1}{2}(C_2 - C_2')\,\Theta\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right). \tag{4}$$

Nun ergeben die Grenzbedingungen (1) für $x = 0$, wenn man eine neue Konstante C_0 einführt, deren Bedeutung die gemeinschaftliche Temperatur der beiden Leiter an ihrer Berührungsfläche ist,

$$C_1' + C_1 = C_2' + C_2 = 2\,C_0. \tag{5}$$

$$\frac{k_1}{a_1}(C_1' - C_1) + \frac{k_2}{a_2}(C_2' - C_2) = 0. \tag{6}$$

Es ist aber nach der Definition von a^2 [§ 33 (7)]

$$\frac{k_1}{a_1} = \sqrt{k_1 c_1 \varrho_1}, \qquad \frac{k_2}{a_2} = \sqrt{k_2 c_2 \varrho_2},$$

und es ergibt also die Gleichung (6) mit Benutzung von (5)

$$C_0 = \frac{\sqrt{k_1 c_1 \varrho_1}\, C_1 + \sqrt{k_2 c_2 \varrho_2}\, C_2}{\sqrt{k_1 c_1 \varrho_1} + \sqrt{k_2 c_2 \varrho_2}}, \tag{7}$$

und aus (3) und (4) erhalten wir noch

$$\begin{aligned} u_1 &= C_0 - (C_0 - C_1)\, \Theta\left(\frac{-x}{2 a_1 \sqrt{t}}\right) \\ u_2 &= C_0 - (C_0 - C_2)\, \Theta\left(\frac{x}{2 a_2 \sqrt{t}}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Hierdurch sind die Grenzbedingungen (1) befriedigt, und für den Anfang $t = 0$ ergibt sich $u_1 = C_1$ für negative x und $u_2 = C_2$ für positive x. Diese Anfangstemperaturen C_1 und C_2 können beliebig gegeben sein.

Nach unendlich langer Zeit haben beide Körper in ihrer ganzen Ausdehnung die Temperatur C_0 angenommen. An der Berührungsstelle selbst stellt sich diese mittlere Temperatur momentan her.

Man kann auf ähnliche Weise das Problem unter der allgemeineren Grenzbedingung § 34, III behandeln:

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = - h(u_1 - u_2) \text{ für } x = 0; \tag{9}$$

man setzt dann die den Anfangszustand darstellenden Funktionen $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ in der folgenden Weise fort:

$$\begin{aligned} &\Phi_1(x) = C_1, &&\Phi_2(x) = C_2' + C_2'' e^{m_2 x} &&\text{für } x < 0; \\ &\Phi_1(x) = C_1' + C_1'' e^{m_1 x}, &&\Phi_2(x) = C_2 &&\text{für } x > 0, \end{aligned}$$

worin C_1', C_1'', C_2', C_2'', m_1, m_2 Konstanten sind, für deren Bestimmung man aus (9) gewisse lineare Gleichungen erhält. Wir wollen nur die Endformeln angeben, von denen man nachträglich leicht beweist, daß sie allen notwendigen und hinreichenden Bedingungen genügen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_1 &= C_0 - (C_0 - C_1)\, \Theta\left(\frac{-x}{2 a_1 \sqrt{t}}\right) \\ &\quad - (C_0 - C_1)\, e^{-\frac{m x}{a_1} + m^2 t}\left[1 - \Theta\left(\frac{-x}{2 a_1 \sqrt{t}} + m\sqrt{t}\right)\right], \\ u_2 &= C_0 - (C_0 - C_2)\, \Theta\left(\frac{x}{2 a_2 \sqrt{t}}\right) \\ &\quad - (C_0 - C_2)\, e^{-\frac{m x}{a_2} + m^2 t}\left[1 - \Theta\left(\frac{x}{2 a_2 \sqrt{t}} + m\sqrt{t}\right)\right], \end{aligned} \tag{10}$$

worin C_0 durch (7) bestimmt ist und

$$(11) \qquad m = m_1 a_1 = m_2 a_2 = \frac{h}{\sqrt{k_1 c_1 \varrho_1}} + \frac{h}{\sqrt{k_2 c_2 \varrho_2}}$$

zu setzen ist. Für $x = 0$ erhalten wir hieraus:

$$(12) \qquad \begin{aligned} u_1^0 &= C_0 - (C_0 - C_1) e^{m^2 t} [1 - \Theta(m\sqrt{t})], \\ u_2^0 &= C_0 - (C_0 - C_2) e^{m^2 t} [1 - \Theta(m\sqrt{t})], \end{aligned}$$

also:

$$(13) \qquad \begin{aligned} (u_1^0 - u_2^0) &= (C_1 - C_2) e^{m^2 t} [1 - \Theta(m\sqrt{t})] \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (C_1 - C_2) \int_0^\infty e^{-\alpha^2 - 2\alpha m \sqrt{t}} \, d\alpha. \end{aligned}$$

Es bleibt also hier die Unstetigkeit an der Stelle $x = 0$ bestehen, sie nimmt aber mit der Zeit allmählich ab und nähert sich der Grenze Null. Der Endzustand für $t = \infty$ ist

$$u_1 = u_2 = C_0\,{}^{1)}.$$

§ 41.

Die Temperatur der Oberfläche ist eine Funktion der Zeit.

Wir betrachten jetzt wieder einen durch die Ebene $x = 0$ begrenzten Körper und nehmen an, die Temperatur der Oberfläche sei eine gegebene Funktion der Zeit, $\varphi(t)$. Außerdem sei die Anfangstemperatur eine gegebene Funktion $\Phi(x)$ von x. Es ist also eine Funktion u zu finden, die für positive t und x der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

genügt, und den beiden Nebenbedingungen

$$(2) \qquad u = \Phi(x) \quad \text{für} \quad t = 0,$$

$$(3) \qquad u = \varphi(t) \quad \text{für} \quad x = 0.$$

Die allgemeine Aufgabe läßt sich zunächst in zwei einfachere zerlegen: Nehmen wir an, es seien zwei Funktionen u', u'' gefunden, die beide der Differentialgleichung (1) genügen, aber den Nebenbedingungen

---

[1]) H. Weber, Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Mai 1871, und Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1893.

$$\begin{array}{ll} u' = 0 \\ u'' = \Phi(x) \end{array} \text{ für } t = 0, \qquad \begin{array}{ll} u' = \varphi(t) \\ u'' = 0 \end{array} \text{ für } x = 0,$$

so genügt offenbar $u = u' + u''$ den Bedingungen (1), (2), (3), und die Aufgabe ist gelöst. Die Funktion u'' ist aber bereits im § 38 bestimmt, und es kommt also nur noch auf u' an. Hierdurch ist die allgemeine Aufgabe auf den speziellen Fall zurückgeführt, daß die Funktion $\Phi(x) = 0$ ist, und wir nehmen also die Nebenbedingungen für u jetzt in der Form an:

(4) $$u = 0 \qquad \text{für } t = 0 \qquad x > 0,$$

(5) $$u = \varphi(t) \qquad \text{für } x = 0 \qquad t > 0.$$

Wir betrachten die Funktion u als Grenzfall einer anderen Funktion, die wir erhalten, wenn wir die Oberflächentemperatur nicht als stetige Funktion von t, sondern in Zeitintervallen konstant und also von einem Intervall zum nächsten sich sprungweise ändernd annehmen.

Es seien also

(6) $$t = 0, t_1, t_2 \ldots, t_\nu, \ldots$$

eine Reihe aufeinander folgender Zeitpunkte, und in dem Zeitintervall

(7) $$\tau_\nu = t_{\nu+1} - t_\nu$$

soll die Funktion $\varphi(t)$ den konstanten Wert

(8) $$\varphi(t_\nu) = c_\nu$$

haben.

Auch diese Aufgabe zerlegen wir noch weiter.

Es werde eine Funktion u_ν durch folgende Bedingungen bestimmt. Es soll u_ν der Differentialgleichung (1) mit der Nebenbedingung (4) genügen, und es soll

$$\left.\begin{array}{lll} (9) & u_\nu = 0 & \text{für } t < t_\nu \text{ und } t > t_{\nu+1} \\ (10) & u_\nu = c_\nu & \text{für } t_\nu < t < t_{\nu+1} \end{array}\right\} \text{für } x = 0$$

sein.

Sind die Funktionen u_ν diesen Bedingungen gemäß für

$$\nu = 0, 1, \ldots n$$

bestimmt, so ist

(11) $$u = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$$

eine Funktion, die, solange $t < t_n$ ist, den Bedingungen (1), (4), (5) mit der Bestimmung (8) genügt.

Denn ist $x = 0$ und $t_\nu < t < t_{\nu+1}$, so sind alle Glieder der Reihe (11), mit Ausnahme von u_ν, gleich Null [nach (9)], und u_ν ist $= c_\nu$ [nach (10)].

Um nun u_ν zu finden, definieren wir eine Funktion $\chi(x, t)$ durch die Bestimmung

$$\begin{aligned}(12)\qquad \chi(x, t) &= 0, \qquad t \leqq 0,\\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha, \qquad t > 0.\end{aligned}$$

Für jedes konstante t ist $\chi(x, t)$ eine **stetige Funktion** von x, und für jedes positive x ist es auch eine stetige Funktion von t, dagegen ist $\chi(0, t)$ eine unstetige Funktion von t; denn sie geht beim Durchgang durch $t = 0$ plötzlich von 0 zu 1.

Diese Funktion genügt im Innern der Gebiete $x > 0$, $t > 0$ und $x > 0$, $t < 0$ der Differentialgleichung (1) (nach § 38).

Daraus ergibt sich dann, daß auch

$$(13)\qquad u_\nu = c_\nu[\chi(x, t - t_\nu) - \chi(x, t - t_{\nu+1})]$$

erstens der Differentialgleichung (1) genügt, zweitens (für $t = 0$) [wegen (12)] der Bedingung (4), endlich aber auch für $x = 0$ den Bedingungen (9), (10). Denn ist $t < t_\nu$, so sind für $x = 0$ beide χ-Funktionen in (13) gleich 0, ist $t > t_{\nu+1}$, so sind sie beide $= 1$ und liegt t zwischen t_ν und $t_{\nu+1}$, so ist die erste $= 1$, die zweite $= 0$. Daraus erhalten wir nach (8) und (11)

$$(14)\qquad u = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(t_\nu)[\chi(x, t - t_\nu) - \chi(x, t - t_{\nu+1})].$$

Wollen wir daraus die Funktion u für den Fall ableiten, daß die Änderungen an der Oberfläche stetig vor sich gehen, so müssen wir die Intervalle τ_ν unendlich klein und ihre Zahl unendlich groß annehmen. Dann wird

$$\begin{aligned}\frac{\chi(x, t - t_\nu) - \chi(x, t - t_{\nu+1})}{\tau_\nu} &= \frac{\chi(x, t - t_{\nu+1} + \tau_\nu) - \chi(x, t - t_{\nu+1})}{\tau_\nu}\\ &= \frac{\partial \chi(x, t - t_{\nu+1})}{\partial t},\end{aligned}$$

und die Summe (14) wird ein Integral

$$u = \int\limits_0^{t_n} \varphi(\vartheta) \frac{\partial \chi(x, t - \vartheta)}{\partial t}\, d\vartheta,$$

wenn ϑ die Integrationsvariable ist.

Diese Formel gilt, solange $t < t_n$ ist. Bedenkt man aber noch, daß $\chi(x, t - \vartheta)$ gleich Null ist, wenn $\vartheta > t$ ist, so kann man den Teil des Integrals von $\vartheta = t$ bis $\vartheta = t_n$ weglassen, und erhält

$$(15) \qquad u = \int_0^t \varphi(\vartheta) \frac{\partial \chi(x, t - \vartheta)}{\partial t} \, d\vartheta.$$

Es ist aber nach (12)

$$\frac{\partial \chi(x, t - \vartheta)}{\partial t} = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}\,\sqrt{(t - \vartheta)^3}} \, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t - \vartheta)}},$$

und demnach ergibt sich aus (15)

$$(16) \qquad u = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\vartheta) e^{\frac{-x^2}{4a^2(t-\vartheta)}} (t - \vartheta)^{-\frac{3}{2}} \, d\vartheta.$$

§ 42.

Verifikation des Resultates.

Um die Grenzübergänge, durch die wir zu der Formel (16) gelangt sind, alle streng zu rechtfertigen, wären weitläufige Betrachtungen notwendig, die wir umgehen können, wenn wir nachträglich zeigen, daß die gefundene Formel allen an die Funktion u gestellten Forderungen, nämlich der Differentialgleichung (1) und den Nebenbedingungen (4), (5) in § 41 genügt, durch die ja, wie wir wissen, die Funktion u eindeutig bestimmt ist.

Um die dazu nötige Rechnung übersichtlich zu gestalten, setzen wir zur Abkürzung für den Augenblick

$$(1) \qquad E = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \varphi(\vartheta) e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\vartheta)}},$$

$$(2) \qquad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{x^2 E}{4a^2(t - \vartheta)^2},$$

$$(3) \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{-xE}{2a^2(t - \vartheta)}.$$

Bei der Differentiation nach t in § 41 (16) fällt das von der Differentiation nach der oberen Grenze herrührende Glied heraus, weil $E(t - \vartheta)^{-\frac{3}{2}}$ für $\vartheta = t$ verschwindet. So ergibt sich nach (16)

$$(4)\qquad u = x\int_0^t E(t-\vartheta)^{-\frac{3}{2}}\,d\vartheta,$$

$$(5)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = x\int_0^t E(t-\vartheta)^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{x^2}{4a^2(t-\vartheta)} - \frac{3}{2}\right)d\vartheta$$

und durch zweimalige Anwendung von (3)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \int_0^t (t-\vartheta)^{-\frac{3}{2}}\left(E + x\frac{\partial E}{\partial x}\right)d\vartheta\\
&= \int_0^t E(t-\vartheta)^{-\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{x^2}{2a^2(t-\vartheta)}\right)d\vartheta
\end{aligned}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \int_0^t (t-\vartheta)^{-\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial E}{\partial x}\left(1-\frac{x^2}{2a^2(t-\vartheta)}\right) - \frac{xE}{a^2(t-\vartheta)}\right]d\vartheta\\
&= \frac{x}{a^2}\int_0^t (t-\vartheta)^{-\frac{5}{2}} E\left(\frac{x^2}{4a^2(t-\vartheta)} - \frac{3}{2}\right)d\vartheta,
\end{aligned}$$

und die Vergleichung von (5) und (6) zeigt, daß die Differentialgleichung § 41 (1) durch u befriedigt wird.

Um auch die Erfüllung der Nebenbedingungen nachzuweisen, geben wir dem Ausdruck u noch eine andere Gestalt, die auch an sich von Interesse ist, indem wir in dem Integral eine neue Variable substituieren. Wir setzen nämlich

$$\alpha = \frac{x}{2a\sqrt{t-\vartheta}},\qquad t-\vartheta = \frac{x^2}{4a^2\alpha^2},$$

$$d\alpha = \frac{x}{4a}(t-\vartheta)^{-\frac{3}{2}}\,d\vartheta$$

und finden

$$(7)\qquad u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4a^2\alpha^2}\right)e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

woraus man unmittelbar sieht, daß die Bedingungen (4), (5) des vorigen Paragraphen befriedigt sind.

§ 43.

Die Oberflächentemperatur ist eine periodische Funktion der Zeit. Anwendung auf die Erdtemperatur.

Man kann die Aufgabe, mit der sich die beiden letzten Paragraphen beschäftigen, noch auf eine zweite Art angreifen, die sich besonders dann empfiehlt, wenn die Temperatur der Oberfläche eine periodische Funktion der Zeit ist.

Im § 37 haben wir die partikularen Integrale

$$e^{-\alpha^2 a^2 t}\cos\alpha x,\qquad e^{-\alpha^2 a^2 t}\sin\alpha x \tag{1}$$

zum Ausgangspunkt genommen, und diese lassen sich vereinigen zu der einen Formel

$$e^{-\alpha^2 a^2 t - i\alpha x}. \tag{2}$$

Nun genügt dieser Ausdruck der Differentialgleichung § 37 (1) auch dann noch, wenn der Faktor von t im Exponenten imaginär angenommen wird, wodurch (2) in eine periodische Funktion von t übergeht. Setzen wir also

$$\alpha^2 a^2 = -in,\qquad \alpha = (1-i)\sqrt{\frac{n}{2a^2}},$$

so erhalten wir als partikulares Integral

$$e^{i\left(nt - x\sqrt{\frac{n}{2a^2}}\right)}\, e^{-x\sqrt{\frac{n}{2a^2}}}.$$

Nehmen wir hiervon den reellen Teil, und fügen noch einen konstanten Faktor hinzu, so erhalten wir ein partikulares Integral der Wärmegleichung in der Form

$$u = Ce^{-x\sqrt{\frac{n}{2a^2}}}\cos\left(nt - x\sqrt{\frac{n}{2a^2}}\right). \tag{3}$$

Die Temperatur der Oberfläche $x = 0$ ist hier eine periodische Funktion von t:

$$\varphi(t) = C\cos nt, \tag{4}$$

bei der die mittlere Temperatur $= 0$ ist, während $\pm C$ das Maximum und das Minimum sind. Die Periode ist

$$T = \frac{2\pi}{n}. \tag{5}$$

Wir können hier auch den Cosinus durch den Sinus ersetzen was mit einer Verlegung des Anfangspunktes der Zeit gleichbedeutend ist, und können mehrere verschiedene Werte von n

und C nehmen. Die so gewonnenen verschiedenen Ausdrücke von u kann man addieren und erhält so Lösungen für kompliziertere periodische Temperaturfunktionen an der Oberfläche. Man kann sogar durch Anwendung der Fourierschen Reihe einen willkürlichen Anfangszustand berücksichtigen oder mehrere verschiedenartige Perioden superponieren.

Wir können diese Formeln näherungsweise auf die Temperatur der Erde anwenden, wenn wir ein nicht zu großes Stück der Erdoberfläche als eben und die Temperatur dieses Oberflächenstückes vom Ort unabhängig betrachten. Es ist dann x die Tiefe unter der Oberfläche und die Oberflächentemperatur ist im Laufe eines Tages und eines Jahres periodischen Veränderungen unterworfen. Es kann dann T entweder die Jahreslänge oder die Tageslänge bedeuten.

Die Formel (3) zeigt, daß die Temperatur u in jeder Tiefe dieselbe Periode T hat, daß aber die Amplitude, d. h. der Unterschied zwischen dem Maximum und dem Minimum nach der Tiefe hin abnimmt, und zwar im geometrischen Verhältnis, wenn die Tiefe im arithmetischen Verhältnis wächst. Es werden also in einer gewissen Tiefe, die von der Leitfähigkeit und von der Länge der Periode abhängig ist, die Temperaturschwankungen nicht mehr merklich sein.

Ein Maximum der Funktion u findet statt, wenn

$$t = \frac{x}{\sqrt{2a^2 n}} + \frac{2m\pi}{n}$$

und m eine ganze Zahl ist, und man sieht also, daß sich die Maxima mit der Geschwindigkeit

$$\sqrt{2a^2 n} = 2a\sqrt{\frac{\pi}{T}}$$

in die Tiefe fortpflanzen, dabei aber an Stärke verlieren. Diese Fortpflanzungsgeschwindigkeit wächst, wenn die Periode abnimmt. Die Tagesmaxima pflanzen sich also schneller fort als die Jahresmaxima [1]).

[1]) W. Thomson, On the reduction of observations of underground temperature. On the secular cooling of the earth. Mathem. and phys. papers, Vol. III.

§ 44.

Vergleichung der beiden Lösungen.

Wir haben bisher auf den Anfangszustand keine Rücksicht genommen. Die Formel (3) § 43 ist einem ganz bestimmten Anfangszustand

$$(1) \qquad u_0 = Ce^{-\sqrt{\frac{n}{2a^2}}x} \cos \sqrt{\frac{n}{2a^2}}\, x$$

angepaßt. Wollen wir das Problem für einen beliebigen Anfangszustand lösen, so haben wir noch eine Temperaturverteilung hinzuzufügen, bei der der Anfangszustand beliebig und die Temperatur an der Oberfläche $= 0$ ist, die wir nach § 38 finden können.

Wir erhalten so nach § 43 (3) und § 38 (1) eine Temperaturverteilung, wenn wir $C = 1$ setzen:

$$(2) \qquad u = e^{-\sqrt{\frac{n}{2a^2}}x} \cos\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2a^2}}\,x\right) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \Phi(\alpha)\left(e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(\alpha+x)^2}{4a^2t}}\right) d\alpha,$$

die der Oberflächenbedingung

$$(3) \qquad \overline{u} = \cos nt,$$

und der Anfangsbedingung

$$(4) \qquad u_0 = e^{-\sqrt{\frac{n}{2a^2}}x} \cos \sqrt{\frac{n}{2a^2}}\, x + \Phi(x)$$

genügt, worin $\Phi(x)$ eine willkürliche Funktion ist.

Man sieht hieraus, daß der Einfluß des Anfangszustandes mit der Zeit, freilich sehr langsam, verschwindet, und daß die Wärmebewegung sich mehr und mehr einem rein periodischen Vorgang nähert, der in (3) des vorigen Paragraphen dargestellt ist. Soll die Anfangstemperatur $= 0$ sein, so haben wir

$$(5) \qquad \Phi(x) = -e^{-\sqrt{\frac{n}{2a^2}}x} \cos \sqrt{\frac{n}{2a^2}}\, x$$

zu setzen. Für diese Annahme läßt sich aber die Funktion u auch nach der Methode der §§ 41, 42 bestimmen, und es ist von Interesse, beide Resultate zu vergleichen. Wir erhalten nach der Formel (2), § 42, wenn wir darin nach § 43 (4) $\varphi(t) = \cos nt$ setzen:

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} \cos n\left(t - \frac{x^2}{4a^2\alpha^2}\right) e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

oder

$$(6)\qquad \begin{aligned} u = {} & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos nt \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} \cos \frac{n x^2}{4a^2\alpha^2}\, d\alpha \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin nt \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} \sin \frac{n x^2}{4a^2\alpha^2}\, d\alpha. \end{aligned}$$

Hier besteht jedes Glied aus einem periodischen Faktor $\cos nt$, $\sin nt$, und aus einem nicht periodischen Faktor, der sich mit wachsender Zeit einer bestimmten von t unabhängigen Grenze nähert. Diese findet man, wenn man in den Integralen die untere Grenze gleich Null setzt, und so erhält man den rein periodischen Zustand, der sich einstellt, wenn der Anfangszustand nicht mehr merklich ist:

$$(7)\qquad \begin{aligned} u = {} & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos nt \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2} \cos \frac{n x^2}{4a^2\alpha^2}\, d\alpha \\ & + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin nt \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2} \sin \frac{n x^2}{4a^2\alpha^2}\, d\alpha. \end{aligned}$$

Dies muß aber nach der Formel (2) mit

$$e^{-\sqrt{\frac{n}{2a^2}}x} \cos\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2a^2}}\, x\right)$$

übereinstimmen, und man erhält daraus zwei bestimmte Integrale, nämlich, wenn man zur Abkürzung

$$p^2 = \frac{n x^2}{2a^2}$$

setzt:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2} \cos \frac{p^2}{2\alpha^2}\, d\alpha &= e^{-p} \cos p, \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha^2} \sin \frac{p^2}{2\alpha^2}\, d\alpha &= e^{-p} \sin p. \end{aligned}$$

Diese Integrale sind in Bd. I, § 12 (8) gegeben.

§ 45.

Begrenzung durch zwei parallele Ebenen.

Wir gehen zu einem Körper über, der von zwei parallelen Ebenen $x = 0$ und $x = c$ begrenzt wird. Die Temperatur soll nur von der x-Koordinate abhängen, also in allen Punkten einer zur x-Achse rechtwinkligen Ebene dieselbe sein.

Die Aufgabe lautet jetzt:

Die Funktion u so zu bestimmen, daß sie die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

erfüllt und den Nebenbedingungen

$$u = f(x) \quad \text{für } t = 0, \tag{2}$$

$$u = \varphi(t) \quad \text{,, } x = 0, \tag{3}$$

$$u = \psi(t) \quad \text{,, } x = c. \tag{4}$$

genügt.

Wir lösen die Aufgabe durch Zerlegung in mehrere einfachere, indem wir setzen

$$u = u_1 + u_2 + u_3.$$

u_1, u_2 und u_3 sollen der partiellen Differentialgleichung (1) genügen. Die Nebenbedingungen stellen wir folgendermaßen:

$$\begin{array}{llll} \text{für } t = 0 & u_1 = f(x), & u_2 = 0, & u_3 = 0, \\ \text{,, } x = 0 & u_1 = 0, & u_2 = \varphi(t), & u_3 = 0, \\ \text{,, } x = c & u_1 = 0, & u_2 = 0 & u_3 = \psi(t). \end{array}$$

Die Funktionen u_2 und u_3 sind nicht wesentlich voneinander verschieden. Haben wir die Funktion u_2 allgemein gefunden, so ist darin nur $c - x$ statt x und $\psi(t)$ statt $\varphi(t)$ zu setzen, um u_3 zu erlangen.

§ 46.

Gegebener Anfangszustand. Oberflächentemperatur Null.

Aufgabe. Die Funktion u so zu bestimmen, daß sie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

genüge und die Bedingungen erfülle

(2) $$u = f(x) \quad \text{für } t = 0,$$
(3) $$u = 0 \quad \text{„ } x = 0,$$
(4) $$u = 0 \quad \text{„ } x = c.$$

Eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung (1) ist (§ 37)

$$e^{-a^2\alpha^2 t} \sin \alpha x.$$

Diese befriedigt zugleich die Bedingung (3). Damit auch die Gleichung (4) erfüllt werde, haben wir, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, $\alpha c = n\pi$ zu setzen. Multiplizieren wir dann mit einer vorläufig noch unbestimmten Konstanten A_n, setzen der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ und summieren, so erhalten wir die allgemeine Lösung

(5) $$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{c^2}} \sin \frac{n\pi}{c} x.$$

Die Koeffizienten müssen noch so bestimmt werden, daß die Bedingung (2) erfüllt werde. Zu dem Ende entwickeln wir $f(x)$ nach Bd. I, § 35 in die unendliche Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{c}$$

$$A_n = \frac{2}{c} \int_0^c f(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{c} \, d\alpha.$$

Wir haben also die Lösung

(I) $$u = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{c} \int_0^c f(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{c} \, d\alpha.$$

Die Reihe konvergiert sehr rasch, weil mit wachsendem n die Exponentialgröße rasch abnimmt. Mit zunehmender Zeit wird u immer kleiner und für $t = \infty$ haben wir $u = 0$. Dann ist also die Temperatur konstant und übereinstimmend mit der Temperatur der Oberflächen.

§ 47.

Anfangstemperatur Null. Konstante Oberflächentemperaturen.

Aufgabe. Die Funktion u so zu bestimmen, daß sie der partiellen Differentialgleichung

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Genüge leiste und den Bedingungen

(2) $$u = 0 \quad \text{für } t = 0,$$

(3) $$u = 0 \quad \text{„} \; x = 0,$$

(4) $$u = \gamma \quad \text{„} \; x = c,$$

worin γ eine Konstante ist. Den Gleichungen (1), (3), (4) genügt die Funktion

$$u = \frac{\gamma}{c} x.$$

Soll auch die Gleichung (2) erfüllt werden, so haben wir zu diesem Werte von u noch einen Beitrag hinzuzufügen, der eine Lösung der partiellen Differentialgleichung (1) ist, für $x = 0$ und $x = c$ zu Null wird und für $t = 0$ den Wert $-\frac{\gamma}{c} x$ annimmt. Dieser Beitrag ergibt sich aus dem vorigen Paragraphen, wenn wir dort $f(x) = -\frac{\gamma}{c} x$ setzen. Dadurch erhalten wir

$$-\frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{c} \int_0^c \frac{\gamma}{c} \alpha \sin \frac{n\pi\alpha}{c} d\alpha.$$

Es ist aber (Bd. I, § 36)

$$\int_0^c \alpha \sin \frac{n\pi\alpha}{c} d\alpha = -\frac{c^2}{n\pi} \cos n\pi = (-1)^{n+1} \frac{c^2}{n\pi}.$$

Dadurch geht der vorige Ausdruck über in

$$\frac{2\gamma}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{c},$$

und wir erhalten als Lösung unserer Aufgabe

(II) $$u = \gamma \left\{ \frac{x}{c} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{c} \right\}.$$

Daß diese Funktion u der partiellen Differentialgleichung (1) und den Bedingungen (3) und (4) genügt, erkennt man ohne weiteres. Für $t = 0$ wird aber auch die Bedingung (2) erfüllt. Denn es ist nach Bd. I, § 36 (1)

(5) $$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{c} = -\frac{x}{c},$$

wie man leicht sieht, wenn man dort $\frac{\pi x}{c}$ statt x schreibt. Diese Entwickelung ist gültig für $c > x \geqq 0$. Wir erhalten also für $t = 0$

$$u = \gamma\left(\frac{x}{c} - \frac{x}{c}\right) = 0.$$

§ 48.

Oberflächentemperatur gegebene Funktion der Zeit.

Aufgabe. Die Funktion u so zu bestimmen, daß sie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

und den Nebenbedingungen

$$u = 0 \qquad \text{für } t = 0, \tag{2}$$
$$u = 0 \qquad \text{„ } x = 0, \tag{3}$$
$$u = \varphi(t) \qquad \text{„ } x = c \tag{4}$$

genügt. Wir können hier denselben Weg einschlagen, wie bei dem analogen Problem in § 41, indem wir die Temperatur an der Oberfläche sich zunächst nicht stetig, sondern in Intervallen unstetig ändern lassen. Wir nehmen wieder die festen Zeitpunkte

$$0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_\nu\ \ldots$$

und die Intervalle $\tau_\nu = t_{\nu+1} - t_\nu$, und bestimmen die Funktion u_ν so, daß für $x = c$

$$\begin{aligned} u_\nu &= 0 \qquad \text{für } t < t_\nu \text{ und } t > t_{\nu+1} \\ u_\nu &= \varphi(t_\nu) \qquad \text{„ } t_\nu < t < t_{\nu+1}, \end{aligned} \tag{5}$$

während für $x = 0$ immer $u_\nu = 0$ sein soll.

Es ist dann

$$u = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} \tag{6}$$

eine Funktion, die solange $t < t_n$ ist, den Bedingungen (1), (2), (3), (4) genügt, mit der näheren Bestimmung, daß $\varphi(t)$ in dem Intervall τ_ν konstant $= \varphi(t_\nu)$ ist. Nun definieren wir eine Funktion $\chi(x, t)$ durch folgende Bestimmung:

$$\begin{aligned} &\chi(x, t) = 0 \quad \text{für} \quad t \leqq 0, \\ &\chi(x, t) = \frac{x}{c} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} e^{-a^2\left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 t} \sin\frac{m\pi x}{c} \quad \text{für } t > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Die rechte Seite dieser Formel geht für $t = 0$ stetig in Null über und folglich ist $\chi(x, t)$ für jedes x zwischen 0 und c

eine stetige Funktion von t, und ebenso ist $\chi(x, t)$ für jedes konstante t eine stetige Funktion von x. Es ist aber $\chi(c, t)$ eine unstetige Funktion von t, die bei $t = 0$ plötzlich von 0 zu 1 übergeht, weil nach (7)

$$\begin{aligned} \chi(c, t) &= 0, \qquad \text{für } t \leqq 0, \\ &= 1, \qquad \quad \text{„} \quad t > 0. \end{aligned}$$

Da $\chi(x, t)$ außerdem der Differentialgleichung (1) genügt, so genügt die Funktion

$$u_\nu = \varphi(t_\nu)[\chi(x, t - t_\nu) - \chi(x, t - t_{\nu+1})] \tag{8}$$

den gestellten Forderungen. Hiernach ergibt sich für $t < t_n$

$$u = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(t_\nu)[\chi(x, t - t_\nu) - \chi(x, t - t_{\nu+1})], \tag{9}$$

und daraus ganz wie in § 41, wenn wir zu unendlich kleinen Intervallen τ_ν übergehen:

$$u = \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial \chi(x, t - \tau)}{\partial t} d\tau, \tag{10}$$

und wenn man für $\chi(x, t - \tau)$ den Ausdruck (7) substituiert, also

$$\frac{\partial \chi(x, t - \tau)}{\partial t} = -\frac{2\pi a^2}{c^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m\, e^{-a^2\left(\frac{m\pi}{c}\right)^2(t-\tau)} \sin \frac{m\pi x}{c}$$

setzt, so folgt:

$$u = -\frac{2\pi a^2}{c^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m m \sin \frac{m\pi x}{c} \int_0^t e^{-a^2\left(\frac{m\pi}{c}\right)^2(t-\tau)} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{11}$$

§ 49.

Verifikation.

Der Ausdruck, den wir zuletzt für die Funktion u erhalten haben, zeigt leicht, daß die Bedingungen (2), (3) in § 48 befriedigt sind. Man sieht aber nicht unmittelbar, daß auch (1) und (4) erfüllt ist, daß u für $x = c$ in $\varphi(t)$ übergeht. Damit hängt zusammen, daß der Ausdruck (11) (§ 48) nur bedingt konvergent ist, und also überhaupt schlecht konvergiert, und um beiden

Übelständen abzuhelfen, ist eine Transformation erforderlich [1]). Schreiben wir den Ausdruck (11) zunächst so:

(1) $$u = -\frac{2\pi a^2}{c^2}\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m m \sin\frac{m\pi x}{c}\, e^{-a^2\left(\frac{m\pi}{c}\right)^2(t-\tau)},$$

so haben wir unter dem Integralzeichen eine unendliche Reihe stehen, die aus der Theorie der Theta-Funktionen bekannt ist, und auf die man die Transformationstheorie der Theta-Funktionen anwenden kann. Wir dürfen aber hier von dieser allgemeinen Theorie keinen Gebrauch machen, und wollen daher die Umformung direkt herleiten.

Wir gehen dabei aus von dem Integral Bd. I, § 64 (6), das wir auch so darstellen können:

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2 + mi\alpha\pi}\,d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{\pi^2 m^2}{4p}},$$

da der imaginäre Teil auf der linken Seite verschwindet. Hierin soll m eine ganze Zahl bedeuten. Das Integral auf der linken Seite läßt sich in eine Summe zerlegen:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{2n-1}^{2n+1} e^{-p\alpha^2 + mi\alpha\pi}\,d\alpha$$

oder, wenn man $2n + \alpha$ für α setzt

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-1}^{+1} e^{-p(2n+\alpha)^2 + mi\alpha\pi}\,d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{\pi^2 m^2}{4p}}.$$

---

[1]) Um sich über die Art der Konvergenz der Reihe (11) eine Vorstellung zu bilden, nehme man beispielsweise $\varphi(\tau) = 1$, dann ergibt sich für diese Reihe, abgesehen von einem konstanten Faktor:

$$\sum \frac{(-1)^m}{m}\sin\frac{m\pi x}{c}\left(e^{-\frac{a^2}{c^2}m^2\pi^2 t} - 1\right).$$

Hier ist nun die Reihe

$$\sum \frac{(-1)^m}{m}\sin\frac{m\pi x}{c}\, e^{-\frac{a^2}{c^2}m^2\pi^2 t}$$

für jedes positive t unbedingt konvergent und eine stetige Funktion von x, während

$$\sum \frac{(-1)^m}{m}\sin\frac{m\pi x}{c}$$

eine ungerade, aber bei $x = c$ unstetige Funktion ist (Bd. I, § 36).

Dies multiplizieren wir mit $e^{-miy\pi}$ und nehmen die Summe über alle ganzzahligen m, also

$$(3)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-1}^{+1} e^{-p(2n+\alpha)^2 + m\pi i(\alpha - y)}\, d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2}{4p} - m\pi i y}.$$

Auf der linken Seite läßt sich nun die Summation in bezug auf m ausführen, und es ergibt sich nach der Fourierschen Reihe (Bd. I, § 35 I[b])

$$(4)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-p(2n+y)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2}{4p} - m\pi i y}$$

Hierin ist die rechte Seite gleich

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} + \sqrt{\frac{\pi}{p}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2\pi^2}{4p}} \cos m\pi y,$$

und wenn man also nach y differentiiert:

$$(5)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n+y)\, e^{-p(2n+y)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} m\, e^{-\frac{m^2\pi^2}{4p}} \sin m\pi y.$$

Setzt man

$$(6)\quad y = \frac{c - x}{c},$$

$$(7)\quad p = \frac{c^2}{4a^2(t-\tau)},$$

so ergibt sich hieraus nach (1), wenn wir der Einfachheit halber y beibehalten:

$$(8)\quad u = \frac{c}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n+y)\, e^{-\frac{c^2(2n+y)^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau,$$

worin y nach (6) durch x auszudrücken ist. Daraus folgt weiter, wenn man die Glieder mit positivem n von denen mit negativem n trennt und $n = 0$ absondert:

$$(9)\quad \begin{aligned} u &= \frac{c}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\, y\, e^{-\frac{c^2 y^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau \\ &+ \frac{c}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \varphi(\tau)(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (2n+y)\, e^{-\frac{c^2(2n+y)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right. \\ &\qquad \left. - (2n-y)\, e^{-\frac{c^2(2n-y)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Das erste Glied formen wir noch um durch die Substitution

$$\alpha = \frac{c\,y}{2\,a\sqrt{t-\tau}}, \qquad d\alpha = \frac{c}{4\,a}\,y\,(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}\,d\tau,$$

wodurch man erhält:

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{c\,y}{2\,a\sqrt{t}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{c^2 y^2}{4\,a^2 \alpha^2}\right) e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

$$+ \frac{c}{2\,a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \varphi(\tau)\,(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty}\left[(2\,n+y)\,e^{-\frac{c^2(2n+y)^2}{4\,a^2(t-\tau)}}\right.$$

$$\left. - (2\,n-y)\,e^{-\frac{c^2(2n-y)^2}{4\,a^2(t-\tau)}}\right] d\tau.$$

Hierin ist nun sofort zu sehen, daß das zweite Glied der rechten Seite für $y = 0$ verschwindet, und daß das erste in $\varphi(t)$ übergeht [Bd. I, § 12 (9)]. Die unendliche Reihe, die in dem zweiten Integral noch vorkommt, ist für jeden im Integrationsbereiche vorkommenden Wert von τ unbedingt konvergent[1]).

Ferner kann man wie in § 42 zeigen, daß die Differentialgleichung § 47 (1) befriedigt ist.

§ 50.

Vordringen des Frostes.

Wir wollen hier noch ein Beispiel für eine andere Art der Grenzbedingungen betrachten, das einerseits wegen seiner Anwendung auf wirkliche Vorgänge, andererseits wegen der damit verbundenen mathematischen Schwierigkeit von Interesse ist.

Es handelt sich um das Gesetz des Eindringens des Frostes oder auch des Auftauens in die feuchte Erde oder in eine stehende Wassermasse.

Es ist aus der Physik bekannt, daß bei der Umwandlung einer Gewichtseinheit Eis von der Temperatur 0 Grad in Wasser von der gleichen Temperatur eine gewisse Wärmemenge verbraucht wird, die man die latente Wärme oder die Schmelzwärme nennt. Wird umgekehrt das Wasser in Eis von der

[1]) Vgl. Schläfli, Über die partielle Differentialgleichung $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ (1870). Crelles Journal, Bd. 72.

gleichen Temperatur verwandelt, so wird die gleiche Wärmemenge wieder gewonnen. Es ist also das Schmelzen des Eises als eine **Arbeitsleistung** zu betrachten. Diese Wärmemenge ist eine dem Wasser eigentümliche positive Konstante, die wir mit λ bezeichnen wollen [1]).

Wir denken uns eine unbegrenzte Ebene bei $x = 0$, und rechnen x in das Innere der gefrierenden Masse hinein positiv, so daß x die Tiefe bedeutet. Bei $x = 0$ möge eine gegebene **unter dem Gefrierpunkt** liegende Temperatur C_1 herrschen. In unendlicher Tiefe sei die Temperatur C_2 gleichfalls gegeben und **über dem Gefrierpunkt**. Von Bewegungen der Massen im Innern der Flüssigkeit und von Volumenänderungen sehen wir ab. Der Frost sei zur Zeit t bis $x = \xi$ vorgedrungen, und das Wesentliche unserer Aufgabe ist, ξ als Funktion von t zu bestimmen.

Wir bezeichnen die Temperatur im Eise mit u_1, in dem noch nicht gefrorenen Teile mit u_2. Ebenso mögen a_1, a_2 die Temperatur-Leitungskoeffizienten, k_1, k_2 die Wärmeleitfähigkeiten in beiden Teilen sein, die wir als Konstanten annehmen.

Bei $x = \xi$ herrscht die Temperatur Null, und wenn ξ im Zeitelement dt um $d\xi$ wächst, so ist in dem über der Flächeneinheit stehenden Zylinder von der Höhe $d\xi$ eine Wärmemenge W_1 frei geworden, die, wenn mit ϱ die Dichtigkeit bezeichnet wird, durch die Formel

$$W_1 = \lambda \varrho \, d\xi$$

bestimmt ist. Die Wärmemenge, die demselben Zylinder in der Zeit dt von kleineren Werten von x her, also von dem bereits gefrorenen Teil her, zugeleitet ist, beträgt (§ 31)

$$W_2 = -k_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{x=\xi} dt,$$

und von größeren Werten von x, also von dem noch flüssigen Teil, ist die Wärmemenge

$$W_3 = k_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{x=\xi} dt$$

---

[1]) Wenn λ in absolutem Maße gemessen wird, so sind seine Dimensionen

$$[\lambda] = [l^2 t^{-2}],$$

d. h. λ ist das Quadrat einer Geschwindigkeit. Der Zahlenwert von λ im Centimeter-Sekunden-System ist etwa $335 \cdot 10^7$ (Kohlrausch, Leitfaden).

zugeleitet. Da wir nun keine weitere Wärmequelle berücksichtigen wollen, so muß die Summe dieser drei Ausdrücke verschwinden, und daraus ergibt sich die an der gefrierenden Fläche geltende Grenzbedingung:

$$\left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)_{x=\xi} = \lambda \varrho \frac{d\xi}{dt}. \tag{1}$$

Hierzu kommt noch eine zweite Bedingung, die daher rührt, daß die Temperatur beim Gefrieren des Wassers einen festen Wert hat, den man zum Nullpunkt der Thermometerskale gewählt hat:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \text{ für } x = \xi. \tag{2}$$

Außerdem hat man die beiden Hauptgleichungen (§ 37)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \qquad \text{für } 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \qquad \text{für } \xi < x, \end{aligned} \tag{3}$$

und die Oberflächenbedingungen

$$u_1 = C_1 \quad \text{für } x = 0 \tag{4}$$

$$u_2 = C_2 \quad \text{für } x = \infty. \tag{5}$$

Endlich kann noch für einen bestimmten Zeitpunkt $t = 0$ der Wert von ξ und u_1 im Intervall $(0, \xi)$, u_2 im Intervall (ξ, ∞) als Funktion des Ortes gegeben sein.

Die allgemeine Lösung dieses Problems ist bis jetzt nicht möglich, weil die Grenzbedingung (1), in der die unbekannte Funktion ξ vorkommt, nicht linear ist, man also nicht aus partikularen Integralen allgemeinere durch Addition ableiten kann. Um so beachtenswerter ist aber ein partikulares Integral, das einer bestimmten Voraussetzung über den Anfangszustand entspricht.

Im § 38 haben wir gezeigt, daß, wenn

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\beta^2} d\beta$$

ist, $\Theta(x/2a\sqrt{t})$ der Differentialgleichung der Wärmebewegung [§ 37, (2)] genügt, und daß also, wenn A_1, B_1, A_2, B_2 Konstanten sind, die Differentialgleichungen (3) durch die Annahme

$$(6) \qquad \begin{aligned} u_1 &= A_1 + B_1 \Theta\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \\ u_2 &= A_2 + B_2 \Theta\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

befriedigt sind. Nun ist die Funktion $\Theta(x/2a\sqrt{t})$ konstant, wenn $x = 0$, $x = \infty$ oder x proportional mit $\sqrt{t}$ ist. Demnach bezeichnen wir mit α noch eine weitere Konstante und setzen

$$(7) \qquad \xi = \alpha\sqrt{t},$$

und wollen nun zeigen, wie man durch passende Bestimmung der Konstanten A_1, B_1, A_2, B_2, α den Bedingungen unserer Aufgabe genügen kann.

Da nämlich $\Theta(0) = 0$, $\Theta(\infty) = 1$ ist, so ergibt sich nach (6) und (7) aus (2), (4) und (5):

$$(8) \qquad \begin{aligned} A_1 \qquad\qquad &= C_1, \\ A_1 + B_1 \Theta\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right) &= 0, \\ A_2 + B_2 \Theta\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right) &= 0, \\ A_2 + B_2 \qquad &= C_2, \end{aligned}$$

und aus (1):

$$\frac{k_1 B_1}{a_1\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}} - \frac{k_2 B_2}{a_2\sqrt{t\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}} = \frac{\lambda\varrho}{2\sqrt{t}}\alpha.$$

Nach (8) hat man hierin zu setzen

$$(9) \qquad B_1 = \frac{-C_1}{\Theta\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \qquad B_2 = \frac{C_2}{1 - \Theta\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)},$$

und wenn man also noch mit $\sqrt{t\pi}$ multipliziert, so ergibt sich:

$$(10) \qquad \frac{k_1 C_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1\Theta\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 C_2 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2\left[1 - \Theta\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda\varrho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Hier haben wir also eine transzendente Gleichung, aus der α zu bestimmen ist. Die linke Seite von (10) wird, wenn C_1 negativ, C_2 positiv ist, negativ unendlich, wenn $\alpha = 0$, und positiv unendlich, wenn $\alpha = \infty$ ist, wie man aus den Sätzen über die Funktion $\Theta(x)$ [Bd. I, § 28, (14)] leicht sieht. Es gibt also gewiß einen positiven Wert von α, für den die Gleichung (10) befriedigt ist. (Der Nachweis, daß es nicht mehr als einen solchen Wert gibt, würde eine etwas komplizierte Untersuchung über die Maxima der linken Seite von (10) nötig machen.)

Hat man α gefunden, so ergibt sich B_1 und B_2 aus (9) und A_1, A_2 aus (8).

Der Anfangszustand ist jetzt nicht mehr beliebig. Aus (7) folgt nämlich, daß $\xi = 0$ ist für $t = 0$, und aus (6), daß u_2 konstant gleich $A_2 + B_2 = C_2$ ist. Es ist also $t = 0$ der Augenblick, wo der Frost an der Oberfläche eben beginnt, wenn die Temperatur der ganzen Wassermasse konstant gleich C_2 ist.

Die Formel (7) zeigt, daß, wie zu erwarten war, das Vordringen der Frostgrenze mit wachsender Tiefe immer langsamer erfolgt.

Nimmt man C_1 positiv, C_2 negativ an, so geben die gleichen Formeln das Gesetz des Auftauens [1]).

---

[1]) Mit dem hier behandelten Problem beschäftigen sich mehrere Abhandlungen von J. Stefan. (Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik, I. Jahrgang, S. 1, 1890. Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. 98, Abteilung IIa, S. 473, 1890.) Franz Neumann hat in seinen Königsberger Vorlesungen bereits am Anfang der sechziger Jahre das Problem in der Weise, wie es hier geschehen ist, behandelt.

Siebenter Abschnitt.

Wärmeleitung in der Kugel.

§ 51.

Unbegrenztes Medium bei beliebigem Anfangszustand.

Wir wollen nun die Differentialgleichung der Wärmebewegung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \tag{1}$$

auf Polarkoordinaten transformieren, und erhalten nach der Formel Bd. I, § 44 (11):

$$\frac{\partial r u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 r u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \sin \vartheta \frac{\partial r u}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 r u}{\partial \varphi^2} \right). \tag{2}$$

Hierin bedeutet r die Entfernung des variablen Punktes von einem als Pol dienenden festen Punkt, ϑ die Poldistanz und φ das Azimut.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß die Temperatur nur von r, nicht von ϑ und φ abhängig ist, so wird die Gleichung für u

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \tag{3}$$

und wenn

$$v = r u \tag{4}$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \tag{5}$$

und stimmt also in ihrer Form überein mit der Differentialgleichung § 37 (2), die wir im vorigen Abschnitt genau untersucht haben. Die unabhängige Variable ist hier r, und die abhängige Variable ist $v = ru$. Die Variable r ist auf positive Werte beschränkt, und v hat der Grenzbedingung zu genügen:

(6) $$v = 0 \quad \text{für} \quad r = 0.$$

Die Probleme, die wir dort behandelt haben, lassen sich also ohne weiteres auch auf den Fall deuten, daß der leitende Körper eine Kugel vom Radius c ist, so daß den Ebenen $x = 0$ und $x = c$ der Kugelmittelpunkt und die Kugeloberfläche entsprechen. Die aufgestellten Formeln stellen dann aber nicht die Temperatur selbst, sondern das r-fache der Temperatur dar.

Wir haben bereits im § 37 ein partikulares Integral der Differentialgleichung (5) kennen gelernt, nämlich:

(7) $$v = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}.$$

Danach wird

$$u = \frac{1}{r\sqrt{t}} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}},$$

und dies wird unendlich für $r = 0$. Wir erhalten aber ein von diesem Übelstande freies, partikulares Integral, wenn wir (7) nach r differentiieren. Der so gefundene Ausdruck, der mit Unterdrückung eines konstanten Faktors

$$\frac{r}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}$$

lautet, gibt ein partikulares Integral der Gleichung (3):

(8) $$u = \frac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}.$$

Hierin setzen wir, indem wir unter $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$ die Koordinaten zweier Punkte p und q verstehen:

(9) $$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

und nun können wir aus (8) ein allgemeineres Integral von (3) herleiten, wenn wir mit $d\tau$ das Volumenelement an der Stelle q und mit Φ_q oder $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ eine willkürliche Funktion bezeichnen:

(10) $$u_p = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \int e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} \Phi_q \, d\tau,$$

worin das Integral über den ganzen Raum erstreckt werden kann. Wir wollen dieses Integral umformen, indem wir Polarkoordinaten mit dem Mittelpunkt p einführen. Bezeichnet dann $d\omega$ ein Flächenelement der Einheitskugel, so wird das Raumelement $d\tau = r^2\, d r\, d\omega$. Wir setzen

$$\psi(r) = \frac{1}{4\pi}\int \Phi_q\, d\omega, \tag{11}$$

so daß $\psi(r)$ der Mittelwert der Funktion Φ auf einer um p beschriebenen Kugel mit dem Radius r ist, und es ergibt sich, wenn Φ im Punkte p stetig ist

$$\psi(0) = \Phi_p. \tag{12}$$

Dadurch geht (10) über in

$$u_p = \frac{1}{(2a\sqrt{t})^3}\,\frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \psi(r)\, e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\, r^2\, d r, \tag{13}$$

oder, wenn man

$$r = 2a\sqrt{t}\,\lambda$$

setzt:

$$u_p = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \psi(2a\sqrt{t}\,\lambda)\, e^{-\lambda^2}\lambda^2\, d\lambda. \tag{14}$$

Wenn man hierin $t = 0$ setzt, so folgt aus (12) mit Benutzung der Formel:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2}\lambda^2\, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad \text{[Bd. I, § 12 (7)]}$$

für $t = 0$

$$u = \Phi(x, y, z), \tag{15}$$

d. h. es ist Φ der Anfangszustand der Temperaturverteilung, und durch (10) oder (14) ist also das Problem der Wärmeleitung für ein unbegrenztes Medium bei einem beliebigen Anfangszustand ganz allgemein gelöst.

Wollte man in ähnlicher Weise die Funktion (7) benutzen, so würde man zu einem dreifachen Integral gelangen, das der Differentialgleichung (1) nicht mehr genügt (ähnlich wie das Potential von Massen für einen inneren Punkt). Es würde dies also einer Wärmebewegung entsprechen, bei der in jedem Volumenelement eine fortwährende Wärmeentwickelung stattfindet[1]).

---

[1]) Die Funktion $u = \frac{1}{4\pi a^2\sqrt{t}}\int e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\,\Phi(\xi, \eta, \zeta)\, r^{-1}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$ verschwindet für $t = 0$ und genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + \Phi\, t^{-1/2}.$$

§ 52.

Der Greensche Satz in der Wärmetheorie.

Wir können das partikulare Integral der Wärmegleichung, das wir im vorhergehenden Paragraphen benutzt haben, noch weiter verwerten, ähnlich wie die Greensche Funktion in der Potentialtheorie [1]).

Wir führen einen anderen Anfangspunkt der Zeit ein, und setzen, indem wir unter ϑ eine beliebige Größe (Veränderliche) verstehen,

$$\varepsilon = (t - \vartheta)^{-3/2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\vartheta)}}, \tag{1}$$

was nichts anderes ist, als die Partikularlösung (8) des vorigen Paragraphen, wenn darin t in $t - \vartheta$ verwandelt wird. Sie genügt als Funktion von $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \vartheta} = -a^2 \Delta \varepsilon, \tag{2}$$

worin jetzt

$$\Delta \varepsilon = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \zeta^2}. \tag{3}$$

Nun sei ein beliebig begrenzter Raum τ gegeben und in ihm eine Funktion

$$u = u(\xi, \eta, \zeta, \vartheta), \tag{4}$$

die der Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = a^2 \Delta u \tag{5}$$

genügt, ferner eine Lösung v der Gleichung (2):

$$\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = -a^2 \Delta v. \tag{6}$$

Hieraus ergibt sich, wenn man (5) mit v, (6) mit u multipliziert und addiert:

$$\frac{\partial u v}{\partial \vartheta} = a^2 (v \Delta u - u \Delta v),$$

und durch Integration über den ganzen Raum τ, wenn man rechts den Gaußschen Integralsatz anwendet und mit do ein Element der Begrenzung von τ, mit dn ein Element der nach innen gerichteten Normalen bezeichnet:

---

[1]) Vgl. Sommerfeld, Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung, Mathematische Annalen **45**, 263, 1894.

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial \vartheta}\int u\,v\,d\tau = a^2\int\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)do.$$

Wir nehmen nun an, es sei für den Körper τ eine Funktion γ der beiden Punkte p, q und der beiden Zeitpunkte t, ϑ gefunden, die den folgenden Bedingungen genügt, wobei der Punkt q als variabel betrachtet wird:

$$(8) \quad \begin{array}{lll} \text{a)} & \dfrac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} + a^2 \Delta \gamma = 0, & \text{innerhalb } \tau, \\ \text{b)} & \gamma = 0 & \text{für } \vartheta = t \text{ (auch im Punkte } p), \\ \text{c)} & \gamma = \varepsilon, & \text{wenn } q \text{ an der Oberfläche liegt,} \end{array}$$

und setzen in (7)

$$(9) \qquad v = \varepsilon - \gamma.$$

Dann ist wegen (2) und (8a) auch (6) erfüllt. An der Oberfläche ist $v = 0$ [nach (8c)] und folglich nach (7):

$$(10) \qquad \frac{\partial}{\partial \vartheta}\int u(\varepsilon - \gamma)\,d\tau = a^2\int u\frac{\partial(\varepsilon - \gamma)}{\partial n}\,do.$$

Um nun diese Formel nach ϑ zwischen den Grenzen 0 und t zu integrieren, haben wir die folgenden Formeln anzuwenden, in denen u^0 den Anfangswert (für $\vartheta = 0$) der Funktion u bedeutet:

$$(11) \quad \begin{array}{l} \left(\displaystyle\int u_q\gamma\,d\tau\right)_{\vartheta=t} = 0, \quad \text{für } \vartheta = t \ [(8\text{b})], \\ \left(\displaystyle\int u_q\gamma\,d\tau\right)_{\vartheta=0} = \displaystyle\int u_q^0[\gamma]_{\vartheta=0}\,d\tau, \quad \text{für } \vartheta = 0, \\ \left(\displaystyle\int u_q\varepsilon\,d\tau\right)_{\vartheta=t} = (2a\sqrt{\pi})^3 u_p(t), \text{ für } \vartheta = t \ [\S\ 51\ (10), (15)], \\ \left(\displaystyle\int u_q\varepsilon\,d\tau\right)_{\vartheta=0} = \displaystyle\int u_q^0[\varepsilon]_{\vartheta=0}\,d\tau. \end{array}$$

Die dritte dieser Formeln erhält man so: Nach der Definition (1) ist

$$\frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3}\int u_q\,\varepsilon\,d\tau = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-\vartheta)})^3}\int u_q\,e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\vartheta)}}\,d\tau,$$

und dies geht nach § 51 (10) (15) für $t - \vartheta = 0$ in $u_p(t)$ über.

Führen wir zur Abkürzung wieder v für $\varepsilon - \gamma$ ein, so erhalten wir aus (1)

$$\left(\int u\,v\,d\tau\right)_{\vartheta=t} = (2a\sqrt{\pi})^3 u_p(t),$$

$$\left(\int u\,v\,d\tau\right)_{\vartheta=0} = \int u_q^0[v]_{\vartheta=0}\,d\tau.$$

Und daraus durch Integration von (10) in bezug auf ϑ zwischen den Grenzen 0 und t:

$$(11) \qquad (2a\sqrt{\pi})^3 u_p(t) = \int u_q^0 [v]_{\vartheta=0}\, d\tau + a^2 \int_0^t d\vartheta \int u \frac{\partial v}{\partial n}\, do.$$

Hierdurch ist aber, wenn γ und mithin v als bekannt angenommen wird, die Funktion u_p ausgedrückt durch den Anfangswert u^0 und durch den Oberflächenwert von u, und dieser Oberflächenwert kann eine beliebig gegebene Funktion des Ortes und der Zeit sein.

Diese Funktion γ leistet uns also für das allgemeine Problem der Wärmebewegung, wenn Anfangstemperatur und Oberflächentemperatur beliebig gegeben sind, dasselbe, was die Greensche Funktion für die Potentialprobleme leistet. Wenn wir z. B. den Fall betrachten, den wir im vorigen Abschnitt ausführlich diskutiert haben, daß der Körper durch eine Ebene begrenzt, sonst aber unbegrenzt ist, so nehmen wir in bezug auf diese Ebene das Spiegelbild p' von p und bezeichnen mit r' die Entfernung (q, p'); dann genügt

$$(12) \qquad \gamma = (t - \vartheta)^{-3/2} e^{-\frac{r'^2}{4a^2(t-\vartheta)}},$$

woraus man z. B. die Resultate des § 41 leicht wieder herleiten kann.

In ähnlicher Weise kann man die Funktion γ bilden für ein Polyeder, das von ebenen Flächen begrenzt ist, und die Eigenschaft hat, daß durch wiederholte Spiegelung an den Grenzflächen der unendliche Raum einfach ausgefüllt wird, z. B. für ein rechtwinkliges Parallelepipedon (auch einige Tetraeder haben diese Eigenschaft).

§ 53.

Berücksichtigung der äußeren Leitung.

Wir wollen uns jetzt noch mit der Wärmebewegung in einer Kugel unter Berücksichtigung der äußeren Leitung beschäftigen. Die Temperatur der Umgebung setzen wir als konstant voraus und wählen sie zum Nullpunkt. Ist dann k die innere, h die äußere Leitfähigkeit, die wir hier als Konstanten ansehen, so haben wir nach § 34, IV, wenn n die nach innen gerichtete Normale bedeutet, die Oberflächenbedingung für die Temperatur u

(1) $$k \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = h \bar{u}$$

oder, wenn wir $k : h = l$ setzen

(2) $$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \frac{\bar{u}}{l},$$

worin l eine konstante Länge ist, und die Oberflächenwerte einer Funktion durch einen darüber gesetzten Strich bezeichnet werden.

Es sei der Körper, den wir betrachten, eine Kugel von dem Radius c, und wir nehmen zunächst den Fall, daß die Funktion u nur eine Funktion von r und t, also in konzentrischen Schichten konstant sei. Dann fällt n in (2) mit $-r$ zusammen, und wenn wir hierin nach § 51 (4)

(3) $$v = r u$$

setzen, so geht die Bedingung (2) in folgende über:

(4) $$\frac{\partial v}{\partial r} + \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{c}\right) v = 0, \quad \text{für } r = c.$$

Demnach haben wir die Funktion v den folgenden Bedingungen gemäß zu bestimmen:

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}, & \\
\text{II.} & v = r F(r), & \text{für } t = 0, \\
\text{III.} & \dfrac{\partial v}{\partial r} + \left(\dfrac{1}{l} - \dfrac{1}{c}\right) v = 0, & \text{für } r = c, \\
\text{IV.} & v = 0, & \text{für } r = 0,
\end{array}$$

worin $F(r)$ eine willkürliche Funktion ist, die den Anfangszustand ausdrückt.

Wir gehen wieder von der Partikularlösung der Gleichung I aus, die wir schon früher benutzt haben

(5) $$e^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda r,$$

die die Bedingung IV befriedigt. Damit auch die Bedingung III durch diesen Ausdruck befriedigt werde, muß λ so gewählt werden, daß es der Gleichung

(6) $$\lambda \cos \lambda c + \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{c}\right) \sin \lambda c = 0$$

genügt. Es muß also λ eine Wurzel der transzendenten Gleichung (6) sein, die wir daher zunächst zu untersuchen haben.

§ 54.

Diskussion der transzendenten Gleichung.

Um die Gleichung (6), § 53 etwas einfacher darzustellen, setzen wir

$$\lambda c = \varphi, \quad \frac{c}{l} - 1 = p \tag{1}$$

und betrachten φ als die Unbekannte, p als eine gegebene Konstante. Unsere Gleichung lautet dann

$$\varphi \cos \varphi + p \sin \varphi = 0. \tag{2}$$

Die Gleichung hat die Wurzel $\varphi = 0$. Alle anderen Wurzeln kommen paarweise entgegengesetzt vor.

Der besondere Fall $p = 0$ erledigt sich unmittelbar, denn in diesem Fall geht (2) in

$$\varphi \cos \varphi = 0$$

über und hat also außer $\varphi = 0$ nur die ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ zu Wurzeln. Sehen wir also jetzt von diesem Falle ab, so ist die Gleichung (2) gleichbedeutend mit der Gleichung

$$\Phi = \operatorname{tg} \varphi + \frac{\varphi}{p} = 0. \tag{3}$$

Lassen wir φ von irgend einem ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ bis zum nächsten gehen, also etwa von

$$n\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{bis} \quad n\pi + \frac{\pi}{2}, \tag{4}$$

so geht $tg\ \varphi$ und mithin Φ von $-\infty$ zu $+\infty$, und muß also wenigstens einmal durch Null gehen. Es liegt also in jedem dieser Intervalle wenigstens eine Wurzel von (3).

Da wir aus den positiven Wurzeln von (3) die negativen sofort erhalten, beschränken wir uns jetzt auf die Betrachtung positiver Werte von φ. Wir teilen jedes der Intervalle (4) in zwei Teile, von $n\pi - \frac{\pi}{2}$ bis $n\pi$ und von $n\pi$ bis $n\pi + \frac{\pi}{2}$, so daß die Tangente von φ im ersten negativ, im zweiten positiv ist. Dann unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Ist $p < 0$, so liegt keine Wurzel von Φ in dem Intervall

$$n\pi - \frac{\pi}{2} \cdots n\pi.$$

2. Ist $p > 0$, so liegt keine Wurzel von Φ in dem Intervall

$$n\pi \cdots n\pi + \frac{\pi}{2},$$

und daraus folgt:

$p < 0$. Eine Wurzel liegt in dem Intervall $n\pi \cdots n\pi + \frac{\pi}{2}$,

$p > 0$. Eine Wurzel liegt in dem Intervall $n\pi - \frac{\pi}{2} \cdots n\pi$.

Eine Ausnahme bildet im Falle 1. das erste Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, weil hier $\varphi = 0$ selbst eine Wurzel ist. In diesem Falle ist für unendlich kleine Werte von φ

$$\Phi = \varphi\left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $\Phi = +\infty$. Hieraus ersieht man:

Ist $0 > p > -1$, so liegt eine Wurzel in dem Intervall $0 \cdots \frac{\pi}{2}$.

Ist $p > 0$ oder $p < -1$, so liegt keine Wurzel in dem Intervall $0 \cdots \frac{\pi}{2}$.

Daß in keinem der angegebenen Intervalle mehr als eine Wurzel liegen kann, läßt sich so einsehen. Wenn mehr als eine Wurzel in einem dieser Intervalle liegen sollte, so müßten es mindestens drei sein, und zwischen je zweien von ihnen müßte Φ ein Maximum oder ein Minimum haben. Es müßte also

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{1}{p}$$

in einem solchen Intervall mindestens zweimal $= 0$ werden.

Wenn aber p positiv oder kleiner als -1 ist, so kann dieser Ausdruck überhaupt nicht verschwinden, und wenn $p = -1$ oder ein negativer echter Bruch ist, nur einmal in einem Intervall.

Man kann sich die Lage der positiven Wurzeln von Φ sehr gut graphisch veranschaulichen, wenn man φ als variable

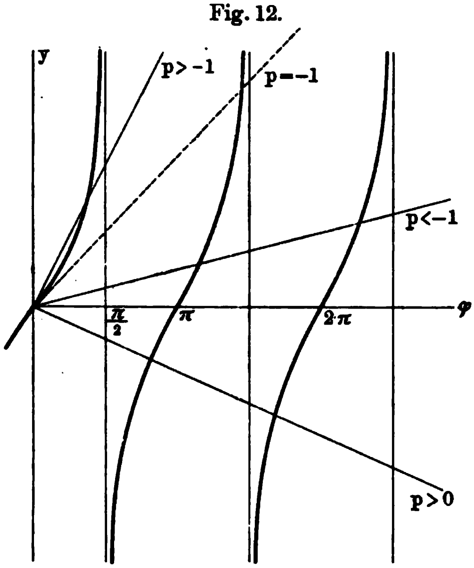
Abszisse in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem ansieht und die zwei Linien

$$(5) \qquad Y = \operatorname{tg}\varphi, \qquad y = -\frac{\varphi}{p}$$

konstruiert. Die Gleichung (3) ist dann $y = Y$, und die Wurzeln sind also die Abszissen der Schnittpunkte dieser beiden Linien, von denen die zweite eine durch den Nullpunkt gehende Gerade ist (Fig. 12).

Fassen wir das Resultat dieser Untersuchung kurz zusammen, so hat sich also ergeben, daß die transzendente Gleichung (2)

Fig. 12.



unendlich viele positive Wurzeln hat. Für $p = 0$ sind dies die ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$, für $p > 0$ liegt von den Wurzeln je eine im 2ten, 4ten, 6ten ... Quadranten und zwar so, daß sie sich mit wachsender Größe den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ schnell annähern.

Ist p ein negativer echter Bruch, so liegen die Wurzeln im 1ten, 3ten, 5ten ... Quadranten und nähern sich ebenfalls den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$.

Der Fall $p < -1$ kann nach der Bedeutung von p in unserem physikalischen Problem nicht vorkommen. Mathematisch verhält sich der Fall aber ebenso wie der vorige, nur daß keine Wurzel im ersten Quadranten liegt.

Die Wurzeln lassen sich nur näherungsweise berechnen, was mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln ziemlich leicht ausgeführt werden kann. Bei Euler, „Introductio in analysin infinitorum", tomus II, cap. XXII, problema IX, ist die Aufgabe für $p = 1$ behandelt.

Wir wollen noch die Frage beantworten, ob unsere Gleichung $\Phi = 0$ rein imaginäre Wurzeln haben kann; auf die Frage nach den komplexen Wurzeln werden wir später zurückkommen. Wir setzen also $\varphi = i\xi$ und erhalten aus (3) die Gleichung

$$(6) \qquad \Xi = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{e^{\xi} + e^{-\xi}} + \frac{\xi}{p} = 0.$$

Diese Gleichung hat die Wurzel $\xi = 0$ und es fragt sich, ob sie noch andere reelle positive Wurzeln hat. Wir bilden zu diesem Zwecke den Differentialquotienten

$$\frac{d\Xi}{d\xi} = \frac{4}{(e^{\xi} + e^{-\xi})^2} + \frac{1}{p};$$

dieser Ausdruck verschwindet nur, wenn

$$(7) \qquad \left(\frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2}\right)^2 = -p$$

ist. Dies tritt niemals ein, wenn p positiv oder ein negativer echter Bruch ist und in diesen Fällen kann also Ξ von Null an nur wachsen. Es hat also Ξ außer 0 keine reelle Wurzel. Wenn dagegen $p < -1$ ist, so hat die Gleichung (7) eine, aber auch nur eine reelle positive Wurzel. Die Funktion Ξ wächst anfangs und nimmt dann fortwährend (bis $-\infty$) ab. Es hat also (6) eine und nur eine positive Wurzel.

Die Gleichung (3) hat daher nur in dem Falle $p < -1$, der für das physikalische Problem nicht von Interesse ist, zwei konjugierte, rein imaginäre Wurzeln. Dies war zu erwarten, denn läßt man p stetig wachsend durch -1 hindurchgehen, so dreht sich die gerade Linie unserer Fig. 12 um den Nullpunkt. Bei $p = -1$ fallen zwei Wurzeln in den Wert 0 zusammen, und werden bei weiterer Drehung imaginär.

§ 55.

Bestimmung der Koeffizienten.

Wir haben in § 53 gesehen, daß die Funktion

$$1) \qquad e^{-a^2\lambda^2 t} \sin \lambda r,$$

wenn λ eine Wurzel der transzendenten Gleichung

$$\lambda \cos \lambda c + \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{c}\right) \sin \lambda c = 0 \tag{2}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg} \lambda c}{\lambda} = \frac{cl}{l - c} = -\frac{c}{p} \tag{3}$$

ist, für v gesetzt, den Bedingungen I, III, IV genügt. Bezeichnen wir die positiven Wurzeln dieser Gleichung, der Größe nach geordnet, mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, so genügt denselben Bedingungen auch eine Summe von der Form

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n r, \tag{4}$$

worin die A_n unbestimmte Koeffizienten sind. Es fragt sich, ob man diese Koeffizienten so bestimmen kann, daß auch noch die Bedingung II:

$$v = r F(r) \quad \text{für} \quad t = 0$$

befriedigt ist, wenn $F(r)$ eine willkürliche Funktion von r ist. Nach (4) müßte also

$$r F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n r \tag{5}$$

sein. Dies ist eine Entwickelung der Funktion $rF(r)$ ganz analog der Fourierschen. Wir setzen hier die Möglichkeit einer solchen Entwickelung für die Funktion $rF(r)$ voraus, und suchen die Koeffizienten A_n zu bestimmen. Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung (5) mit $\sin \lambda_m r\, dr$ und integrieren zwischen den Grenzen 0 und c.

Es ist aber

$$\sin \lambda_m r \sin \lambda_n r = \tfrac{1}{2}[\cos(\lambda_m - \lambda_n) r - \cos(\lambda_m + \lambda_n) r], \tag{6}$$

und folglich, wenn m von n verschieden ist,

$$\begin{aligned}\int_0^c \sin \lambda_m r \sin \lambda_n r\, dr &= \frac{\sin(\lambda_m - \lambda_n) c}{2(\lambda_m - \lambda_n)} - \frac{\sin(\lambda_m + \lambda_n) c}{2(\lambda_m + \lambda_n)} \\ &= \frac{-\lambda_m \cos \lambda_m c \sin \lambda_n c + \lambda_n \sin \lambda_m c \cos \lambda_n c}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2} \\ &= \cos \lambda_m c \cos \lambda_n c \frac{\lambda_n \operatorname{tg} \lambda_m c - \lambda_m \operatorname{tg} \lambda_n c}{\lambda_m^2 - \lambda_n^2},\end{aligned}$$

und dies verschwindet, da λ_m, λ_n verschiedene positive Wurzeln der Gleichung (3) sind. Wir haben also:

$$(7) \qquad \int_0^c \sin\lambda_m r \sin\lambda_n r\, dr = 0, \quad m \neq n.$$

Ist aber $m = n$, so ergibt sich aus (6)

$$(\sin\lambda_m r)^2 = \frac{1 - \cos 2\lambda_m r}{2}$$

und daher

$$\int_0^c (\sin\lambda_m r)^2 dr = \frac{c}{2} - \frac{\sin 2\lambda_m c}{4\lambda_m}.$$

Es ist aber, da λ_m der Gleichung (3) genügt

$$\sin 2\lambda_m c = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\lambda_m c}{1 + \mathrm{tg}^2\lambda_m c} = -\frac{2\lambda_m c l(c-l)}{(c-l)^2 + \lambda_m^2 c^2 l^2}$$

und folglich ist

$$(8) \qquad \int_0^c (\sin\lambda_m r)^2 dr = \frac{c}{2}\,\frac{\lambda_m^2 c^2 l^2 + c^2 - cl}{\lambda_m^2 c^2 l^2 + (c-l)^2}.$$

Das Resultat der vorgenommenen Integration beschränkt sich also auf der rechten Seite auf ein Glied, und wir erhalten

$$\int_0^c r F(r) \sin\lambda_m r\, dr = A_m \frac{c}{2}\,\frac{\lambda_m^2 c^2 l^2 + c^2 - cl}{\lambda_m^2 c^2 l^2 + (c-l)^2}$$

oder

$$(9) \qquad A_m = \frac{2}{c}\,\frac{\lambda_m^2 c^2 l^2 + (c-l)^2}{\lambda_m^2 c^2 l^2 + c^2 - cl}\int_0^c r F(r) \sin\lambda_m r\, dr.$$

Geben wir den Koeffizienten in der Reihe (4) die durch (9) ausgedrückten Werte, so genügt die Funktion v den sämtlichen Bedingungen.

Vorausgesetzt ist hier freilich, daß die Funktion $rF(r)$ sich überhaupt in eine Reihe von der Form (5) entwickeln läßt. Dies ist für solche Funktionen, die sich in Fouriersche Reihen entwickeln lassen, mit Benutzung eines Gedankens von Christoffel durch Fudzisawa nachgewiesen[1]).

[1]) Über eine in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transzendenten Gleichung fortschreitende Reihe (Inauguraldissertation der Universität Straßburg 1886), Journal of the College of Science Imperial University, Japan, vol. II.

Wir wollen noch einige Bemerkungen an die gefundenen Formeln knüpfen. Aus (4) ergibt sich für die Temperatur u selbst die Formel

$$(10) \qquad u = A_1 e^{-a^2\lambda_1^2 t} \frac{\sin\lambda_1 r}{r} + A_2 e^{-a^2\lambda_2^2 t} \frac{\sin\lambda_2 r}{r} + \cdots$$

Hierin ist $\lambda_1 c < \pi$ und folglich auch $\lambda_1 r < \pi$. Es ist aber

$$\frac{d}{dr}\frac{\sin\lambda_1 r}{r} = \frac{r\lambda_1\cos\lambda_1 r - \sin\lambda_1 r}{r^2},$$

also negativ, solange $\lambda_1 r < \pi$ ist. Demnach nimmt der Faktor $\sin\lambda_1 r/r$ des ersten Gliedes mit wachsendem r stetig ab, und zwar von

$$\lambda_1 \text{ bis } \frac{\sin\lambda_1 c}{c} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{p^2+\lambda_1^2 c^2}} \text{ [nach (3)].}$$

Es ist ferner, da der Fall $p < -1$ nicht vorkommt,

$$\lambda_1 c < \frac{\pi}{2}, \qquad \lambda_2 c > \pi, \qquad \text{für } p < 0,$$

$$\lambda_1 c < \pi, \qquad \lambda_2 c > \frac{3\pi}{2}, \qquad \text{für } p > 0,$$

also unter allen Umständen

$$\lambda_2 - \lambda_1 > \frac{\pi}{2c}, \qquad \lambda_2 + \lambda_1 > \frac{\pi}{c}, \qquad \lambda_2^2 - \lambda_1^2 > \frac{\pi^2}{2c^2},$$

folglich ist

$$e^{-a^2\lambda_2^2 t} : e^{-a^2\lambda_1^2 t} < e^{-\frac{a^2\pi^2 t}{2c^2}},$$

und ebenso ergibt sich aus § 54, 3., 4. für ein größeres λ_n

$$e^{-a^2\lambda_n^2 t} : e^{-a^2\lambda_1^2 t} < e^{-\frac{a^2(2n-3)(n-1)\pi^2 t}{2c^2}}.$$

Diese Verhältnisse nehmen also mit der Zeit sehr rasch ab, und wenn also der Bruch

$$\frac{a\sqrt{t}}{c}$$

einen hinlänglich großen Wert hat, so wird schon das erste Glied der Reihe (10) die Temperatur mit genügender Genauigkeit darstellen, also

$$u = A_1 e^{-a^2\lambda_1^2 t} \frac{\sin\lambda_1 r}{r}.$$

gesetzt werden können. Dies wird um so früher erlaubt sein, je kleiner, bei sonst gleichen Verhältnissen, der Radius c der Kugel ist.

Mit wachsender Zeit wird sich auch das erste Glied der Grenze Null nähern, und schließlich wird die ganze Kugel die Temperatur der Umgebung annehmen.

Es ist hier vorausgesetzt, daß A_1 von Null verschieden ist. Wäre $A_1 = 0$, so würde das zweite Glied ausschlaggebend sein. Es würde dann also die Temperatur noch weit schneller der Grenze Null zustreben.

Wenn der Radius c im Vergleich zur Länge l unendlich wird, dann gehen die Wurzeln der transzendenten Gleichung § 54 (3), wie ein Blick auf die Fig. 12 lehrt, in die ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}\pi$ über. Führt man den Grenzübergang aus, so ergibt sich die Lösung des Problems, das wir im § 39 auf andere Weise behandelt haben.

Die Formeln, die wir für die Bestimmung der Konstanten der Entwickelung von v abgeleitet haben, erlauben uns, eine Lücke zu ergänzen, die in der Diskussion der transzendenten Gleichung geblieben ist, nämlich den Nachweis zu führen, daß diese Gleichung keine komplexen Wurzeln hat. Es hat sich nämlich ergeben, daß, wenn λ, λ' zwei Wurzeln der Gleichung (2) sind, und λ^2 von λ'^2 verschieden ist, immer

$$\int_0^c \sin \lambda r \sin \lambda' r \, dr = 0. \tag{11}$$

Dies würde auch noch gelten, wenn λ und λ' komplex wären. Wenn aber

$$\lambda = \alpha + \beta i$$

eine Wurzel ist, so ist auch

$$\lambda' = \alpha - \beta i$$

eine Wurzel und es wird

$$\begin{aligned} \sin \lambda r &= R + Si, \\ \sin \lambda' r &= R - Si, \end{aligned}$$

worin R und S reelle Größen sind. Dann würde aber aus (11) folgen

$$\int_0^c (S^2 + R^2) \, dr = 0,$$

was nur möglich ist, wenn R und S verschwinden. Es können also komplexe Wurzeln nicht vorhanden sein. Die Frage der rein imaginären Wurzeln ist bereits oben erledigt.

§ 56.
Wärmeleitung in einer Kugel bei gegebenem Anfangszustand.

Wir wollen noch ein auf die Kugel bezügliches allgemeineres Problem der Wärmeleitung behandeln, das uns ein schönes Beispiel für die Anwendung der Kugelfunktionen bietet. Das Problem besteht darin, daß der Anfangszustand im Innern der Kugel eine gegebene Funktion F des Ortes, also der drei Koordinaten r, ϑ, φ sei, während die Temperatur der Oberfläche konstant auf Null gehalten wird.

Es ist dann die Differentialgleichung § 51 (2)

$$(1)\qquad r\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 r u}{\partial r^2} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right)$$

unter den Bedingungen zu integrieren:

$$(2)\qquad \begin{aligned} u &= 0 \quad \text{für } r = 1, \\ u &= F \quad \text{,,} \quad t = 0, \end{aligned}$$

wenn der Einfachheit halber der Kugelradius $= 1$ gesetzt wird.

Wir suchen ein partikulares Integral in der Form

$$(3)\qquad u = TRX,$$

worin T nur von t, R nur von r, X von ϑ und φ abhängig sei.

Setzt man also (3) in (1) ein und dividiert durch $rTRX$, so ergibt sich

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \\ &\frac{a^2}{rR}\frac{d^2 rR}{dr^2} + \frac{a^2}{r^2 X}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\sin\vartheta\frac{\partial X}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 X}{\partial\omega^2}\right). \end{aligned}$$

Wir machen nun weiter die Annahme, daß X eine Kugelfunktion $n$ter Ordnung sei, und also der Gleichung

$$(5)\qquad \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\sin\vartheta\frac{\partial X}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 X}{\partial\varphi^2} + n(n+1)X = 0$$

genüge [Bd. I, § 119 (7)]. Dann geht (4) über in

$$(6)\qquad \frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{a^2}{rR}\frac{d^2rR}{dr^2} - \frac{a^2n(n+1)}{r^2},$$

und da die eine Seite dieser Gleichung nicht von r, die andere nicht von t abhängt, so müssen beide gleich einer Konstanten sein, die wir mit $-\lambda^2a^2$ bezeichnen. Dadurch ergibt sich

$$(7)\qquad \frac{dT}{dt} = -\lambda^2a^2T,$$

$$(8)\qquad \frac{d^2rR}{dr^2} + \left[\lambda^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]rR = 0,$$

oder, was dasselbe ist

$$(9)\qquad \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\lambda^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]R = 0,$$

$$(10)\qquad \frac{d r^2 \dfrac{dR}{dr}}{r^2dr} + \left[\lambda^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]R = 0.$$

Die Integration der Gleichung (7) ergibt

$$(11)\qquad T = e^{-\lambda^2a^2t},$$

woraus man schließt, daß λ^2 positiv sein muß, da T mit der Zeit abnehmen muß. Wenn wir ferner

$$\lambda r = x$$

setzen, so erhält die Gleichung (8) die Form:

$$(12)\qquad \frac{1}{x}\frac{d^2xR}{dx^2} + \left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right]R = 0.$$

Setzt man endlich noch

$$R = x^{-1/2}S(x),$$

so ergibt sich für die Funktion S die Differentialgleichung

$$(13)\qquad \frac{d^2S}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dS}{dx} + \left[1 - \frac{(2n+1)^2}{4x^2}\right]S = 0,$$

und da R für $x = 0$ nicht unendlich werden darf, so muß $S(0)$ verschwinden. Die Gleichung (13) hat nun genau die Form der Differentialgleichung für die Besselschen Funktionen [Bd. I, § 72 (12)], nur daß die Ordnungszahl keine ganze Zahl, sondern $n + 1/2$ ist. Man kann, wie dort, zeigen, daß nur eines der beiden partikularen Integrale für $x = 0$ endlich bleibt. Man findet einen Ausdruck für diese Funktion geradezu aus der Potenzreihe für die Besselsche Funktion $J_n(x)$, wenn man n durch $n + {}^1/_2$ ersetzt und man erhält, da es auf einen konstanten Faktor nicht ankommt [Bd. I, § 71 (1), § 123 (9)]

$$S(x) = x^{n+1/_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{2.4\ldots 2\nu(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\nu+1)},$$

ein Ausdruck, von dem man leicht nachweist, daß er der Gleichung (13) wirklich genügt.

Demnach wird die Lösung der Gleichung (12)

$$(14)\quad R(x) = x^n \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu}}{2.4\ldots 2\nu.(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2\nu+1)}.$$

§ 57.

Geschlossene Ausdrücke für die Funktion R.

Wenn man die halbkonvergenten Entwickelungen, die wir früher für die Besselschen Funktionen aufgestellt und untersucht haben, auf diese Funktionen S zu übertragen sucht, so kommt man zu dem merkwürdigen Resultat, daß diese Reihen abbrechen und also geschlossene Ausdrücke für diese Funktionen liefern. Um diese Entwickelungen zu finden, setzen wir in der Differentialgleichung (8), § 56

$$(1)\qquad rR = e^{i\lambda r}\Phi,$$

wodurch sich für Φ die Differentialgleichung ergibt

$$(2)\qquad \frac{d^2\Phi}{dr^2} + 2i\lambda\frac{d\Phi}{dr} - \frac{n(n+1)}{r^2}\Phi = 0.$$

Da wir auf einen geschlossenen Ausdruck kommen, so ist es gleichgültig, ob man hier nach fallenden oder nach steigenden Potenzen von r entwickelt. Tun wir das letztere und setzen

$$\Phi = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^{-n+\nu},$$

so ergibt sich:

$$\frac{d\Phi}{dr} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(n-\nu)r^{-n+\nu-1},$$

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(n-\nu)(n-\nu+1)r^{-n+\nu-2}.$$

Demnach wird die linke Seite der Gleichung (2)

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu [n(n+1)-(n-\nu)(n-\nu+1)]\, r^{-n+\nu-2}$$
$$-2i\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (n-\nu)\, r^{-n+\nu-1},$$

und dies soll identisch verschwinden. In der ersten dieser Summen verschwindet aber das erste Glied mit $\nu = 0$, und wir können daher auch mit der Summation bei $\nu = 1$ beginnen. Setzen wir dann in der zweiten Summe $\nu - 1$ für ν, und beachten die Identität:

$$n(n+1)-(n-\nu)(n-\nu+1) = \nu(2n-\nu+1),$$

so folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} r^{-n+\nu-2}\,[a_\nu \nu (2n-\nu+1) + 2i\lambda a_{\nu-1}(n-\nu+1)] = 0,$$

also:

$$a_\nu = -2i\lambda a_{\nu-1} \frac{n-\nu+1}{\nu(2n-\nu+1)},$$

und wenn man $a_0 = 1$ setzt, so ergibt sich hieraus:

$$(3) \qquad a_\nu = (-2i\lambda)^\nu \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2.\ldots\nu.2n(2n-1)\ldots(2n-\nu+1)}.$$

Man sieht hieraus, daß a_{n+1} und alle höheren a_ν verschwinden, und daß demnach die Reihe Φ, die so dargestellt werden kann:

$$(4) \qquad \Phi = r^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} (-2i\lambda r)^\nu \frac{n(n-1)\ldots(n-\nu+1)}{1.2\ldots\nu\, 2n(2n-1)\ldots(2n-\nu+1)},$$

nach dem $(n+1)$ten Gliede abbricht[1]).

Wenn man in der Summe (4) die Reihenfolge der Summation umkehrt, oder, was dasselbe ist, ν durch $n-\nu$ ersetzt, so erhält man:

$$(-2i\lambda)^{-n}\Phi = \sum_{\nu=0}^{n} (-2i\lambda r)^{-\nu} \frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots n}{(n-\nu)!(n+\nu+1)(n+\nu+2)\ldots 2n},$$

ein Ausdruck, der sich mit Benutzung des Zeichens Π einfacher so darstellen läßt:

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(2n)} \sum_{\nu=0}^{n} (-2i\lambda r)^{-\nu} \frac{\Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(\nu)}.$$

---

[1]) Poisson, Théorie mathématique de la chaleur. Nr. 82 (1835).

Demnach erhalten wir als partikulares Integral der Differentialgleichung § 56 (8), wenn wir einen konstanten Faktor weglassen:

$$(5)\qquad Rr = e^{i\lambda r} \sum_{\nu=0}^{n} (-2i\lambda r)^{-\nu} \frac{\Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(\nu)},$$

und das zweite partikulare Integral erhält man, wenn man i mit $-i$ vertauscht.

Man kann diesem Resultate verschiedene andere Formen geben, unter denen wir noch eine hervorheben wollen:

Wir setzen in der Differentialgleichung § 56 (9)

$$R = r^n X_n$$

und erhalten daraus die Differentialgleichung für X_n:

$$(6)\qquad \frac{d^2 X_n}{dr^2} + \frac{2n+2}{r}\frac{dX_n}{dr} + \lambda^2 X_n = 0,$$

oder wenn man

$$(7)\qquad \lambda^2 r^2 = 2x$$

setzt:

$$(8)\qquad 2x\frac{d^2 X_n}{dx^2} + (2n+3)\frac{dX_n}{dx} + X_n = 0.$$

Differentiiert man diese Formel nochmals nach x und setzt

$$\frac{dX_n}{dx} = X_n',$$

so folgt

$$(9)\qquad 2x\frac{d^2 X_n'}{dx^2} + (2n+5)\frac{dX_n'}{dx} + X_n' = 0,$$

und diese Gleichung geht aus (8) hervor, wenn man n durch $n+1$ ersetzt. Ist also X_n eine Lösung von (8), so ist dX_n/dx eine Lösung von (9), und daraus ergibt sich

$$(10)\qquad X_{n+1} = \frac{dX_n}{dx},$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Formel:

$$X_n = \frac{d^n X_0}{dx^n}.$$

Für X_0 erhalten wir aus (6) die Gleichung:

$$(11)\qquad \frac{d^2 X_0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dX_0}{dr} + \lambda^2 X_0 = 0,$$

und diese Gleichung ist befriedigt durch

$$X_0 = \frac{e^{i\lambda r}}{r},$$

und folglich ergibt sich

$$R = r^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{e^{i\lambda r}}{r}, \tag{12}$$

worin x durch (7) als Funktion von r bestimmt ist.

Verwandelt man i in $-i$, so erhält man sowohl aus (12) als aus (4) ein zweites partikulares Integral, und wir können hiernach die Differentialgleichung § 56 (8) durch diese geschlossenen Ausdrücke vollständig integrieren.

Wenn man in (12) i mit $-i$ vertauscht und dann die Summe und die Differenz der beiden Ausdrücke nimmt, so erhält man zwei partikulare Integrale der Differentialgleichung § 56 (8) in reeller Form:

$$R_1 = r^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\cos \lambda r}{r}, \qquad R_2 = r^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{\sin \lambda r}{r},$$

von denen das zweite bei der Entwickelung nach steigenden Potenzen von r keine negativen Potenzen ergibt, weil die Reihe für $\sin \lambda r/r$ keine negativen Potenzen enthält.

§ 58.

Integraleigenschaften der Funktion R.

Für die Funktion R gelten gewisse Sätze, die wir zur Lösung unserer Aufgabe nötig haben, die ganz analog sind den Sätzen, die wir früher über die Besselschen Funktionen abgeleitet haben (Bd. I, § 83).

Es seien zunächst λ', λ'' zwei beliebige Größen und

$$R_1 = R(\lambda' r), \quad R_2 = R(\lambda'' r).$$

Dann bestehen nach § 56 (10) die Differentialgleichungen:

$$\frac{d r^2 \frac{d R_1}{dr}}{dr} = -\left(\lambda'^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R_1 r^2,$$

$$\frac{d r^2 \frac{d R_2}{dr}}{dr} = -\left(\lambda''^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R_2 r^2,$$

und wenn man die erste mit R_2, die zweite mit R_1 multipliziert und subtrahiert

$$(\lambda'^2 - \lambda''^2) R_1 R_2 r^2 = \frac{d}{dr}\left[r^2 \left(R_1 \frac{d R_2}{dr} - R_2 \frac{d R_1}{dr}\right)\right].$$

Wenn wir diese Formel in bezug auf r zwischen den Grenzen 0 und 1 integrieren und mit $R'(x)$ den Differentialquotienten von $R(x)$ bezeichnen, so folgt:

$$(1)\qquad (\lambda'^2 - \lambda''^2)\int_0^1 R(\lambda' r)\, R(\lambda'' r)\, r^2\, dr$$
$$= \lambda''\, R(\lambda')\, R'(\lambda'') - \lambda'\, R(\lambda'')\, R'(\lambda').$$

Wenn nun λ', λ'' zwei Wurzeln der transzendenten Gleichung:

$$(2)\qquad R(\lambda) = 0$$

bedeuten, und $\lambda'^2 - \lambda''^2$ von Null verschieden ist, so folgt aus (1) die erste der gesuchten Relationen:

$$(3)\qquad \int_0^1 R(\lambda' r)\, R(\lambda'' r) r^2\, dr = 0,$$

woraus man schließen kann, daß die Gleichung (2) keine komplexen Wurzeln hat (vgl. § 55). Daß sie auch keine rein imaginären Wurzeln haben kann, sieht man unmittelbar aus der Reihe (14), § 56. Dagegen hat sie unendlich viele reelle Wurzeln, von denen hier nur die positiven, denen die negativen gleich und entgegengesetzt sind, berücksichtigt zu werden brauchen. Man schließt dies am einfachsten aus dem Satze § 25, 4., wenn man die Differentialgleichung für R in der Form § 56 (12) annimmt. Da der Koeffizient $1 - \frac{n(n+1)}{x^2}$, sobald $x > \sqrt{n(n+1)}$ ist, immer positiv bleibt, so hat diese Differentialgleichung nach dem erwähnten Satze oszillatorische Integrale.

Setzen wir aber zunächst für λ'' eine Wurzel λ der Gleichung (2) und lassen dann λ' gleichfalls in λ übergehen, so erhält man aus (1) durch Differentiation nach λ':

$$(4)\qquad \int_0^1 R(\lambda r)^2 r^2\, dr = \tfrac{1}{2}[R'(\lambda)]^2.$$

§ 59.

Lösung des Wärmeproblems für die Kugel.

Um nun das in § 56 gestellte Problem vollständig zu lösen, lassen wir n alle ganzen Zahlen von Null bis unendlich durchlaufen und nehmen zu jedem n die Kugelfunktion $X^{(n)}$, die $2n+1$ willkürliche Konstanten enthält (Bd. I, § 121 (12)]. Zu jedem

n nehmen wir die sämtlichen positiven Wurzeln λ_n der Gleichung § 58 (2), und bilden dann die Summe aller partikularen Integrale § 56 (3). Dadurch erhalten wir

$$u = \sum^{n} \sum^{\lambda_n} e^{-\lambda_n^2 a^2 t} R(\lambda_n r) X^{(n)}, \tag{1}$$

und hierdurch ist nicht nur die Differentialgleichung (1), sondern auch die erste der Bedingungen (2), § 56 befriedigt. Es bleiben demnach die Kugelfunktionen $X^{(n)}$ so zu bestimmen, daß auch die zweite dieser Bedingungen

$$F = \sum^{n} \sum^{\lambda_n} R(\lambda_n r) X^{(n)} \tag{2}$$

befriedigt wird.

Nun können wir aber nach Bd. I, § 118 (4) die Funktion F für ein unbestimmtes r nach Kugelfunktionen entwickeln:

$$F = \sum^{n} \frac{2n+1}{4\pi} \int F_q P_n (\cos \gamma)\, do, \tag{3}$$

oder

$$F = \sum^{n} Y^{(n)}, \tag{4}$$

wenn

$$Y^{(n)} = \frac{2n+1}{4\pi} \int F_q P_n (\cos \gamma)\, do \tag{5}$$

ist. Hierin bedeutet γ den Winkel zwischen den beiden Richtungen nach p und nach q, und do ist das auf der Richtung q liegende Element der Einheitskugel. Diese Funktionen $Y^{(n)}$ sind Kugelfunktionen, in denen die Konstanten noch von r abhängig sind, und wenn die Funktion F gegeben ist, haben wir also auch die Funktionen $Y^{(n)}$ als gegeben anzusehen. Die Vergleichung von (2) und (4) ergibt nun

$$Y^{(n)} = \sum^{\lambda_n} R(\lambda_n r) X^{(n)}, \tag{6}$$

und wenn wir mit einem bestimmten $R(\lambda_n r) r^2 dr$ multiplizieren und von $r = 0$ bis $r = 1$ integrieren, so erhalten wir nach den Integralformeln (3) und (4) § 58

$$\tfrac{1}{2} R'(\lambda_n)^2 X^{(n)} = \int_0^1 Y^{(n)} R(\lambda_n r) r^2 dr, \tag{7}$$

wodurch auch $X^{(n)}$ bestimmt ist.

DRITTES BUCH

ELASTIZITÄTS-THEORIE

Achter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Elastizität.

§ 60.

Äußere Kräfte und innere Druckkräfte.

Wir haben im neunten Abschnitt des ersten Bandes die geometrischen Eigenschaften stetiger Ortsveränderungen innerhalb einer einen Raumteil stetig erfüllenden Materie betrachtet. Wollen wir diese Sätze auf physikalische Probleme anwenden, so müssen wir also eine stetige Erfüllung des Raumes voraussetzen, was möglicherweise, wenn die atomistische Anschauung im Rechte ist, der Wirklichkeit nur angenähert entspricht [1]).

Unter diesem Vorbehalt sind die erwähnten Sätze anwendbar auf Flüssigkeiten und Gase, auf zähe Substanzen und elastische Körper.

Von den geometrischen Betrachtungen müssen wir zu dynamischen übergehen, um die Bedingungen des Gleichgewichtes und der Bewegung solcher Substanzen unter dem Einfluß von Kräften in Form von Differentialgleichungen aufzustellen. Wir beginnen mit den Bedingungen des Gleichgewichtes. Wir denken uns also einen begrenzten Raum τ stetig mit einem Stoff erfüllt, dessen Teile beweglich sind, und diesen nichtstarren Körper unter dem Einfluß von Kräften, die teils auf sein Inneres, teils auf die Oberfläche wirken, im Gleichgewicht. Im Innern möge auf ein Massenelement $\varrho\, d\tau$ eine Kraft wirken, deren Komponenten nach drei rechtwinkligen Achsen mit

(1) $$\varrho\, d\tau\, X, \quad \varrho\, d\tau\, Y, \quad \varrho\, d\tau\, Z$$

[1]) Man kann bei dieser Anschauung stetige Funktionen des Ortes als Mittelwerte über Räume betrachten, die zwar sehr klein sind, aber trotzdem noch sehr viele Moleküle enthalten.

bezeichnet werden. Es bedeutet hierin ϱ die Massendichtigkeit, und X, Y, Z sind dann die auf die Masseneinheit bezogenen Kraftkomponenten.

Gegen die Oberfläche O von τ wirken von außen angebrachte Druckkräfte, und wir bezeichnen die Komponenten des gegen ein Oberflächenelement do wirkenden Druckes mit

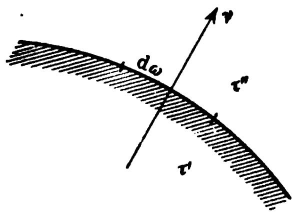
$$(2) \qquad \overline{X}do, \quad \overline{Y}do, \quad \overline{Z}do,$$

so daß $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ die Komponenten des auf die Flächeneinheit bezogenen Druckes sind. Dieser äußere Druck steht natürlich im allgemeinen nicht senkrecht auf der Oberfläche. Ist $P\,do$ die Größe der Druckkraft, so wird seine Richtung durch

$$\overline{X} = P\cos(P, x), \quad \overline{Y} = P\cos(P, y), \quad \overline{Z} = P\cos(P, z)$$

bestimmt. Nach W. Voigt bezeichnen wir die X, Y, Z als äußere Volumkräfte, die $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ als äußere Flächenkräfte[1]). Die Kräfte X, Y, Z, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ denken wir uns gegeben und nennen sie die „äußeren Kräfte". Diesen äußeren Kräften wird das Gleichgewicht gehalten durch die „inneren Kräfte", die durch die Einwirkung der äußeren Kräfte hervorgerufen werden, und einen Spannungszustand erzeugen.

Fig. 13.



Um diese inneren Kräfte und die allgemeinen Voraussetzungen genauer zu charakterisieren, denken wir uns aus dem Raume τ durch eine beliebige geschlossene Fläche Ω einen Raum τ' abgegrenzt. Nehmen wir nun, ohne Veränderung der Kräfte X, Y, Z den Teil τ'' von τ hinweg, der außerhalb τ' liegt, so werden wir, um das Gleichgewicht wieder herzustellen, neue Kräfte hinzufügen müssen. Wir wollen annehmen, daß das Gleichgewicht herstellbar sei durch Flächenkräfte, die gegen die Elemente $d\omega$ der Fläche Ω wirken, und dies sind die inneren oder molekularen Druckkräfte, die man als die Wirkung des Raumes τ'' auf τ' betrachten kann. Ist ν die Richtung der Normale an $d\omega$, von τ' nach τ'' positiv gerechnet (Fig. 13), so

[1]) W. Voigt, Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Kristallelastizität. Referat für den internationalen physikalischen Kongreß in Paris vom 6. bis 12. August 1900. (Göttinger Nachrichten 1900, Heft 3.)

bezeichnen wir den Druck gegen das Element $d\omega$ und seine Komponenten mit

(3) $$\Pi_\nu d\omega, \quad X_\nu d\omega, \quad Y_\nu d\omega, \quad Z_\nu d\omega,$$

und dies sind die Kräfte, die den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten, und die den Spannungszustand charakterisieren.

Wir machen über die inneren Druckkräfte die Annahme, daß sie vollständig bestimmt seien durch den Ort des Elementes $d\omega$ und durch die Richtung ν seiner Normalen, daß sie also nicht abhängig sind von der Größe und Gestalt des Raumes τ', wenn dieser Raum τ' nur so gewählt wird, daß das Element $d\omega$ an seiner Grenze liegt, und daß die Normale ν von τ' nach außen führt.

§ 61.

Gleichgewichtsbedingungen.

Im Zustande des Gleichgewichtes sind die inneren Druckkräfte an die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen für einen starren Körper gebunden; denn denken wir uns den Körper τ' erstarrt, nachdem er durch die Druckkräfte (3) und die äußeren Kräfte (1) ins Gleichgewicht gesetzt ist, so wird dadurch ein bestehendes Gleichgewicht nicht gestört.

Nun hat man aber, wenn an einem System starr miteinander verbundener Punkte Kräfte angreifen, sechs Bedingungen des Gleichgewichts zu befriedigen, die aus der Statik bekannt sind[1]. Diese Bedingungen lauten, wenn x, y, z die Koordinaten der Angriffspunkte, X, Y, Z die Komponenten der Kräfte bedeuten:

$$(1) \quad \begin{aligned} \Sigma X &= 0, \\ \Sigma Y &= 0, \\ \Sigma Z &= 0, \end{aligned} \qquad (2) \quad \begin{aligned} \Sigma(yZ - zY) &= 0, \\ \Sigma(zX - xZ) &= 0, \\ \Sigma(xY - yX) &= 0. \end{aligned}$$

Die drei Summen (1) sind die Komponenten der resultierenden Kraft, und die Summen (2) die Komponenten des resultierenden Drehmomentes um den Koordinatenanfangspunkt.

[1] Man findet diese Bedingungen in jedem Lehrbuche der Mechanik. Nach Lagrange (méc. analytique) sind sie zuerst von d'Alembert aufgestellt; man vgl. z. B. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

In unserem Falle sind die zu berücksichtigenden Kräfte einerseits die äußeren Kräfte ϱX, ϱY, ϱZ, andererseits die Druckkräfte X_ν, Y_ν, Z_ν und die Summen werden zu Integralen, die sich auf das Volumen τ' und auf seine Oberfläche Ω erstrecken.

So ergibt sich aus der ersten Gleichung (1)

$$\int \varrho X d\tau' + \int X_\nu d\omega = 0, \tag{3}$$

wenn $d\tau'$ die Volumenelemente von τ', $d\omega$ die Oberflächenelemente von Ω durchläuft, und ν die nach **außen** gerichtete Normale bedeutet.

Diese Formel wenden wir zunächst an auf einen unendlich kleinen Zylinder mit den beiden Endflächen $d\omega$ und der un-

Fig. 14.

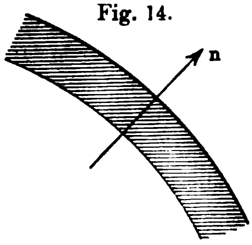
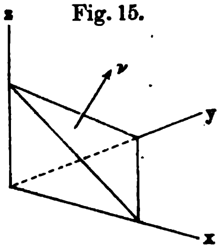


Fig. 15.



endlich kleinen Höhe h. Ist dann n die Normale an die Grundfläche $d\omega$ dieses Zylinders, in das Innere des Zylinders positiv gerechnet, ν die äußere Normale an die Peripherie von $d\omega$, und ds ein Element dieser Peripherie, so ist $h d\omega$ das Volumen des Zylinders, und der Ausdruck (3) zerfällt in folgende Bestandteile:

$$\varrho X h d\omega + h \int X_\nu ds + \left(X_{-n} + X_n + \frac{\partial X_n}{\partial n} h\right) d\omega.$$

Da man hierin h, unabhängig von $d\omega$, unendlich klein annehmen kann, so folgt aus (3)

$$X_n + X_{-n} = 0$$

oder

$$X_n = - X_{-n}, \tag{4}$$

und darin kann n jede beliebige Richtung sein.

Wenn wir den bei dieser Betrachtung benutzten Zylinder an die Oberfläche des ursprünglich gegebenen Raumes τ legen, so haben auf der einen Grundfläche die Flächenkräfte die gegebenen Werte § 60 (2), und wenn wir also die nach **außen** gerichtete Normale an die Oberfläche O von τ mit n bezeichnen (Fig. 14), so ist $\overline{X} + X_n = 0$ und folglich nach (4) X_{-n}

(5) $$X_n = \overline{X}.$$

An der Oberfläche also müssen die inneren Druckkräfte mit den äußeren übereinstimmen.

Wir wenden ferner die Formel (3) auf ein unendlich kleines Tetraeder an, dessen drei aufeinander rechtwinkelige Kanten, von der Ecke aus gerechnet, mit den positiven Koordinatenachsen parallel sind. Ist $d\omega$ die Hypotenusenfläche dieses Tetraeders, und ν die nach außen gerichtete Normale an diese, so sind die drei Kathetenflächen (Fig. 15):

$$\begin{aligned} d\omega_x &= d\omega \cos(\nu, x), \\ d\omega_y &= d\omega \cos(\nu, y), \\ d\omega_z &= d\omega \cos(\nu, z), \end{aligned}$$

und die äußeren Normalen an diese drei Flächen fallen mit der negativen x, y, z-Richtung zusammen. Da nun hier wieder, wenn man das Tetraeder unendlich klein werden läßt, die äußere Kraft $\int \varrho X d\tau$ als mit dem Volumen proportional unendlich klein von höherer Ordnung wird, so ergibt sich aus (3) mit Benutzung von (4)

(6) $$X_\nu = X_x \cos(\nu, x) + X_y \cos(\nu, y) + X_z \cos(\nu, z).$$

Diese Formel besagt, daß X_x, X_y, X_z die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{X}$ sind, dessen nach einer beliebigen Richtung ν genommene Komponente X_ν ist, und wenn man daher auf das Flächenintegral in (3) den Gaußschen Integralsatz anwendet (Bd. I, § 95), so folgt

(7) $$\int (\varrho X + \operatorname{div} \mathfrak{X})\, d\tau' = 0.$$

Diese Formel muß nun für jeden beliebigen Raumteil τ' des ursprünglichen Gebietes τ gelten, und dies führt zu den in jedem Punkte von τ gültigen Bedingungen des Gleichgewichts:

(8) $$\varrho X + \operatorname{div} \mathfrak{X} = 0.$$

Dieselbe Betrachtung gilt auch für die beiden anderen Komponenten, und so erhält man aus (6) drei Gleichungen:

(9) $$\begin{aligned} X_\nu &= X_x \cos(\nu x) + X_y \cos(\nu y) + X_z \cos(\nu z), \\ Y_\nu &= Y_x \cos(\nu x) + Y_y \cos(\nu y) + Y_z \cos(\nu z), \\ Z_\nu &= Z_x \cos(\nu x) + Z_y \cos(\nu y) + Z_z \cos(\nu z). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (8) lassen sich explizite so darstellen:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
\varrho X + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} &= 0,\\
\varrho Y + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} &= 0,\\
\varrho Z + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} &= 0,
\end{aligned}
$$

und aus (5) erhält man die Oberflächenbedingungen

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz) &= \overline{X},\\
Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz) &= \overline{Y},\\
Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz) &= \overline{Z},
\end{aligned}
$$

worin n die nach außen gerichtete Normale bedeutet.

Es bleiben für das Gleichgewicht noch die Bedingungen (2) zu berücksichtigen. Die erste von ihnen ergibt für unseren Fall

$$
(12)\qquad \int \varrho\,(yZ - zY)\,d\tau' + \int (yZ_\nu - zY_\nu)\,d\omega = 0.
$$

Es folgt aber aus (9), daß die drei Größen

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
yZ_x - zY_x &= L_x,\\
yZ_y - zY_y &= L_y,\\
yZ_z - zY_z &= L_z,
\end{aligned}
$$

die Komponenten eines Vektors $\mathfrak{L}$ sind, der in einer beliebigen Richtung ν die Komponente

$$
(14)\qquad yZ_\nu - zY_\nu = L_\nu
$$

hat. Ferner ergibt sich aus (10):

$$
\begin{aligned}
-\varrho\,(yZ - zY) &= \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} + Y_z - Z_y\\
&= \operatorname{div}\mathfrak{L} + Y_z - Z_y;
\end{aligned}
$$

hiernach folgt aus (12):

$$
\int \operatorname{div}\mathfrak{L}\,d\tau' - \int L_\nu\,d\omega = \int (Z_y - Y_z)\,d\tau'
$$

und mithin nach dem Gaußschen Integralsatz:

$$
\int (Z_y - Y_z)\,d\tau' = 0.
$$

Da diese Gleichung wieder für jeden beliebigen Raum τ' gelten soll, so muß überall

(15) $$Z_y = Y_z$$
und ebenso
(16) $$X_z = Z_x, \qquad Y_x = X_y$$
sein [1]).

Um also den Zustand, der durch die gegebenen äußeren Kräfte hervorgerufen wird, vollständig zu bestimmen, hat man die Kenntnis von sechs Ortsfunktionen

$$\begin{array}{ll} X_x, & Z_y = Y_z, \\ Y_y, & X_z = Z_x, \\ Z_z, & Y_x = X_y \end{array}$$

nötig, die für das Gleichgewicht noch an die Differentialgleichungen (10) mit den Grenzbedingungen (11) gebunden sind. Diese Bedingungen reichen aber, wie es ja auch bei der Mannigfaltigkeit der hierin enthaltenen Probleme notwendig ist, zur Bestimmung der unbestimmten Funktionen nicht aus. Die weiteren Bestimmungsgleichungen drücken die Besonderheit des gerade vorliegenden Problems aus, und können nur aus physikalischen Tatsachen abgeleitet werden.

Aus den Bedingungen des Gleichgewichts können wir aber ohne Schwierigkeit die Differentialgleichungen der Bewegung mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips ableiten, indem wir an Stelle der beschleunigenden Kräfte X, Y, Z setzen $X - x''$, $Y - y''$, $Z - z''$, wenn x'', y'', z'' die Beschleunigungen der Stelle x, y, z bedeuten. Hiernach gelten alle unsere Gleichungen (4), (5), (6), (15), (16) auch für den Fall der Bewegung, und nur die Gleichungen (10) werden für den Fall der Bewegung modifiziert.

§ 62.

Die elastische Deformation.

Bei einem elastischen Körper werden die inneren Druckkräfte hervorgerufen durch die Deformation, die unter dem Einfluß der äußeren Kräfte eingetreten ist. Wir unterscheiden den

---

[1]) Die Annahmen, die wir gemacht haben, sind nicht ausreichend zur Erklärung aller Erscheinungen der Kristallelastizität. Wenn die Bedingungen (15), (16) nicht befriedigt sind, so muß man außer den inneren Druckkräften noch andere molekulare Kräfte annehmen, die man als innere Drehmomente bezeichnen kann (vgl. den Bericht von W. Voigt, Göttinger Nachrichten 1900). Dem ganzen Plane des vorliegenden Werkes entsprechend dehnen wir unsere Betrachtungen nicht auf solche Fälle aus.

natürlichen Zustand des Körpers, der ohne die Einwirkung äußerer Kräfte besteht, in dem auch keine inneren Kräfte vorhanden sind, von dem deformierten Zustande.

Ein beliebiger Punkt m des Körpers habe in dem natürlichen Zustande die Koordinaten

$$x, \; y, \; z, \qquad (m)$$

und ein Punkt μ seiner Umgebung habe die Koordinaten

$$x + \xi, \quad y + \eta, \quad z + \zeta, \quad (\mu)$$

worin ξ, η, ζ als unendlich kleine Größen erster Ordnung zu betrachten sind.

Wenn nun bei der Deformation der Punkt m eine Verschiebung erleidet, deren Komponenten mit u, v, w bezeichnet werden, durch die x, y, z in x', y', z' übergehen, so ist

$$x' = x + u, \quad y' = y + v, \quad z' = z + w, \tag{1}$$

und u, v, w sind Funktionen von x, y, z.

Der Punkt μ hat also eine Verschiebung erfahren, deren Komponenten

$$\begin{aligned} u &+ \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta, \\ v &+ \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta, \\ w &+ \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta \end{aligned}$$

sind, und wenn wir also die relativen Koordinaten von μ in bezug auf m nach eingetretener Deformation mit ξ', η', ζ' bezeichnen, so ist

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta, \\ \eta' &= \eta + \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta, \\ \zeta' &= \zeta + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta. \end{aligned} \tag{2}$$

Die hierdurch dargestellte infinitesimale Deformation wird nun nach Bd. I, § 90 in zwei andere zerlegt, von denen die eine eine Drehung, die andere eine Dehnung ist. Die Dehnung, die hier allein in Betracht kommt, wird nach Bd. I, § 90 (3) und (5) durch die Formeln dargestellt:

$$(3)\quad \begin{aligned}\xi'' &= \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\zeta,\\ \eta'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\xi + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\zeta,\\ \zeta'' &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\eta + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\zeta.\end{aligned}$$

Die elastischen Druckkräfte sind nur Funktionen der relativen Verschiebungen der Teilchen, und sind also unabhängig von der Drehung, bei der sich die Umgebung des Punktes m wie ein starrer Körper bewegt. Nach (3) sind also diese Druckkräfte Funktionen von den folgenden sechs Variablen:

$$(4)\quad \begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & y_z &= z_y = \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\\ y_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & z_x &= x_z = \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\\ z_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & x_y &= y_x = \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y},\end{aligned}$$

Die Verschiebungen u, v, w sind hierin beliebige stetige Funktionen von x, y, z, die als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{U}$ betrachtet werden können. In der Folge werden wir sie als unendlich kleine Größen betrachten, d. h. wir nehmen sie mit einem konstanten Faktor multipliziert an, dessen höhere Potenzen gegen die erste vernachlässigt werden dürfen. Damit verzichten wir auf eine allgemeine Behandlung, und erhalten Resultate, die mit den Tatsachen nur angenähert übereinstimmen können.

Diese Voraussetzung führt zu der Grundannahme der Elastizitätstheorie, daß die sechs Komponenten des inneren Druckes X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y lineare homogene Funktionen der sechs Variablen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y sind.

In den Ausdrücken dieser sechs Komponenten durch die sechs Variablen $x_x, \ldots$ würden also 36 Konstanten eingehen, die von der Natur der Substanz abhängig sind. Die Zahl dieser Konstanten vermindert sich aber sehr beträchtlich durch einige weitere Annahmen.

Die Variablen x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y sind immer dann und auch nur dann gleich Null, wenn u, v, w von der Form sind:

$$(5)\quad \begin{aligned} u &= a - ry + qz,\\ v &= b - pz + rx,\\ w &= c - qx + py,\end{aligned}$$

worin a, b, c, p, q, r Konstanten sind, d. h. wenn u, v, w solche Verschiebungen sind, wie sie ein starrer Körper ausführen kann.

§ 63.
Die Energie.

Wir haben oben gesehen, daß wir die x-Komponente des inneren Druckes gegen ein Element mit der Normalen ν durch einen Vektor $\mathfrak{X}$ darstellen können. Grenzen wir ein Volumen τ des elastisch deformierten Körpers ab, so ist die x-Komponente der Kraft, die aus den gegen die Oberfläche dieses Volumens wirkenden Druckkräften resultiert, nach dem Gaußschen Satze (Bd. I, § 95)

$$\int X_n \, do = \int \operatorname{div} \mathfrak{X} \, d\tau,$$

wenn n die nach außen gerichtete Normale ist, und es ist also

$$\operatorname{div} \mathfrak{X} \, d\tau \tag{1}$$

die auf das Element $d\tau$ wirkende molekulare Druckkraft in der x-Richtung. Diese Druckkraft ist hervorgerufen durch den Verschiebungsvektor $\mathfrak{U}$, der seinerseits eine Folge der äußeren beschleunigenden Kräfte und Druckkräfte ist, und diese äußeren Kräfte haben bei der Verschiebung $\mathfrak{U}$ gegen die inneren Kräfte eine gewisse Arbeit geleistet, die wir bestimmen müssen.

Wir denken uns einen neuen Verschiebungsvektor $\mathfrak{U}'$ mit den Komponenten u', v', w'. Dieser wird an dem Element $d\tau$ nur mit Aufwand einer gewissen Arbeitsgröße dT' gegen die molekularen Kräfte vollzogen werden können, und diese Arbeit ist, wenn wir mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Vektoren der drei Druckkomponenten bezeichnen, nach (1)

$$dT' = -(u' \operatorname{div} \mathfrak{X} + v' \operatorname{div} \mathfrak{Y} + w' \operatorname{div} \mathfrak{Z}) \, d\tau. \tag{2}$$

Nun ist aber

$$u' \operatorname{div} \mathfrak{X} = \operatorname{div} u' \mathfrak{X} - \left(X_x \frac{\partial u'}{\partial x} + X_y \frac{\partial u'}{\partial y} + X_z \frac{\partial u'}{\partial z} \right),$$

$$v' \operatorname{div} \mathfrak{Y} = \operatorname{div} v' \mathfrak{Y} - \left(Y_x \frac{\partial v'}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v'}{\partial y} + Y_z \frac{\partial v'}{\partial z} \right),$$

$$w' \operatorname{div} \mathfrak{Z} = \operatorname{div} w' \mathfrak{Z} - \left(Z_x \frac{\partial w'}{\partial x} + Z_y \frac{\partial w'}{\partial y} + Z_z \frac{\partial w'}{\partial z} \right),$$

und hieraus mit Benutzung der Bezeichnung § 62 (4) und mit Rücksicht auf die Relationen $X_y = Y_x \ldots$ [§ 61 (15), (16)]:

$$(3)\quad u' \operatorname{div} \mathfrak{X} + v' \operatorname{div} \mathfrak{Y} + w' \operatorname{div} \mathfrak{Z} = \operatorname{div}(u'\mathfrak{X} + v'\mathfrak{Y} + w'\mathfrak{Z}) \\ - X_x x'_x - X_y x'_y - X_z x'_z - Y_y y'_y - Y_z y'_z - Z_z z'_z.$$

Führen wir also die Bezeichnung ein:

$$(4)\quad F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') = X_x x'_x + X_y x'_y + X_z x'_z \\ + Y_y y'_y + Y_z y'_z \\ + Z_z z'_z,$$

dann wird nach (2)

$$(5)\quad dT' = -\operatorname{div}(u'\mathfrak{X} + v'\mathfrak{Y} + w'\mathfrak{Z})\,d\tau + F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')\,d\tau,$$

und wenn wir diesen Ausdruck über den Raum τ integrieren, so erhalten wir mit abermaliger Anwendung des Gaußschen Integralsatzes, wenn do die Oberflächenelemente von τ, und n die nach außen gerichtete Normale an do bedeutet, für die gesamte Arbeit der Verschiebung $\mathfrak{U}'$ gegen die elastischen Kräfte:

$$(6)\quad T' = -\int (u' X_n + v' Y_n + w' Z_n)\,do + \int F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')\,d\tau,$$

oder nach § 61 (5):

$$(7)\quad T' = -\int (\overline{X} u' + \overline{Y} v' + \overline{Z} w')\,do + \int F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')\,d\tau.$$

Dieser Ausdruck stellt den Zuwachs an potentieller Energie dar, der in dem elastischen Körper durch die Verschiebung $\mathfrak{U}'$ bewirkt wird.

Darin ist das Oberflächenintegral die gegen die äußeren Druckkräfte geleistete Arbeit, und das Raumintegral in (7) ist die im Innern von τ enthaltene Energiemenge. Wir können also die Funktion $F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ definieren als die auf die Volumeneinheit bezogene, an der Stelle x, y, z vorhandene und durch die nacheinander ausgeführten Verschiebungen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$ aufgehäufte elastische Energie.

Die Funktion $F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ ist nach der Voraussetzung, die wir über die $X_x \ldots$ gemacht haben, eine bilineare Funktion der beiden Reihen von je sechs Variablen:

$$(8)\quad \begin{matrix} x_x, & y_y, & z_z, & y_z, & z_x, & x_y, \\ x'_x, & y'_y, & z'_z, & y'_z, & z'_x, & x'_y, \end{matrix}$$

und eine solche Funktion hat im allgemeinen 36 konstante Koeffizienten. Wir machen aber jetzt die fernere Annahme

$$(9)\quad F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') = F(\mathfrak{U}', \mathfrak{U}),$$

d. h. wir nehmen an, daß die durch die beiden Vektoren $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ erzeugte Energie von der Reihenfolge unabhängig sei, in der diese Verschiebungen ausgeführt werden. Wollten wir diese Annahme nicht machen, so würde, wenn man die Verschiebungen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'$, $-\mathfrak{U}$, $-\mathfrak{U}'$ nacheinander ausführt, der elastische Körper zwar wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgekehrt sein, und es wäre also, wenn wir die äußeren Kräfte als unveränderliche Funktionen des Ortes ansehen, gegen diese Kräfte keine Arbeit geleistet, und doch wäre Energie gewonnen oder verloren [1]). Dies nehmen wir nicht an.

Um die Folgerungen aus der Relation (9) deutlich zu übersehen, wollen wir für den Augenblick die Variablen (8) mit x_i, x'_k bezeichnen, und i und k von 1 bis 6 gehen lassen. Es ist dann

$$F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') = \sum^{i,k} a_{i,k}\, x_i\, x'_k, \tag{10}$$

worin die $a_{i,k}$ konstante Koeffizienten sind, zwischen denen nach (9) die Beziehung

$$a_{i,k} = a_{k,i}$$

besteht. Führen wir also eine homogene Funktion zweiten Grades ein:

$$F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}) = F(x_1\, x_2 \ldots x_6) = \sum^{i,k} a_{i,k}\, x_i\, x_k, \tag{11}$$

so ergibt sich

$$F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') = \frac{1}{2} \sum F'(x_k)\, x'_k, \tag{12}$$

und folglich, in der früheren Bezeichnung:

$$\begin{aligned} X_x &= \tfrac{1}{2} F'(x_x), & Y_y &= \tfrac{1}{2} F'(y_y), & Z_z &= \tfrac{1}{2} F'(z_z), \\ Y_z &= \tfrac{1}{2} F'(y_z), & Z_x &= \tfrac{1}{2} F'(z_x), & X_y &= \tfrac{1}{2} F'(x_y), \end{aligned} \tag{13}$$

und hierin kommen nur die 21 Koeffizienten der Funktion (10) vor.

Um die Bedeutung der Funktion F zu erkennen, setzen wir die Verschiebung $\mathfrak{U}$ aus den Differentialen $d\mathfrak{U}$ zusammen, und nehmen $\mathfrak{U}' = d\mathfrak{U}$; es ist dann (12)

$$F(\mathfrak{U}, d\mathfrak{U}) = \tfrac{1}{2} dF(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}), \tag{14}$$

und daraus ergibt sich durch Integration in bezug auf $d\mathfrak{U}$

$$dT = \tfrac{1}{2} F(x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y)\, d\tau = \tfrac{1}{2} F d\tau \tag{15}$$

für die im Volumenelement $d\tau$ enthaltene Energiemenge, die durch die Verschiebung $\mathfrak{U}$ aus dem natürlichen Zustande erzeugt

[1]) Ein derartiges Verhalten könnte möglicherweise zu berücksichtigen sein bei den Erscheinungen der sogenannten elastischen Nachwirkung.

ist. Diese Funktion betrachten wir als das Maß für die potentielle Energie der elastischen Spannung, die an der Stelle x, y, z stattfindet.

Die Funktion F muß eine wesentlich positive Funktion sein, sie kann also für kein reelles Wertsystem der Variablen einen negativen Wert erhalten, und für kein von Null verschiedenes Wertsystem der Variablen verschwinden [1]).

Denn wenn die äußeren Kräfte alle Null sind, so ist der natürliche Zustand des Körpers, bei dem alle Variablen x_x, y_y ..., und also auch F, verschwinden, der Gleichgewichtszustand. Könnte F negative Werte annehmen, so müßte ein Verschiebungssystem existieren, bei dem die potentielle Energie noch verkleinert würde, und der natürliche Zustand wäre also kein stabiler Gleichgewichtszustand (Bd. I, § 128).

Daß aber die Funktion F für kein von Null verschiedenes Wertsystem der Variablen verschwinden soll, besagt, daß keine Verschiebung aus dem natürlichen Zustande, bei dem die relative Lage der Teilchen geändert wird, ohne Arbeitsleistung möglich sein soll [2]).

§ 64.

Bedingungen des Gleichgewichts und der Bewegung.

Die 21 Konstanten der Funktion F muß man sich durch Beobachtungen für jede Substanz besonders bestimmt denken, und dann stellen sich die Bedingungen des Gleichgewichts und der Bewegung als partielle Differentialgleichungen für die drei Funktionen u, v, w dar. Diese hängen von den Koordinaten x, y, z und von der Zeit t ab, und die Beschleunigungen sind

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

---

[1]) Eine homogene quadratische Funktion von n Variablen läßt sich auf unendlich viele verschiedene Arten als eine Summe von höchstens n positiven oder negativen Quadraten voneinander unabhängiger linearer Funktionen der Variablen darstellen. Die Anzahl der positiven und der negativen unter diesen Quadraten ist bei einer und derselben Funktion bei allen diesen Darstellungen dieselbe. Die Funktion heißt wesentlich positiv, wenn die Anzahl der positiven Quadrate $= n$ ist. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Aufl., S. 212, Braunschweig 1898.

[2]) Bei reibungslosen idealen Flüssigkeiten ist die Sache anders. Bei diesen ist, wie man annimmt, jede Verschiebung, die keine Volumänderung zur Folge hat, ohne Energieverbrauch ausführbar.

Zunächst ergeben sich nach § 61 die drei allgemeinen Differentialgleichungen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \varrho\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + \operatorname{div}\mathfrak{X} &= 0, \\ \varrho\left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + \operatorname{div}\mathfrak{Y} &= 0, \\ \varrho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + \operatorname{div}\mathfrak{Z} &= 0, \end{aligned}$$

woraus man die Bedingungen für das Gleichgewicht erhält, wenn man u, v, w von der Zeit unabhängig, also die Beschleunigungen gleich Null annimmt.

Unter Umständen können noch andere Bedingungen hinzutreten, durch die diese Gleichungen modifiziert werden. So hat Fresnel zur Erklärung der optischen Erscheinungen in Kristallen die Annahme gemacht, daß die Schwingungen des Lichtäthers ohne Volumänderung vor sich gehen, daß also der Äther inkompressibel sei. Dann muß $\operatorname{div}\mathfrak{U} = 0$ sein, und es besteht also für diese Verschiebungen u, v, w, wenn wir zur Abkürzung

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

setzen, die Bedingung $\Theta = 0$. Dann treten zu den Gleichungen (2) noch die Glieder hinzu:

$$\lambda\frac{\partial \Theta}{\partial x},\quad \lambda\frac{\partial \Theta}{\partial y},\quad \lambda\frac{\partial \Theta}{\partial z},$$

worin λ ein unbestimmter Koeffizient ist, zu dessen Bestimmung die Bedingung $\Theta = 0$ dient. Dies wollen wir aber hier nicht weiter berücksichtigen.

Zu den Gleichungen (2) treten noch die Grenzbedingungen für den Oberflächendruck:

$$(3)\qquad X_n = \overline{X},\quad Y_n = \overline{Y},\quad Z_n = \overline{Z},$$

und für den Fall der Bewegung die Bedingungen für den Anfangszustand, die darin bestehen, daß für einen Augenblick $t = 0$

$$(4)\qquad u,\ v,\ w,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial v}{\partial t},\ \frac{\partial w}{\partial t}$$

als Funktionen des Ortes gegeben sind.

§ 65.
Eindeutigkeit der Lösung.

Wenn wir für den Vektor $\mathfrak{U}'$ die in dem Zeitelement wirklich eintretende Verschiebung, also

$$(1) \qquad u' = \frac{\partial u}{\partial t} dt, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial t} dt, \quad w' = \frac{\partial w}{\partial t} dt$$

setzen, so wird wegen § 63 (14)

$$(2) \qquad F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') = \frac{1}{2} \frac{\partial F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U})}{\partial t} dt,$$

und durch Integration über den Raum τ

$$(3) \qquad \int F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') d\tau = \frac{dT}{dt} dt,$$

worin T wie in § 63 (15) die durch die Verschiebung $\mathfrak{U}$ hervorgerufene potentielle Energië der elastischen Spannung ist. Multiplizieren wir die Gleichungen § 64 (2) mit $u'd\tau$, $v'd\tau$, $w'd\tau$, addieren sie und integrieren über den Raum τ, so ergibt sich, wenn wir

$$u' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v' \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + w' \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right] dt,$$

$$(4) \qquad T_0 = \frac{1}{2} \int \varrho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 \right] d\tau$$

setzen, so daß T_0 die kinetische Energie (lebendige Kraft) des Systems ist, und wenn wir noch beachten, daß $\varrho\, d\tau$ als die Masse des Elements $d\tau$ von t unabhängig ist:

$$(5) \qquad \int \varrho (Xu' + Yv' + Zw') d\tau$$
$$= \frac{dT_0}{dt} dt - \int (u' \operatorname{div} \mathfrak{X} + v' \operatorname{div} \mathfrak{Y} + w' \operatorname{div} \mathfrak{Z}) d\tau.$$

Nach § 63 (2) ist aber

$$T' = -\int (u' \operatorname{div} \mathfrak{X} + v' \operatorname{div} \mathfrak{Y} + w' \operatorname{div} \mathfrak{Z}) d\tau$$

die Arbeit der Verschiebung $\mathfrak{U}'$, die nach § 63 (7) auch gleich

$$-\int (\overline{X}u' + \overline{Y}v' + \overline{Z}w') do + \int F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') d\tau,$$

und nach (3)

$$= -\int (\overline{X}u' + \overline{Y}v' + \overline{Z}w') do + \frac{dT}{dt} dt$$

ist. Es ergibt sich also aus (5):

$$\frac{d(T_0 + T)}{dt}\,dt \tag{6}$$

$$= \int \varrho\,(Xu' + Yv' + Zw')\,d\tau + \int (\overline{X}u' + \overline{Y}v' + \overline{Z}w')\,do.$$

Endlich ist

$$\int \varrho\,(Xu' + Yv' + Zw')\,d\tau + \int (\overline{X}u' + \overline{Y}v' + \overline{Z}w')\,do = A\,dt \tag{7}$$

die in dem Zeitelement dt bei der wirklich eintretenden Bewegung von den äußeren Volumen- und Flächenkräften geleistete Arbeit und demnach ergibt sich aus (6):

$$A = \frac{d(T_0 + T)}{dt}, \tag{8}$$

d. h. die Arbeit der äußeren Kräfte ist gleich der Vermehrung der gesamten potentiellen und kinetischen Energie.

1. Hieraus ergibt sich sofort der Satz, daß die Differentialgleichungen für die elastischen Bewegungen mit ihren Grenz- und Anfangsbedingungen, wenn die äußeren Kräfte gegeben sind, nur eine einzige Lösung zulassen.

Denn sind u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 zwei Lösungen desselben elastischen Problems, so sind

$$u = u_1 - u_2, \quad v = v_1 - v_2, \quad w = w_1 - w_2$$

gleichfalls Lösungen eines elastischen Problems, bei dem aber die äußeren Kräfte X, Y, Z, $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ alle gleich Null sind, und bei dem auch die Anfangswerte § 64 (4) verschwinden. Für dieses Problem ist also nach (7) die Arbeit $A = 0$ und folglich ist die Energie $T_0 + T$ von der Zeit unabhängig, und da sie am Anfang gleich Null ist, so ist sie überhaupt gleich Null. Dies ist nur möglich, wenn T_0 und T einzeln verschwinden. Das Verschwinden von T_0 ist aber nur möglich, wenn die Geschwindigkeiten

$$\partial u/\partial t, \qquad \partial v/\partial t, \qquad \partial w/\partial t$$

gleich Null, also u, v, w von der Zeit unabhängig sind. Das Verschwinden von T erfordert, daß die sechs Größen

$$x_x, \; y_y, \; z_z, \; y_z, \; z_x, \; x_y$$

gleich Null sind, und daher u, v, w die Form § 62 (5) haben.

Die Verschiebungen u_1, v_1, w_1 unterscheiden sich also von den u_2, v_2, w_2 nur um Größen, die die Verschiebung eines starren Körpers ausdrücken, und um die Funktionen u, v, w vollständig zu bestimmen, müssen also noch Gleichungen zur Bestimmung von Konstanten hinzukommen, die ausreichend sind, um die Lage eines starren Körpers zu bestimmen.

Für den Fall des Gleichgewichtes führt eine ähnliche Betrachtung zum Ziele. In diesem Falle sind die u, v, w als Funktionen von x, y, z unabhängig von t zu bestimmen aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho X + \operatorname{div} \mathfrak{X} &= 0, \\ \varrho Y + \operatorname{div} \mathfrak{Y} &= 0, \\ \varrho Z + \operatorname{div} \mathfrak{Z} &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

mit den Grenzbedingungen

$$X_n = \overline{X}, \quad Y_n = \overline{Y}, \quad Z_n = \overline{Z}. \tag{10}$$

Haben diese Gleichungen zwei verschiedene Lösungen u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2, so genügen die Differenzen

$$u = u_1 - u_2, \quad v = v_1 - v_2, \quad w = w_1 - w_2 \tag{11}$$

den Gleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{X} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{Y} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{Z} = 0$$

mit den Grenzbedingungen, daß an der Oberfläche X_n, Y_n, Z_n gleich Null sein sollen. Daraus aber ergibt sich nach § 63 (2), daß $d\,T'$ für jeden beliebigen Verschiebungsvektor $\mathfrak{U}'$ gleich Null ist, also nach § 63 (7):

$$\int (u' \overline{X} + v' \overline{Y} + w' \overline{Z})\, do - \int F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')\, d\tau = 0. \tag{12}$$

Setzt man hierin $u' = u$, $v' = v$, $w' = w$ und beachtet, daß $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ verschwinden, so folgt

$$F(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}) = 0, \tag{13}$$

also $x_x = 0$, $y_y = 0$, $z_z = 0$, $y_z = 0$, $z_x = 0$, $x_y = 0$, woraus wieder zu schließen ist, daß u, v, w die Ausdrücke für die Verschiebung der Punkte eines starren Körpers sind.

Derselbe Schluß kann aber auch gemacht werden, wenn an der Oberfläche nicht die Druckkräfte, sondern die Verschiebungen u, v, w gegeben sind. Auch dadurch ist die Lösung des Problems eindeutig bestimmt.

Denn wenn unter dieser Voraussetzung zwei Lösungen u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2 vorhanden wären, so wären die Differenzen (11) an der Oberfläche gleich Null, und in (12) würde für $u' = u$, $v' = v$, $w' = w$ das Flächenintegral gleich Null. Es würde also wieder die Gleichung (13) erfüllt sein müssen. Und derselbe Schluß kann auch unter der allgemeineren Voraussetzung gemacht werden, daß an der Oberfläche überall

$$u\overline{X} + v\overline{Y} + w\overline{Z}$$

verschwindet.

2. **Es folgt hieraus, daß die Lösung des statischen Problems eindeutig bestimmt ist, wenn an der Oberfläche von den drei Größenpaaren**

$$\overline{X}, u, \quad \overline{Y}, v, \quad \overline{Z}, w$$

je eine Größe gegeben ist.

§ 66.

Isotrope Körper.

Die Ausdrücke für die molekularen Drucke durch die Verschiebungen vereinfachen sich wesentlich, wenn wir noch gewisse Voraussetzungen über die Symmetrie des Körpers hinzunehmen. Es genügt dazu, nach § 63 (13) die quadratische Funktion F als Funktion der Variablen

$$
\begin{aligned}
& x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\
(1) \qquad & y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\
& z \;= \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad x_y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}
$$

darzustellen.

1. **Wir machen zunächst die Annahme, daß der Körper sich in je zwei entgegengesetzten Richtungen in elastischer Beziehung gleichartig verhalte, oder, wie wir sagen wollen, daß zwei entgegengesetzte Richtungen gleichwertig seien.**

Wenn dann ein neues Koordinatensystem eingeführt wird, in dem die x-Achse die entgegengesetzte Richtung erhält, so ist u und x durch $-u$, $-x$ zu ersetzen, und die Funktion F muß also bei den Zeichenänderungen

$$
\begin{array}{cccccc}
x_x, & y_y, & z_z, & y_z, & z_x, & x_y, \\
x_x, & y_y, & z_z, & y_z, & -z_x, & -x_y
\end{array}
$$

ungeändert bleiben.

Es fehlen also in der Funktion F die Glieder mit

$$x_x z_x,\quad x_x x_y,\quad y_y z_x,\quad y_y x_y,\quad z_z z_x,\quad z_z x_y,\quad y_z z_x,\quad y_z x_y,$$

und wenn man der y-Achse und der z-Achse die entgegengesetzte Richtung gibt, fallen noch weitere entsprechende Glieder heraus, und in F bleiben also infolge dieser einen Annahme nur die Glieder

$$\begin{array}{ccc} x_x^2, & y_y^2, & z_z^2, \\ y_y z_z, & z_z x_x, & x_x y_y, \\ y_z^2, & z_x^2, & x_y^2. \end{array} \tag{2}$$

Durch die Annahme 1. reduzieren sich also die 21 Konstanten der Funktion F bereits auf 9.

2. Wir machen ferner die Annahme, daß die drei Achsen x, y, z gleichwertig seien.

Daraus folgt, daß je drei Glieder von F, die in (2) in einer Reihe stehen, denselben Koeffizienten haben, wodurch die Zahl der Konstanten auf drei reduziert ist, und die Funktion F erhält, wenn diese Konstanten mit $\varkappa$, λ, μ bezeichnet sind, die Form

$$\begin{aligned} F = \varkappa(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2) + 2\lambda(y_y z_z + z_z x_x + x_x y_y) \\ + \mu(y_z^2 + z_x^2 + x_y^2), \end{aligned} \tag{3}$$

und für die inneren Druckkomponenten ergibt sich nach § 63 (13):

$$\begin{aligned} X_x &= \varkappa x_x + \lambda y_y + \lambda z_z, & Y_z &= \mu y_z, \\ Y_y &= \lambda x_x + \varkappa y_y + \lambda z_z, & Z_x &= \mu z_x, \\ Z_z &= \lambda x_x + \lambda y_y + \varkappa z_z, & X_y &= \mu x_y. \end{aligned} \tag{4}$$

Die drei Konstanten $\varkappa$, λ, μ lassen sich aber auf zwei reduzieren durch die dritte Annahme:

3. daß überhaupt alle Richtungen in dem elastischen Körper gleichwertig seien, daß also der Körper isotrop sei.

Dazu ist erforderlich, daß die Ausdrücke (4) ihre Form nicht ändern, wenn man zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensystem übergeht.

Es seien also x', y', z' die Koordinaten eines Punktes in dem neuen System, das mit dem ursprünglichen durch die Formeln zusammenhänge:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, & x &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \\ y' &= b_1 x + b_2 y + b_3 z, & y &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z', \\ z' &= c_1 x + c_2 y + c_3 z, & z &= a_3 x' + b_3 y' + c_3 z', \end{aligned} \tag{5}$$

und die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 ... sind darin den aus der analytischen Geometrie bekannten Relationen unterworfen, die wir nicht hierher zu setzen brauchen.

Nach § 61 (9) haben wir zunächst:

$$
\begin{aligned}
X_{x'} &= a_1 X_x + a_2 X_y + a_3 X_z, \\
Y_{x'} &= a_1 Y_x + a_2 Y_y + a_3 Y_z, \qquad (6)\\
Z_{x'} &= a_1 Z_x + a_2 Z_y + a_3 Z_z,
\end{aligned}
$$

und wenn wir hieraus die Komponenten nach den Richtungen x', y' bilden:

$$
\begin{aligned}
X'_{x'} &= a_1 X_{x'} + a_2 Y_{x'} + a_3 Z_{x'}, \\
Y'_{x'} &= b_1 X_{x'} + b_2 Y_{x'} + b_3 Z_{x'},
\end{aligned}
$$

oder, da $Z_y = Y_z$ ist:

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad X'_{x'} &= a_1^2 X_x + a_2^2 Y_y + a_3^2 Z_z \\
&\quad + 2 a_2 a_3 Y_z + 2 a_3 a_1 Z_x + 2 a_1 a_2 X_y, \\
(8)\qquad Y'_{x'} &= a_1 b_1 X_x + a_2 b_2 Y_y + a_3 b_3 Z_z \\
&\quad + (a_2 b_3 + b_2 a_3) Y_z + (a_3 b_1 + b_3 a_1) Z_x + (a_1 b_2 + b_1 a_2) X_y,
\end{aligned}
$$

und hieraus kann man die übrigen Komponenten durch zyklische Vertauschungen leicht ableiten.

Ebenso ist nun:

$$u' = a_1 u + a_2 v + a_3 w,$$

und daraus:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u'}{\partial x'} &= \frac{\partial u'}{\partial x} a_1 + \frac{\partial u'}{\partial y} a_2 + \frac{\partial u'}{\partial z} a_3 \\
&= a_1^2 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2^2 \frac{\partial v}{\partial y} + a_3^2 \frac{\partial w}{\partial z} \\
&\quad + a_2 a_3 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + a_3 a_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + a_1 a_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

oder

$$(9)\quad x'_{x'} = a_1^2 x_x + a_2^2 y_y + a_3^2 z_z + a_2 a_3 y_z + a_3 a_1 z_x + a_1 a_2 x_y,$$

und ähnlich:

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad y'_{x'} &= 2 a_1 b_1 x_x + 2 a_2 b_2 y_y + 2 a_3 b_3 z_z \\
&\quad + (a_2 b_3 + b_2 a_3) y_z + (a_3 b_1 + b_3 a_1) z_x + (a_1 b_2 + b_1 a_2) x_y \text{ [1]}.
\end{aligned}
$$

---

[1] Man kann diese Transformationen in folgender Regel zusammenfassen: Man bilde nach (5) die Produkte

$$x'^2,\quad y'^2,\quad z'^2,\quad y'z',\quad z'x',\quad x'y';$$

aus diesen erhält man

z'		$X'_{x'}$,	$Y'_{y'}$,	$Z'_{z'}$,	$Y'_{z'}$,	$Z'_{x'}$,	$X'_{z'}$ y'
	wenn man	x^2,	y^2,	z^2,	yz,	zx,	xy,
	durch	X_x,	Y_y,	Z_z,	Y_z,	Z_x,	X_y
	ersetzt, und	$x'_{x'}$,	$y'_{y'}$,	$z'_{z'}$,	$\frac{1}{2} y'_{z'}$,	$\frac{1}{2} z'_{x'}$,	$\frac{1}{2} x'_{y'}$,
	wenn man	x^2,	y^2,	z^2,	yz,	zx,	xy
	durch	x_x,	y_y,	z_z,	$\frac{1}{2} y_z$,	$\frac{1}{2} z_x$,	$\frac{1}{2} x_y$ ersetzt.

Wenn wir nun die Ausdrücke (4) in (8) substituieren, so erhält das Glied mit x_x in $Y'_{x'}$ den Koeffizienten

$$\varkappa a_1 b_1 + \lambda (a_2 b_2 + a_3 b_3) = (\varkappa - \lambda) a_1 b_1$$

(mit Hilfe der bekannten Relation $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$), und es ergibt sich:

$$Y'_{x'} = (\varkappa - \lambda)(a_1 b_1 x_x + a_2 b_2 y_y + a_3 b_3 z_z)$$
$$+ \mu [(a_2 b_3 + a_3 b_2) y_z + (a_3 b_1 + a_1 b_3) z_x + (a_1 b_2 + b_1 a_2) x_y],$$

und mit Hilfe von (10):

$$Y'_{x'} = \mu y'_{x'} + (\varkappa - \lambda - 2\mu)(a_1 b_1 x_x + a_2 b_2 y_y + a_3 b_3 z_z).$$

Nach der Voraussetzung 3. müßte aber

$$Y'_{x'} = \mu y'_{x'}$$

sein, und daraus folgt die Relation

$$\varkappa = \lambda + 2\mu. \tag{11}$$

Hiernach ergeben sich für die Komponenten des molekularen Druckes, wenn wir zur Abkürzung

$$\Theta = \operatorname{div} \mathfrak{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{12}$$

setzen, aus (4) die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} X_x &= \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & Y_z &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ Y_y &= \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & Z_x &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ Z &= \lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, & X_y &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Es ist daher

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{X} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ &= (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u, \end{aligned} \tag{14}$$

wenn wie früher

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{15}$$

gesetzt ist. Demnach ergeben sich die Differentialgleichungen für die Bewegung eines isotropen elastischen Körpers nach § 64 (2) in der Form:

$$
(16) \qquad
\begin{aligned}
\varrho\left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u = 0,\\
\varrho\left(Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta v = 0,\\
\varrho\left(Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta w = 0,
\end{aligned}
$$

und für das Gleichgewicht:

$$
(17) \qquad
\begin{aligned}
\varrho X + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u = 0,\\
\varrho Y + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta v = 0,\\
\varrho Z + (\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta w = 0.
\end{aligned}
$$

Wie wir aber gesehen haben, sind durch diese Gleichungen in Verbindung mit den Grenz- und Anfangsbedingungen, die Funktionen u, v, w noch nicht vollständig bestimmt, und wenn u_1, v_1, w_1 eine Lösung ist, so ist die allgemeine

$$
(18) \qquad
\begin{aligned}
u &= u_1 + a - ry + qz,\\
v &= v_1 + b - pz + rx,\\
w &= w_1 + c - qx + py,
\end{aligned}
$$

worin a, b, c, p, q, r Konstanten sind. Um diese sechs Konstanten zu bestimmen, können wir etwa noch die Forderung hinzufügen, daß für den Koordinatenanfangspunkt

$$
(19) \qquad
\begin{gathered}
u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0,\\
\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0
\end{gathered}
$$

sein soll, d. h. daß der Koordinatenanfangspunkt fest, und die Deformation seiner Umgebung eine reine Dehnung sein soll.

Nach (3) und (11) erhält die Funktion F die Form

$$
(20) \qquad F = \lambda(x_x + y_y + z_z)^2 + \mu(2x_x^2 + 2y_y^2 + 2z_z^2 + y_z^2 + z_x^2 + x_y^2),
$$

woraus zu schließen, daß F dann und nur dann eine positive Form ist, wenn λ und μ positiv sind.

Neunter Abschnitt.

Statische Probleme der Elastizitätstheorie.

§ 67.

Lineare Deformation.

Wenn wir von der Einwirkung äußerer Volumkräfte absehen, also X, Y, $Z = 0$ setzen, so sind die Gleichungen § 66 (17) befriedigt, wenn für u, v, w lineare Funktionen von x, y, z gesetzt werden. Dies gibt eine lineare Deformation des ganzen Systems, und diese ist, wenn wir die Annahme § 66 (19) für einen Punkt machen, für den ganzen Körper eine reine Dehnung. Wir setzen also [Bd. I, § 89 (3)]:

$$
\begin{aligned}
u &= \alpha x + \gamma' y + \beta' z, \\
v &= \gamma' x + \beta y + \alpha' z, \\
w &= \beta' x + \alpha' y + \gamma z,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

worin die α, β, γ, α', β', γ' Konstanten sind. Dadurch sind also die Hauptgleichungen des Gleichgewichtes befriedigt, und es ist noch die Frage, welchen Grenzbedingungen wir durch diese Annahme genügen können. Dazu bilden wir nach § 66 (13) die Komponenten der inneren Druckkräfte:

$$
\begin{aligned}
X_x &= \lambda(\alpha + \beta + \gamma) + 2\mu\alpha, & Y_z &= 2\mu\alpha', \\
Y_y &= \lambda(\alpha + \beta + \gamma) + 2\mu\beta, & Z_x &= 2\mu\beta', \\
Z_z &= \lambda(\alpha + \beta + \gamma) + 2\mu\gamma, & X_y &= 2\mu\gamma'.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Die Deformation (1) läßt sich also immer durch äußere Flächenkräfte gegen die Oberfläche hervorrufen, deren Komponenten nach § 61 (11) durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$
\begin{aligned}
\overline{X} &= \lambda\Theta\cos(nx) + 2\mu[\alpha\cos(nx) + \gamma'\cos(ny) + \beta'\cos(nz)], \\
\overline{Y} &= \lambda\Theta\cos(ny) + 2\mu[\gamma'\cos(nx) + \beta\cos(ny) + \alpha'\cos(nz)], \\
\overline{Z} &= \lambda\Theta\cos(nz) + 2\mu[\beta'\cos(nx) + \alpha'\cos(ny) + \gamma\cos(nz)],
\end{aligned}
\tag{3}
$$

worin n die nach außen gerichtete Normale und

(4) $$\Theta = \alpha + \beta + \gamma$$

die Vergrößerung der Volumeneinheit oder die räumliche Dilatation ist.

Ist P die Kraft, die auf ein Oberflächenelement wirkt, bezogen auf die Flächeneinheit, so ist

(5) $$\overline{X} = P\cos(Px), \quad \overline{Y} = P\cos(Py), \quad \overline{Z} = P\cos(Pz).$$

§ 68.

Beispiel I. Allseitig wirkende Zugkraft.

Wir betrachten einige spezielle Fälle. Es sei die äußere Kraft P konstant und habe die Richtung der (äußeren) Normale n. Dann ist

$$\overline{X} = P\cos(nx), \quad \overline{Y} = P\cos(ny), \quad \overline{Z} = P\cos(nz),$$

und die Gleichungen § 67 (3) werden befriedigt, wenn

$$\alpha = \beta = \gamma, \quad \alpha' = \beta' = \gamma' = 0,$$

(1) $$\Theta = 3\alpha, \qquad P = (3\lambda + 2\mu)\alpha = \frac{\Theta(3\lambda + 2\mu)}{3},$$

$$\Theta = \frac{3}{3\lambda + 2\mu} P$$

gesetzt wird. Wenn also gegen die Oberfläche eines isotropen elastischen Körpers eine überall gleiche Zugkraft ausgeübt wird, so tritt eine allseitig gleichmäßige Dehnung ein und die Volumenvergrößerung ist mit der Zugkraft proportional. Es ist $\lambda + \frac{2\mu}{3}$ die Flächenkraft, die erforderlich wäre, um das Volumen auf das Doppelte zu vergrößern (wenn bei solchen Kräften die hier angenommenen Gesetze noch gültig wären).

Wenn statt der Zugkraft eine Druckkraft wirkt, d. h. wenn P die Richtung der inneren Normalen hat, so tritt an Stelle der Dilatation eine Kompression, die denselben Gesetzen folgt.

§ 69.

Beispiel II. Konstante Zugkraft gegen die Endflächen eines Zylinders.

Wir betrachten zweitens einen geraden Zylinder von beliebiger Grundfläche, gegen dessen beide Endflächen konstante und einander entgegengesetzt gleiche Zugkräfte P wirken, während die Mantelfläche nicht von Kräften angegriffen ist.

Legen wir die z-Achse in die Richtung der Zylinder-Erzeugenden, so ist an der einen Endfläche, wo z den größeren Wert hat,

$$\overline{X}=0,\quad \overline{Y}=0,\quad \overline{Z}=P,\ \cos(nx)=0,\ \cos(ny)=0,\ \cos(nz)=1$$

und an der anderen Endfläche

$$\overline{X}=0,\quad \overline{Y}=0,\quad \overline{Z}=-P,\quad \cos(nx)=0,\quad \cos(ny)=0,$$
$$\cos(nz)=-1.$$

Beide Systeme von Gleichungen sind miteinander verträglich und geben nach § 67 (3):

$$(1)\qquad P=\lambda\Theta+2\mu\gamma,\qquad \alpha'=0,\qquad \beta'=0.$$

Für die Mantelfläche ist $\overline{X}=0$, $\overline{Y}=0$, $\overline{Z}=0$, $\cos(nz)=0$; also ergeben sich mit Benutzung von (1) noch die Gleichungen:

$$(2)\qquad \lambda\Theta+2\mu\alpha=0,\quad \lambda\Theta+2\mu\beta=0,\quad \gamma'=0,$$

also:

$$(3)\qquad \alpha=\beta=-\frac{\lambda\Theta}{2\mu},\quad \Theta=2\alpha+\gamma=-\frac{2\mu\alpha}{\lambda},$$
$$P=-2\mu(\alpha-\gamma),$$

und daraus:

$$\gamma=\frac{(\lambda+\mu)P}{\mu(3\lambda+2\mu)},$$

$$(4)\qquad -\alpha=\frac{\lambda P}{2\mu(3\lambda+2\mu)},$$

$$\Theta=\frac{P}{3\lambda+2\mu},\qquad \frac{-\alpha}{\gamma}=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}.$$

Man sieht hieraus, daß mit der Längendilatation γ, die durch die Zugkraft P hervorgebracht ist, immer eine Querkontraktion $-\alpha$ verbunden ist, die durch die letzte Formel (4) bestimmt wird. Setzt man

$$E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu},\qquad \sigma=\frac{-\alpha}{\gamma}=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)},$$

so ist E die Zugkraft, die erforderlich wäre, um $\gamma=1$ zu machen, also die Länge des ganzen Zylinders zu verdoppeln. Diese Größe heißt der Elastizitätsmodulus; σ ist eine zweite Konstante, nämlich das Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation. Da eine Zugkraft das Volumen niemals verkleinert, so ist $-2\alpha < \gamma$ und folglich $\sigma < 1/_2$. E, σ sind Konstanten der Substanz, die an Stelle von λ und μ eingeführt werden können.

Man erhält:

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)},$$
$$(5) \qquad \lambda + \mu = \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)}\text{[1]}.$$

Da λ und μ positiv sind, so ist $\lambda/(\lambda+\mu)$ ein echter Bruch und folglich

$$\sigma < \tfrac{1}{2}.$$

Für die Komponenten des molekularen Druckes erhält man nach § 67 (2):

$$X_x = 0, \qquad Y_y = 0, \qquad Z_z = P,$$
$$Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

§ 70.

Beispiel III. Konstante Zugkraft gegen die Mantelfläche eines Zylinders.

Wir nehmen jetzt an, daß gegen die Mantelfläche des Zylinders in normaler Richtung eine konstante Zugkraft P wirkt, während die Endflächen frei sind. Legen wir wieder die z-Achse in die Richtung der Zylinder-Erzeugenden, so hat man wegen der Endflächen die Bedingungen:

$$(1) \qquad \beta' = 0, \qquad \alpha' = 0, \qquad \lambda\Theta + 2\mu\gamma = 0$$

und wegen der Mantelfläche:

$$(2) \qquad \gamma' = 0, \qquad \lambda\Theta + 2\mu\alpha = \lambda\Theta + 2\mu\beta = P,$$

also:

---

[1]) Die Dimensionen der hier auftretenden Größen sind:

$$[\varrho] = [ml^{-3}], \ [X] = [lt^{-2}], \ [\bar{X}] = [P] = [ml^{-1}t^{-2}]$$
$$[\lambda] = [\mu] = [E] = [ml^{-1}t^{-2}].$$

Die Konstante σ ist eine reine Zahl, deren Wert Poisson aus der Molekulartheorie gleich $1/_4$ abgeleitet hat, was die Relation $\lambda = \mu$ ergeben würde. Spätere Beobachtungen haben aber diese Annahme von Poisson nicht bestätigt, und es müssen nach unserer jetzigen Kenntnis λ und μ oder E und σ als zwei voneinander unabhängige Elastizitätskonstanten angenommen werden.

$$(3)\quad \begin{aligned} \alpha = \beta &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} P, \\ \gamma &= \frac{-\lambda}{\mu(3\lambda + 2\mu)} P, \\ \Theta &= \frac{2P}{(3\lambda + 2\mu)}, \end{aligned}$$

und für die Komponenten des molekularen Druckes aus § 67 (2):

$$(4)\quad \begin{aligned} X_x = Y_y = P, \quad Z_z = 0 \\ Y_z = Z_x = X_y = 0. \end{aligned}$$

§ 71.
Torsion.

Die ersten Lösungen allgemeinerer statischer Probleme der Elastizitätstheorie hat St. Venant gegeben, der die Biegung und Torsion eines elastischen Stabes unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen in einer großen Zahl von Fällen untersucht hat. Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung der Torsion, für die die Formeln die einfachste Gestalt annehmen. In bezug auf die etwas weitläufigere Theorie der Biegung verweisen wir auf die Lehrbücher der Elastizitätstheorie [1]).

Wir betrachten einen zylindrischen Stab, und sehen von dem Einfluß äußerer Volumkräfte ab. Die Gestalt des Querschnittes dieses Stabes bleibt einstweilen unbestimmt. Wir nehmen die Deformation $\mathfrak{U}$ folgendermaßen an. Jeder ursprünglich ebene Querschnitt erleidet eine Drehung um eine den Erzeugenden der Zylinderfläche parallele Achse. Diese Achse ist für alle Querschnitte dieselbe, und soll die Stabachse heißen. Der Drehungswinkel ist proportional mit der Entfernung von einem festen, etwa dem mittleren Querschnitt, so daß der mittlere Querschnitt nicht gedreht erscheint.

Außerdem wird noch eine Verschiebung parallel zur Stabachse angenommen, wodurch die ursprünglich ebenen Querschnitte

---

[1]) Saint Venant, De la Torsion des Prismes, avec des considérations sur leur flexion. Mémoires des Savants étrangers. 1855. Liouville Journal, II. série, tome I, 1855/56.

Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, S. 70 f. Leipzig 1862.

Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity, vol. I, p. 146 f. Cambridge 1892.

Thomson und Tait, Theoretische Physik. Deutsch von Helmholtz und Wertheim. Bd. II, S. 222 f.

gekrümmt werden. Diese Formänderung soll für alle Querschnitte dieselbe sein. Es ist nicht nötig (z. B. bei einem Hohlzylinder), daß die Stabachse der Materie des Stabes selbst angehört. Wenn es aber der Fall ist, so ist die Achse eine Faser des Stabes, die keine Verschiebung senkrecht zu ihrer Richtung erfahren hat.

Wir legen die z-Achse in die Stabachse, ihren Nullpunkt in den ungedrehten Querschnitt.

Die gemachten Voraussetzungen drücken sich dann durch die Formeln aus:

$$u = -\omega z y, \qquad v = \omega z x, \tag{1}$$

worin ω eine Konstante und ωz der unendlich kleine Drehungswinkel für den Querschnitt z ist.

Die dritte Komponente w ist eine Funktion von x, y allein.

Wir setzen

$$w = \omega \varphi(x, y) \tag{2}$$

und fragen, welche inneren Flächenkräfte imstande sind, eine solche Deformation zu bewirken.

Eine in der natürlichen Lage der z-Achse parallele Faser $x = x_0$, $y = y_0$ hat nach eingetretener Deformation die Gleichungen:

$$x = x_0 - \omega z y_0, \qquad y = y_0 + \omega z x_0$$

und ist also geradlinig, aber nicht parallel geblieben. Durch eine Drehung des Stabes als Ganzes nach der Deformation kann man daher jede Längsfaser des Stabes zur Stabachse machen.

Aus den Annahmen (1), (2) ergibt sich:

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

und für die Komponenten des molekularen Druckes findet sich nach § 66 (13):

$$\begin{aligned} &X_x = 0, \quad Y_y = 0, \quad Z_z = 0, \quad X_y = 0, \\ &X_z = Z_x = \mu\omega\left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \\ &Y_z = Z_y = \mu\omega\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \end{aligned} \tag{4}$$

und die Differentialgleichungen § 66 (17) reduzieren sich auf die eine:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Wir nehmen ferner an, daß gegen die Mantelfläche des Stabes keine äußeren Druckkräfte wirken.

Da an der Mantelfläche $\cos(nz) = 0$ ist, so sind von den Bedingungen § 61 (11) die beiden ersten nach (4) identisch befriedigt, und die dritte gibt

$$Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) = 0$$

oder nach (4)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(ny) - y \cos(nx) + x \cos(ny) = 0. \tag{6}$$

Die Bedingung (6), in der n die nach außen gerichtete Normale bedeutet, bezieht sich auf die Begrenzung der in der xy-Ebene gelegenen Querschnittsfläche und ist eine Grenzbedingung zur Bestimmung der Funktion φ aus der Differentialgleichung (5).

Aus (5) und (6) ist die Funktion φ bis auf eine additive Konstante bestimmt. Zur Bestimmung dieser Konstanten können wir annehmen, daß $\varphi = 0$ sein soll für $x = 0$, $y = 0$. Dann haben die Punkte der Stabachse überhaupt keine Verschiebung erfahren, und man kann sich diesen Zustand z. B. dadurch hervorgerufen denken, daß man zwei Punkte der Stabachse in den beiden Endflächen als befestigt annimmt.

Über die auf den Endflächen anzubringenden Druckkräfte können wir jetzt nicht mehr willkürlich verfügen. Da an diesen Endflächen $\cos(nx) = 0$, $\cos(ny) = 0$ und an der einen $\cos(nz) = +1$, an der anderen $\cos(nz) = -1$ ist, so ergibt sich für die erstere, die wir obere nennen wollen:

$$\begin{aligned} \overline{X} &= X_z = \mu\omega\left(-y + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \\ \overline{Y} &= Y_z = \mu\omega\left(x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right), \\ \overline{Z} &= Z_z = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

und für die untere Endfläche erhält man gleiche und entgegengesetzte Druckkräfte.

Die gegen die Endfläche wirkenden Druckkräfte sind also tangential. Ihre Verteilung über die Flächen ist aber erst bekannt, wenn die Funktion φ bestimmt ist.

Die Kräfte $\overline{X}$, $\overline{Y}$, die auf die obere Endfläche wirken, geben ein Drehungsmoment M in bezug auf die Stabachse, und auf der unteren Endfläche erhält man ein gleiches aber entgegengesetztes Moment, so daß sie sich am **starren** Stabe aufheben würden. Die Größe dieses Drehungsmomentes ist, wenn dq ein Element der Querschnittsfläche bedeutet, und die Integration über die ganze Fläche des Querschnittes ausgedehnt wird,

$$
\begin{aligned}
(8) \qquad M &= \int (x\,\overline{Y} - y\,\overline{X})\,dq \\
&= \mu\,\omega \left[\int (x^2 + y^2)\,dq + \int \left(x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dq \right],
\end{aligned}
$$

und man kann also ω so bestimmen, daß dieses Moment M einen gegebenen Wert hat.

In den wirklich vorkommenden Fällen der Torsion eines Stabes wird man kaum je in der Lage sein, die Verteilung des Druckes über die Endflächen genau zu bestimmen; wirklich bestimmbar wird immer nur die Resultante sein. Wenn wir aber die Druckkräfte, bei Festhaltung der Resultanten, anders über die Endflächen verteilen, so wird zwar im ganzen Stabe der Zustand geändert, die Änderung wird aber, wenn die Länge des Stabes groß ist im Vergleich zu seinen Querdimensionen, nur in der Nähe der Enden merklich sein. Darum wird man die Resultate der **Saint Venant**schen Theorie, trotz der unbekannten Verteilung des Druckes auf die Endflächen, doch als eine gute Annäherung an die Fälle der Wirklichkeit betrachten dürfen [1]).

§ 72.

Zurückführung auf die Funktionentheorie.

Die definitive Lösung des Torsionsproblems in einem bestimmten Falle, d. h. für eine bestimmte Gestalt des Querschnittes, ist im vorigen Paragraphen auf die Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

mit der Grenzbedingung:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(ny) - y \cos(nx) + x \cos(ny) = 0$$

[1]) Bei der allgemeinen **Saint Venant**schen Theorie, die außer der Torsion auch noch die Biegung berücksichtigt, werden statt der einen Konstante ω deren sechs eingeführt. Diese lassen sich so bestimmen, daß die resultierende Kraft und das resultierende Drehungsmoment der Druckkräfte auf einen der Endquerschnitte beliebige Werte erhalten.

zurückgeführt, und weist also auf die Theorie der Funktionen eines komplexen Argumentes hin. Die Gleichung (1) besagt nämlich, daß φ der reelle Teil einer Funktion

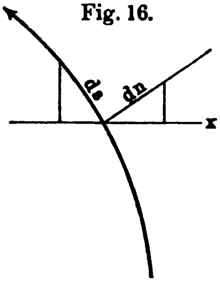
(3) $$\chi = \varphi + i\psi$$

des komplexen Argumentes

$$z = x + iy$$

ist (wobei das jetzige z nicht mit der dritten Koordinate zu verwechseln ist). Der Grenzbedingung (2), die sich auf die Begrenzungslinie des Querschnittes, also auf eine in der xy-Ebene geschlossene Linie bezieht, können wir auch eine andere Gestalt geben, durch die sie vereinfacht wird.

Fig. 16.



Wir bezeichnen mit s die auf der Begrenzung gemessene Bogenlänge, positiv in dem Sinne gerechnet, daß die positiven dn zu den positiven ds so liegen, wie die positive x-Achse zur positiven y-Achse. Dann ist, wenn wir x, y in der Nähe des Randes als Funktionen von n, s betrachten (Fig. 16):

(4) $$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s} = \cos(nx), \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s} = \cos(ny);$$

außerdem ist

(5) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

und es ergibt sich also aus (2):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} = y\frac{\partial y}{\partial s} + x\frac{\partial x}{\partial s}$$

oder

(6) $$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{1}{2}\frac{\partial (x^2 + y^2)}{\partial s}.$$

Setzen wir

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

so können wir die Gleichung (6) in bezug auf s integrieren und erhalten, wenn c eine Konstante bedeutet,

(7) $$2\psi = r^2 - c.$$

Die Funktion ψ genügt außerdem derselben Differentialgleichung wie φ, nämlich:

(8) $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

und wir haben also diese Gleichung unter der Voraussetzung zu integrieren, daß ψ am Rande die durch (7) gegebenen Werte hat. Die Aufgabe ist also zurückgeführt auf die Bestimmung eines logarithmischen Potentials bei gegebenen Randwerten, die wir in § 143 f. und § 181 f. des ersten Bandes behandelt haben.

Nach (5) und § 71 (4) ergeben sich für die Tangentialkräfte an den Querschnitten:

$$
(9) \qquad \begin{aligned}
2\,X_s &= \quad \mu\omega\,\frac{\partial(2\,\psi - r^2)}{\partial y},\\
2\,Y_s &= -\,\mu\omega\,\frac{\partial(2\,\psi - r^2)}{\partial x},
\end{aligned}
$$

und hieraus durch Integration nach (7):

$$
(10) \qquad \begin{aligned}
\int X_s dq &= \frac{\mu\omega c}{2}\int dx = 0,\\
\int Y_s dq &= \frac{\mu\omega c}{2}\int dy = 0,
\end{aligned}
$$

da sich die einfachen Integrale über dx und dy auf die Grenze des Querschnittes beziehen.

Die tangentialen Druckkräfte X_s, Y_s oder $\overline{X}$, $\overline{Y}$ gegen die Querschnitte geben also außer dem Drehungsmoment M keine resultierenden Kräfte. Der Stab als Ganzes bleibt also durch die äußeren Druckkräfte im Gleichgewicht[1]).

Saint Venant hat für dieses Problem einen Weg eingeschlagen, der sehr fruchtbar an einfachen und anschaulichen Resultaten ist. Dieser Weg besteht darin, daß man über die Funktion χ eine einfache Annahme macht, und dann aus der Grenzbedingung (7) die Gestalt eines Querschnittes ableitet, für die diese Annahme eine Lösung gibt. Wir geben dafür im folgenden ein einfaches Beispiel.

---

[1]) Hierauf hat zuerst J. A. Vollgraff aufmerksam gemacht (Zur Elastizitätstheorie, Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. 14, 1904).

In der vorigen Auflage dieses Werkes (Bd. II, § 70) war dies übersehen und es schien daher, als ob in manchen Fällen zur Herstellung des Gleichgewichts des Stabes als Ganzes unter Umständen noch ein äußeres Drehungsmoment oder eine Beschränkung der Beweglichkeit nötig sei.

§ 73.

Beispiel.

Nehmen wir zunächst $\chi = \text{const.}$, so ergibt die Grenzbedingung § 72 (7) einen kreisförmigen Querschnitt. Die Gleichung § 71 (2) zeigt, daß die Verschiebung in der Richtung der Stabachse, w, über den ganzen Querschnitt konstant ist.

Für die Druckkomponenten X_s, Y_s erhalten wir aus § 71 (4):

$$X_s = -\mu\omega y, \quad Y_s = \mu\omega x,$$

und daraus die Resultante

$$S_s = \sqrt{X_s^2 + Y_s^2} = \mu\omega r.$$

Diese Kraft steht senkrecht auf dem Radius r. Sie wirkt in der Ebene des Querschnittes auf Zerreißung des Stabes, und wird die scherende Kraft genannt. Wir wollen sie auch kurz als Spannung bezeichnen. Die Spannung wächst also in diesem Falle mit r und ist am größten an der Peripherie.

Wir wollen ferner für χ eine Potenz von z nehmen:

$$\chi = -i a z^m, \tag{1}$$

worin a ein konstanter Faktor und m eine ganze positive Zahl ist. Den Faktor a können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, reell und positiv annehmen. Es ergibt sich daraus, wenn wir Polarkoordinaten r, ϑ einführen und

$$z = r e^{i\vartheta} \tag{2}$$

setzen:

$$\varphi = a r^m \sin m\vartheta, \quad \psi = -a r^m \cos m\vartheta, \tag{3}$$

und es ist also die Verschiebung in der Richtung der Stabachse:

$$w = a\omega r^m \sin m\vartheta. \tag{4}$$

Nehmen wir $a\omega$ positiv an, so ist die Deformation des Querschnittes hier so beschaffen, daß vom Nullpunkt $2m$ Strahlen auslaufen, in denen die Verrückung gleich Null ist, und in den $2m$ Sektoren, die hierdurch gebildet werden, ist w abwechselnd positiv und negativ.

Für die Komponenten der Spannung erhalten wir nach § 72 (9):

$$\begin{aligned} X_s &= -\frac{\mu\omega}{2}\frac{\partial(r^2 - 2\psi)}{\partial y}, \\ Y_s &= \frac{\mu\omega}{2}\frac{\partial(r^2 - 2\psi)}{\partial x}, \end{aligned} \tag{5}$$

und mit Rücksicht auf

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\chi}{dz}:$$

$$X_s - iY_s = \mu\omega\left(-y - ix + \frac{d\chi}{dz}\right)$$

$$= -\mu\omega\{r\sin\vartheta + ir\cos\vartheta + iamr^{m-1}[\cos(m-1)\vartheta + i\sin(m-1)\vartheta]\},$$

also:

$$(6)\qquad \begin{aligned} X_s &= -\mu\omega\,[r\sin\vartheta - amr^{m-1}\sin(m-1)\vartheta], \\ Y_s &= +\mu\omega\,[r\cos\vartheta + amr^{m-1}\cos(m-1)\vartheta], \end{aligned}$$

und wenn man daraus die Resultante S_s bildet:

$$(7)\quad S_s = \sqrt{X_s^2 + Y_s^2} = \mu\omega\sqrt{r^2 + a^2m^2r^{2m-2} + 2amr^m\cos m\vartheta}.$$

Die Spannung kann in einzelnen Punkten $= 0$ sein. In diesen Punkten muß $X_s = 0$, $Y_s = 0$ sein. Es findet dies statt, entweder wenn $r = 0$ und $m > 1$ ist, also in der Stabachse, oder in Punkten, in denen $\sin m\vartheta = 0$, $\cos m\vartheta = -1$, also

$$(8)\qquad \vartheta = \frac{\pi}{m},\quad \frac{3\pi}{m},\ \ldots,\quad \frac{(2m-1)\pi}{m}$$

und

$$(9)\qquad mar^{m-2} = 1.$$

Die Spannung ist bei gleichbleibendem r ein Maximum, wenn $\cos m\vartheta = 1$ ist, also bei

$$(10)\qquad \vartheta = 0,\quad \frac{2\pi}{m},\quad \frac{4\pi}{m}\ \ldots\ \frac{(2m-2)\pi}{m}.$$

Dies Maximum hat den Wert

$$(11)\qquad S_s = \mu\omega(r + amr^{m-1}),$$

und wächst also mit wachsendem r.

§ 74.

Elliptischer Querschnitt.

Die Begrenzung des Querschnittes, für den die im vorigen Paragraphen angenommene Funktion χ die Lösung gibt, erhält man aus der Gleichung § 72 (7):

$$r^2 - 2\psi = c,$$

also für unsere Annahme, § 73 (3):

$$(1)\qquad r^2 + 2ar^m\cos m\vartheta = c.$$

Für den einfachsten Fall $m = 1$ erhält man:

$$x^2 + y^2 + 2ax = c, \tag{2}$$

also einen **kreisförmigen Querschnitt**, bei dem die Stabachse aber nicht im Mittelpunkte liegt. Die scherende Kraft ist nach § 73 (7)

$$S_z = \mu\omega\sqrt{(x+a)^2 + y^2},$$

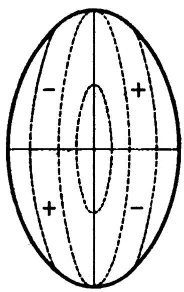
also in konzentrischen Kreisen konstant und an der Peripherie am größten, ebenso wie in dem Falle des konstanten χ.

Für $m = 2$ ergibt sich als Grenze für den Querschnitt aus (1):

$$(1+2a)x^2 + (1-2a)y^2 = c. \tag{3}$$

Da die Kurve geschlossen sein muß, so kann dies nur eine Ellipse sein. Es muß also, da wir a positiv angenommen haben, c positiv und $2a < 1$ sein. Dann sind die Halbachsen dieser Ellipse

Fig. 17.



$$\alpha = \sqrt{\frac{c}{1+2a}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{c}{1-2a}}, \quad \alpha < \beta, \tag{4}$$

und können also durch Verfügung über a und c beliebig vorgeschriebene Werte haben. Für die Verschiebung w ergibt sich aus § 73 (4):

$$w = \omega\varphi = 2a\omega xy, \tag{5}$$

und die Kurven eines konstanten w sind gleichseitige Hyperbeln. In den Achsen der Ellipse ist $w = 0$ und in den vier Quadranten abwechselnd positiv und negativ. Für die Spannung erhält man nach § 73, (6), (7):

$$X_z = -\mu\omega(1-2a)y, \qquad Y_z = \mu\omega(1+2a)x \tag{6}$$

$$S_z = \mu\omega c\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4}}. \tag{7}$$

Die Linien gleicher Spannung sind also hier ähnliche Ellipsen, aber sie weichen stärker von der Kreisgestalt ab, als die Grenzellipse des Querschnittes (Fig. 17). Man sieht, daß die am stärksten durch die Spannung beanspruchte Faser nicht am Endpunkte der großen, sondern am **Endpunkte der kleinen Achse liegt**.

§ 75.

Kannelierte Säulen.

Wenn in dem Beispiel des § 73 $m > 2$ ist, so gibt es Punkte in der Querschnittslinie, in denen die Spannung gleich Null wird, und wir können die Konstanten in der Gleichung der Grenzkurve

$$(1) \qquad r^2 - 2\psi = c$$

so bestimmen, daß diese Punkte auf der Grenze liegen. Diese Punkte sind dann, wie man aus der Gleichung § 73 (5) ersieht, Doppelpunkte der Kurve (1) und werden sich also an dem Stabe als scharfe Kanten darstellen. Das Beispiel des § 73 bezieht sich also bei dieser Bestimmung der Konstanten auf kannelierte Säulen mit m Rippen. Die Spannung ist Null an den Kanten, und erreicht ihr Maximum am Boden der Rinnen. Der Querschnitt ist in $2m$ Sektoren geteilt, in denen w abwechselnd positiv und negativ ist.

Wenn die durch (1) oder

$$(2) \qquad r^2 + 2ar^m \cos m\vartheta = c$$

dargestellte Kurve durch die Punkte verschwindender Spannung hindurchgehen soll, so muß sie erfüllt sein für

$$\cos m\vartheta = -1, \qquad r = (ma)^{\frac{1}{2-m}} \text{ [§ 73, (8), (9)]},$$

und daraus ergibt sich für c der Wert:

$$(3) \qquad c = (ma)^{\frac{2}{2-m}} \frac{m-2}{m}.$$

Die Gleichung (2) stellt eine algebraische Kurve $m$ter Ordnung dar und man kann sie in rechtwinkligen Koordinaten in der Form darstellen:

$$(4) \qquad x^2 + y^2 +$$
$$2a\left(x^m - \frac{m.m-1}{2} x^{m-2} y^2 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} x^{m-4} y^4 - \dots\right) = c.$$

Für $m = 3$ und $m = 4$ hat die Kurve, bei dem Werte (3) der Konstante c, drei oder vier Doppelpunkte, und muß in diesen beiden Fällen in Kurven niedrigeren Grades zerfallen.

Für $m = 3$ erhält man $c = 1/27\,a^2$ und folglich wird die Gleichung der Grenzlinie:

$$27\,a^2(x^2 + y^2) + 54\,a^3(x^3 - 3xy^2) - 1 = 0,$$

die sich in die drei Gleichungen:

$$
(5) \qquad \begin{aligned} 1 - 6ax &= 0, \\ 1 + 3ax + 3\sqrt{3}ay &= 0, \\ 1 + 3ax - 3\sqrt{3}ay &= 0 \end{aligned}
$$

zerlegen läßt. Man erhält also einen dreikantigen Stab, dessen Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist. (Fig. 18.)

Fig. 18.

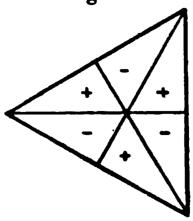
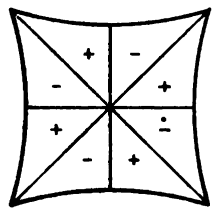


Fig. 19.



Für $m = 4$ zerfällt die Kurve (4) in zwei Hyperbeln (Fig. 19), die man leicht auf folgende Weise erhält. Es ist hier $c = 1/8a$ und also nach (2):

$$16a^2r^4 \cos 4\vartheta + 8ar^2 = 1,$$

und durch Auflösung dieser für r^2 quadratischen Gleichung:

$$(6) \qquad 4ar^2 \cos 4\vartheta = -1 \pm \sqrt{2}\cos 2\vartheta.$$

Es ist aber

$$\cos 4\vartheta = (\sqrt{2}\cos 2\vartheta + 1)(\sqrt{2}\cos 2\vartheta - 1),$$

und daher nach (6):

$$4ar^2(1 \pm \sqrt{2}\cos 2\vartheta) = 1,$$

oder in rechtwinkligen Koordinaten:

$$(7) \qquad (1 \pm \sqrt{2})x^2 + (1 \mp \sqrt{2})y^2 = \frac{1}{4a},$$

wodurch zwei kongruente Hyperbeln dargestellt sind, die um 90° gegeneinander gedreht sind, die sich in vier reellen Punkten schneiden. In diesen Schnittpunkten ist $x^2 = y^2$, und für ihre Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt erhält man:

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Die reelle Achse β der Hyperbeln erhält man aus (7), wenn man x oder $y = 0$ setzt:

$$\beta = \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{1 + \sqrt{2}}} = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}}.$$

Das Maximum α von r ist also ungefähr $1^1/_2$mal so groß als das Minimum β.

Zehnter Abschnitt.

Druck auf eine elastische Unterlage.

§ 76.

Gleichgewicht eines von einer unendlichen Ebene begrenzten Körpers.

Wir denken uns einen elastischen Körper, der von einer Ebene, die wir zur xy-Ebene nehmen, einseitig begrenzt ist, sonst aber keine Begrenzung hat. Gegen diese Fläche sollen äußere Flächendrucke wirken. Von äußeren Volumkräften sehen wir wieder ab. Gegen das Innere des Körpers wollen wir z positiv nehmen. Im Unendlichen soll der Körper in seinem natürlichen Zustande verharren, was dadurch ausgedrückt sei, daß die Deformationskomponenten u, v, w im Unendlichen so verschwinden, daß

$$(1) \qquad Ru, \quad Rv, \quad Rw,$$

wenn R die Entfernung eines veränderlichen Punktes von einem festen Punkte bedeutet, mit unendlich wachsendem R endlich bleiben.

Der Gleichgewichtszustand ist eindeutig bestimmt, wenn an der Oberfläche $z = 0$ noch die Komponenten der Flächenkräfte

$$(2) \qquad \overline{X} = X_z, \quad \overline{Y} = Y_z, \quad \overline{Z} = Z_z$$

gegeben sind. Ebenso ist aber auch das Problem bestimmt, wenn für $z = 0$ die Komponenten der Verschiebung

$$(3) \qquad u, \quad v, \quad w$$

gegeben sind, oder noch allgemeiner, es ist bestimmt, wenn von jedem der drei Paare

$$(4) \qquad X_z, u; \quad Y_z, v; \quad Z_z, w$$

eine Größe für $z = 0$ gegeben ist (§ 65, 2.).

Das Problem ist allgemein gelöst von Boussinesq[1]) durch Anwendung der Theorie der Potentiale, auf anderem Wege von Ceruti[2]) unter Benutzung von Sätzen, die man Betti[3]) verdankt, nach einer Methode, die mit der Greenschen Methode in der Potentialtheorie verwandt ist (Bd. I, § 103). Wir wollen hier einen anderen Weg gehen, der von der Fouriersche Methode der partikularen Lösungen Gebrauch macht.

Wir wenden den Fourierschen Lehrsatz für Funktionen zweier Variablen in der Form an, die wir ihm im ersten Bande § 21 (4) gegeben haben:

$$(5) \quad f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta)\, e^{i\alpha(x-\xi)+i\beta(y-\eta)}\, d\xi\, d\eta,$$

und hierin kann die Funktion $f(xy)$ auch komplex sein, d. h. die Form haben:

$$f(x, y) = f_1(x, y) + i f_2(x, y).$$

§ 77.

Darstellung der Verrückungen u, v, w durch Doppelintegrale.

Wenn wir mit $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ die Komponenten des gegen die Fläche $z = 0$ gerichteten äußeren Druckes bezeichnen, so haben wir, weil jetzt die innere Normale mit der Richtung der positiven z-Achse zusammenfällt, nach § 61 (11) für die Fläche $z = 0$

$$X_z = -\overline{X}, \quad Y_z = -\overline{Y}, \quad Z_z = -\overline{Z},$$

und das in § 76 gestellte Problem erhält nach § 66 (17) folgenden Ausdruck:

Es sollen u, v, w als Funktionen der Koordinaten x, y, z für positive z und für alle x, y bestimmt werden, so daß überall im Innern dieses Gebietes die Differentialgleichungen

---

[1]) Boussinesq, Applications des potentiels directes, inverses, logarithmiques. Paris 1895.

[2]) Ceruti, Ricerche intorno all'equilibrio de corpi elastici isotropi Accademia dei Lincei 1882.

[3]) Betti, Nuovo Cimento 1872.

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$(1) \qquad \begin{aligned} &(\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta u = 0, \\ &(\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta v = 0, \\ &(\lambda + \mu)\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta w = 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind, und daß, wenn für $z = 0$

$$(2) \qquad \begin{aligned} u &= U, \quad X_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\overline{X}, \\ v &= V, \quad Y_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\overline{Y}, \\ w &= W, \quad Z_z = \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = -\overline{Z} \end{aligned}$$

gesetzt wird, von jedem der drei Funktionenpaare $U, \overline{X}$; $V, \overline{Y}$; $W, \overline{Z}$ eine eine gegebene Funktion von x, y sei.

Außerdem sollen u, v, w, Θ für unendliche Werte von x, y und für unendlich große positive Werte von z verschwinden.

Da die Differentialgleichungen (1) linear sind, so kann man aus mehreren partikularen Lösungen u_1, v_1, w_1; $u_2, v_2, w_2 \ldots$ allgemeinere Lösungen

$$(3) \quad u = u_1 + u_2 + \cdots, \quad v = v_1 + v_2 + \cdots, \quad w = w_1 + w_2 + \cdots$$

zusammensetzen, und wenn man unendlich viele partikulare Lösungen hat, so kann man auf diesem Wege Lösungen, je nach Umständen in Gestalt von unendlichen Reihen oder von bestimmten Integralen ableiten. Es kommt also jetzt zunächst darauf an, geeignete partikulare Lösungen zu finden, die noch die hinlängliche Anzahl unbestimmter Parameter enthalten, daß man auch den Grenzbedingungen genügen kann.

Ein solches partikulares Integral finden wir durch die Annahme:

$$(4) \qquad \begin{aligned} u &= (a + ih\alpha z)e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \\ v &= (b + ih\beta z)e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \\ w &= (c + ih\gamma z)e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \end{aligned}$$

worin a, b, c, α, β, γ, h Konstanten sind, über die noch nähere Bestimmungen getroffen werden sollen. Wir nehmen zunächst die Relation zwischen α, β, γ an:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \tag{5}$$

und erhalten:

$$\Theta = [a\alpha + b\beta + (c + h)\gamma]\, i\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \tag{6}$$

und ferner:

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\, 2h\alpha\gamma\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \\ \Delta v &= -\, 2h\beta\gamma\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \\ \Delta w &= -\, 2h\gamma\gamma\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Differentialgleichungen (1) ein, so findet man, daß diese alle drei befriedigt sind, wenn man zwischen den Konstanten die Relation annimmt:

$$-(\lambda + 3\mu)h\gamma = (\lambda + \mu)(a\alpha + b\beta + c\gamma), \tag{8}$$

wodurch h als Funktion der übrigen Konstanten bestimmt ist. Wir nehmen α und β reell an und setzen nach (5)

$$\gamma = i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \tag{9}$$

worin das positive Zeichen der Wurzel genommen ist, damit u, v, w für $z = +\infty$ verschwinden. Wir setzen dann

$$\begin{aligned} a &= A(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = A\, d\alpha\, d\beta, \\ b &= B(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = B\, d\alpha\, d\beta, \\ c &= C(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = C\, d\alpha\, d\beta, \end{aligned} \tag{10}$$

und verstehen unter A, B, C willkürliche Funktionen der Argumente α, β, ferner setzen wir

$$h = H(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta = H\, d\alpha\, d\beta, \tag{11}$$

und nach (8)

$$\gamma H = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}(\alpha A + \beta B + \gamma C). \tag{12}$$

Dann ergeben sich aus (4) allgemeine Ausdrücke für u, v, w:

$$\begin{aligned} u &= \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta\, (A + i\alpha H z)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \\ v &= \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta\, (B + i\beta H z)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \\ w &= \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, d\beta\, (C + i\gamma H z)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Funktionen A, B, C und folglich auch H werden im allgemeinen komplex sein, während doch u, v, w in (13) reell sein müssen. Dies wird unter folgender Voraussetzung eintreten:

Die Funktionen $A(-\alpha, -\beta)$, $B(-\alpha, -\beta)$, $C(-\alpha, -\beta)$ sollen konjugiert imaginär mit $A(\alpha, \beta)$, $B(\alpha, \beta)$, $C(\alpha, \beta)$ sein oder anders ausgedrückt, die reellen Teile dieser Funktionen sollen gerade, die imaginären Teile ungerade Funktionen von α, β sein.

Es ergibt sich dann aus (12), daß dieselbe Eigenschaft auch den Funktionen $i\alpha H$, $i\beta H$, $i\gamma H$ und folglich auch den Funktionen

$$A + i\alpha Hz, \quad B + i\beta Hz, \quad C + i\gamma Hz$$

zukommt. Daraus ergibt sich aber, daß die Ausdrücke (13) ungeändert bleiben, wenn man i durch $-i$ ersetzt, weil man gleichzeitig unter dem Integralzeichen die Integrationsvariablen α, β durch $-\alpha$, $-\beta$ ersetzen kann. Folglich sind die in (13) für u, v, w gegebenen Ausdrücke reell.

§ 78.

Bestimmung der willkürlichen Funktionen.

Sind die Funktionen A, B, C bestimmt, so ist unsere Aufgabe vollständig gelöst. Diese Bestimmung ist nun sehr einfach, wenn wir annehmen, daß an der Oberfläche $z = 0$ die Verschiebungen u, v, w selbst gegeben seien:

$$u = U(x, y), \quad v = V(x, y), \quad w = W(x, y). \tag{1}$$

Dann müssen die A, B, C den Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\ V(x, y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} B(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \\ W(x, y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} C(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \end{aligned} \tag{2}$$

und die allgemeine Formel Bd. I, § 21 (4) ergibt:

$$A(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int U(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)}\, d\xi\, d\eta,$$

(3) $$B(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int V(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)}\, d\xi\, d\eta,$$

$$C(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int W(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi + \beta\eta)}\, d\xi\, d\eta.$$

Um die Funktionen A, B, C auch unter den in § 76 gemachten allgemeineren Bedingungen zu bestimmen, müssen wir die Ausdrücke für die Druckkräfte X_z, Y_z, Z_z für $z = 0$ ableiten. Es ist aber nach § 66 (13):

$$X_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

(4) $$Y_z = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$Z_z = \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + (2\mu + \lambda)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Wir bezeichnen diese drei Größen als Funktionen von x, y mit

$$-\overline{X}(x, y), \quad -\overline{Y}(x, y), \quad -\overline{Z}(x, y), \quad [\S\ 77\ (2)].$$

Nach § 77 (13) ist aber (immer für $z = 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i(\alpha x + \beta y)}\, \alpha A\, d\alpha\, d\beta,$$

(5) $$\frac{\partial v}{\partial y} = i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i(\alpha x + \beta y)}\, \beta B\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i(\alpha x + \beta y)}\, \gamma(C + H)\, d\alpha\, d\beta,$$

woraus nach § 77 (12), wenn man den Wert von Θ für $z = 0$ mit $\overline{\Theta}$ bezeichnet:

(6) $$\overline{\Theta} = -\frac{2\mu i}{\lambda + \mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i(\alpha x + \beta y)}\, \gamma H(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Ferner ist für $z = 0$ nach § 77 (13):

$$\frac{\partial u}{\partial z} = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i(\alpha x + \beta y)} (\gamma A + \alpha H)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i(\alpha x + \beta y)} (\gamma B + \beta H)\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i(\alpha x + \beta y)} \gamma (C + H)\, d\alpha\, d\beta, \tag{7}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i(\alpha x + \beta y)} \alpha C\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{i(\alpha x + \beta y)} \beta C\, d\alpha\, d\beta,$$

und daraus erhält man nach (4):

$$\overline{X}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int A'(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta,$$

$$\overline{Y}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int B'(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \tag{8}$$

$$\overline{Z}(x, y) = \int\!\!\int C'(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta,$$

worin gesetzt ist

$$\begin{aligned} A'(\alpha, \beta) &= -i\mu[\gamma A + \alpha(C + H)], \\ B'(\alpha, \beta) &= -i\mu[\gamma B + \beta(C + H)], \\ C'(\alpha, \beta) &= -2i\mu\gamma\left(C + \frac{\mu}{\lambda + \mu} H\right), \end{aligned} \tag{9}$$

und hierzu kommt noch die Gleichung § 77 (12):

$$\gamma H = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} (\alpha A + \beta B + \gamma C), \tag{10}$$

woraus man, wenn A', B', C' bekannt sind, auch A, B, C, H berechnen kann, oder allgemeiner aus dreien der Größen A, B, C, A', B', C', H die übrigen.

Die Funktionen A', B', C', H können aber ebenso aus den Funktionen

$$\overline{X}(x, y), \quad \overline{Y}(x, y), \quad \overline{Z}(x, y), \quad \overline{\Theta}(x, y)$$

bestimmt werden, wie wir im vorigen Paragraphen A, B, C aus U, V, W bestimmt haben. Es ergibt sich nämlich aus (6):

$$(11) \qquad -\frac{2\mu i}{\lambda+\mu}\gamma H(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \overline{\Theta}(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta,$$

und aus (8):

$$(12) \qquad \begin{aligned} A'(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \overline{X}(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta, \\ B'(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \overline{Y}(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta, \\ C'(\alpha, \beta) &= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \overline{Z}(\xi, \eta)\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)}\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

§ 79.

Eindruck eines schweren Körpers auf eine elastische Unterlage.

Boussinesq hat seine Methode auf ein Problem angewandt, das wir hier auch nach unserer Methode behandeln wollen.

Wir denken uns auf eine elastische horizontale Unterlage einen Stempel vom Gewicht P aufgesetzt, den wir uns aber als **starr** vorstellen wollen (er möge etwa aus einem sehr viel schwerer deformierbaren Stoffe bestehen als die Unterlage). Dieser Körper K habe die Gestalt eines Zylinders, dessen Basis eine gegebene, beliebig gekrümmte, von der Ebene unendlich wenig abweichende Fläche ist. Die Randkurve σ dieser Fläche, längs der sie an den Zylindermantel anstößt, sei eben und senkrecht auf den Erzeugenden des Zylinders.

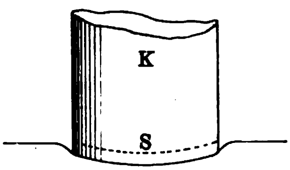
Diese Randkurve sei bis zur Tiefe k in die Unterlage eingesunken.

Die Gestalt der Basisfläche soll dadurch bestimmt sein, daß ihre z-Ordinate, von der Ebene des Randes an gerechnet, eine gegebene Funktion $\varrho(x, y)$ sei, die am Rande gleich Null ist. Wenn $\varrho(x, y)$ überall gleich Null ist, so ist die Basisfläche eben.

Endlich wollen wir die Projektion der Basis auf die xy-Ebene mit S bezeichnen (Fig. 20).

Wir nehmen also an, daß der Körper K seiner Gestalt nach unveränderlich sei, und daß sich die Unterlage unter dem Einflusse des Druckes P der Gestalt des Körpers genau anschließt. Diese letztere Voraussetzung wird, namentlich in der Nähe des Randes, wo sich unendlich große Druckkräfte ergeben werden, nicht genau erfüllt sein. Indessen werden wir bei dieser Annahme doch ein Resultat erhalten, was in hinlänglicher Entfernung von dem Rande die wirklichen Verhältnisse mit einer gewissen Annäherung darstellt.

Fig. 20.



Wir haben hier, mit Rücksicht darauf, daß der Druck des Körpers K überall nur vertikal (in der Richtung der positiven z) wirkt, wenn wir uns der Einfachheit halber auf den Fall einer ebenen Grundfläche des Körpers K beschränken, also $\varrho = 0$ setzen, für das elastische Problem in der Unterlage die folgenden Grenzbedingungen für $z = 0$:

(1) $\quad X_z = 0, \quad Y_z = 0,$ in der ganzen Ebene $z = 0$,

(2) $\quad Z_z = 0$ außerhalb S,

(3) $\quad w = k$ innerhalb S.

Diese Grenzbedingungen haben das Eigentümliche, daß sie nicht einheitlich für die ganze Ebene gegeben sind, sondern sich zum Teil auf Z_z, zum Teil auf w beziehen, und dieser Umstand ist für die Integration im allgemeinen eine große Schwierigkeit. Einem hierher gehörigen Falle sind wir in der Elektrostatik, Bd. I, § 140, 141, begegnet, bei der Bestimmung des elektrischen Gleichgewichtes einer ebenen leitenden Fläche, der eine gewisse Elektrizitätsmenge mitgeteilt ist, und wir haben dort das Problem für den Fall einer elliptischen Scheibe gelöst.

Es ist ein höchst bemerkenswertes Resultat von Boussinesq, daß sich das elastische Problem auf das erwähnte elektrostatische Problem zurückführen läßt.

§ 80.

Bedingungen für die willkürlichen Funktionen.

Die Bedingungen (1) des vorigen Paragraphen, die sich auf die ganze Ebene $z = 0$ beziehen, ergeben nach § 78 (12):

$$(1) \qquad A' = 0, \qquad B' = 0,$$

und daher nach § 78 (9):

$$(2) \qquad \begin{aligned} \gamma A &= -\alpha(C + H), \\ \gamma B &= -\beta(C + H), \end{aligned}$$

und nach § 77 (5) $(-\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2)$:

$$(3) \qquad \alpha A + \beta B = \gamma(C + H),$$

also nach § 78 (10):

$$(4) \qquad H = -\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} C,$$

und nach (2):

$$(5) \qquad \begin{aligned} \gamma A &= -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \alpha C, \\ \gamma B &= -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \beta C, \end{aligned}$$

und nach § 78 (9):

$$(6) \qquad C' = -\frac{2 i \mu (\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \gamma C.$$

Es ist aber für $z = 0$ nach § 77 (13):

$$(7) \qquad w = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} C e^{i(\alpha x + \beta y)} \, d\alpha \, d\beta,$$

und nach § 78 (8):

$$(8) \qquad \begin{aligned} \overline{Z} &= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} C' e^{i(\alpha x + \beta y)} \, d\alpha \, d\beta \\ &= -\frac{2 i \mu (\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} C \gamma e^{i(\alpha x + \beta y)} \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned}$$

Demnach ist die Funktion C nach § 79 (2), (3) so zu bestimmen, daß

$$(9) \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int C e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta = k \qquad \text{innerhalb } S,$$

$$(10) \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int C e^{i(\alpha x + \beta y)}\, \gamma\, d\alpha\, d\beta = 0 \qquad \text{außerhalb } S,$$

und die Formel (7) ergibt dann, wenn man sie auf einen Punkt außerhalb S anwendet, die Einsenkung, und (8), auf einen Punkt innerhalb S angewandt, den Druck, den die Unterlage zu tragen hat.

Aus § 77 (13) erhält man dann die Verschiebungen u, v, w für jeden Punkt im Innern des Körpers und an der Oberfläche.

§ 81.

Zurückführung auf das elektrostatische Problem.

Denken wir uns die Fläche S in der xy-Ebene als Scheibe aus einem homogenen Leiter der Elektrizität gebildet, der eine gewisse Elektrizitätsmenge mitgeteilt ist, so wird das elektrische Potential φ bestimmt durch die Bedingungen, daß

1. im ganzen Raume $\Delta\varphi = 0$,
2. für $z = 0$ innerhalb S
$$\varphi = k \text{ (gleich einer Konstanten)},$$
3. für $z = 0$ außerhalb S
$$\varphi \text{ und seine Ableitungen nach } z \text{ stetig.}$$
4. Im Unendlichen verschwindet φ wie die reziproke Entfernung eines Punktes vom Koordinatenanfangspunkt.

Setzt man an Stelle der Bedingung 2. die Bedingung

$$(1) \qquad \varphi_1 = 1,$$

so genügt $\varphi = k\varphi_1$ der Bedingung 2. und zugleich den übrigen Bedingungen 1., 3., 4. Die Konstante k wird, wenn das Problem gelöst ist, aus der Menge m der mitgeteilten Elektrizität bestimmt.

Aus der Symmetrie der Bedingungen 1. bis 4. ergibt sich, daß φ eine **gerade Funktion** von z ist, d. h. daß

$$\varphi(x, y, -z) = \varphi(x, y, z)$$

sein muß. Daher kann die Bedingung 3. auch durch die Bedingung

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad \text{für } z = 0, \quad \text{außerhalb } S$$

ersetzt werden, und es genügt, wenn φ für positive Werte von z bestimmt ist.

Die Flächendichtigkeit σ der Elektrizität an einer Stelle x, y der Fläche S erhält man, wenn φ bekannt ist, aus

$$(3) \qquad 2\pi\sigma = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \text{innerhalb } S$$

[Bd. I, § 141 (2)].

Diese Funktion φ läßt sich wegen der Differentialgleichung 1. nach der Methode der partikularen Lösungen durch ein Integral darstellen:

$$(4) \qquad \varphi = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\, d\alpha\, d\beta,$$

worin $\gamma = i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und $\Phi(\alpha, \beta)$ eine aus den Grenzbedingungen zu bestimmende Funktion von α, β ist.

Wenn an Stelle der Bedingungen 2., 3. die Funktion φ in der ganzen Ebene $z = 0$ gegeben wäre, so wäre die Funktion Φ durch den Fourierschen Lehrsatz bestimmt. So aber erhält man zur Bestimmung der Funktion Φ die folgenden beiden Bedingungen:

$$(5) \qquad \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta = k \qquad \text{innerhalb } S,$$

$$(6) \qquad \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta)\, \gamma\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta = 0 \quad \text{außerhalb } S,$$

und für die elektrische Dichtigkeit erhält man aus (3):

$$(7) \qquad 2\pi\sigma = -i \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta)\, \gamma\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta, \text{ innerhalb } S.$$

In den Fällen also, in denen das elektrostatische Problem für die Fläche S gelöst ist, können wir auch die Funktion $\Phi(\alpha, \beta)$ den Bedingungen (5), (6) gemäß bestimmen.

Die Gleichungen (5), (6) stimmen aber mit (9), (10) des vorigen Paragraphen überein, wenn wir

$$(8) \qquad C = \Phi(\alpha, \beta)$$

setzen. Es folgt dann aus § 80 (8) für den Druck auf einen Punkt im Innern von S:

$$\bar{Z} = \frac{4\pi\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\sigma, \tag{9}$$

und es wird also der Druck mit der elektrischen Dichtigkeit proportional. Ist do ein Flächenelement von S und

$$P = \int \bar{Z}\,do, \qquad m = \int \sigma\,do$$

der Gesamtdruck und die Elektrizitätsmenge, so ergibt sich:

$$P = \frac{4\pi\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}m. \tag{10}$$

Die Einsenkung w der Ebene $z = 0$ außerhalb der gepreßten Fläche S erhält man nach § 80 (7):

$$w = \varphi. \tag{11}$$

Nehmen wir den Querschnitt des Stempels K kreisförmig an, so können wir die Formeln aus Bd. I, § 141 unmittelbar anwenden.

Wir erhalten, wenn wir den Abstand eines variablen Punktes von der Zylinderachse mit r und den Radius des Kreises mit a bezeichnen, für die Fläche $z = 0$:

$$\varphi = \frac{m}{a}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha a}{\alpha} J(\alpha r)\,d\alpha, \tag{12}$$

also

$$\varphi = \frac{m}{a}\frac{\pi}{2} = k \qquad \text{innerhalb } S, \tag{13}$$

$$\varphi = \frac{m}{a}\arcsin\frac{a}{r} \qquad \text{außerhalb } S, \tag{14}$$

$$\sigma = \frac{m}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}}, \tag{15}$$

und nach (10):

$$m = \frac{\lambda + 2\mu}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} P. \tag{16}$$

Demnach wird die Tiefe der Einsenkung:

$$k = \frac{(\lambda + 2\mu)P}{8\mu(\lambda + \mu)a} \tag{17}$$

und die Spannung im Innern von S:

$$\bar{Z} = \frac{P}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}}. \tag{18}$$

Die Spannung wird also unendlich an der Peripherie der eingedrückten Fläche S. Daß dies in Wirklichkeit nicht eintreten kann, ist klar. Der Widerspruch löst sich aber dadurch, daß die Kante des drückenden Stempels in der Wirklichkeit nicht scharf bleiben wird.

Für die Depression erhalten wir aber aus (11), (13) und (14) einen vollkommen stetigen Ausdruck, nämlich

$$(19) \qquad w = \frac{(\lambda + 2\mu) P}{8\mu(\lambda + \mu) a} \qquad \text{innerhalb } S,$$

$$(20) \qquad w = \frac{(\lambda + 2\mu)}{4\pi\mu(\lambda + \mu)} \frac{P}{a} \arcsin \frac{a}{r} \qquad \text{außerhalb } S,$$

und für $r = a$ geht der Ausdruck (20) in den Wert (19) über.

§ 82.
Die horizontalen Verschiebungen.

Für die Verschiebungen u, v parallel der Ebene $z = 0$ in dem in § 79 behandelten Probleme erhalten wir aus § 77 (13), wenn wir uns auf die Oberfläche, d. h. auf die Ebene $z = 0$ beschränken:

$$(1) \qquad \begin{aligned} u &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int A e^{i(\alpha x + \beta y)} \, d\alpha \, d\beta, \\ v &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int B e^{i(\alpha x + \beta y)} \, d\alpha \, d\beta, \end{aligned}$$

und wenn wir für A, B die Ausdrücke § 80 (5) substituieren und $C = \Phi(\alpha, \beta)$ setzen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} u &= -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\alpha}{\gamma} \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} \, d\alpha \, d\beta, \\ v &= -\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \frac{\beta}{\gamma} \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} \, d\alpha \, d\beta. \end{aligned}$$

Nun ist aber nach § 81 (4):

$$\varphi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \Phi(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \, d\alpha \, d\beta$$

und folglich

$$\int_z^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dz = -\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\gamma}\, \Phi(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}\, d\alpha\, d\beta,$$

also wenn man $z = 0$ setzt:

$$-\int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\gamma}\, \Phi(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha\, d\beta = \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dz,$$

und also für $z = 0$:

$$(3) \qquad \begin{aligned} u &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dz, \\ v &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dz. \end{aligned}$$

Für den Fall des kreisförmigen Querschnittes ist [Bd. I, § 141 (14)]:

$$(4) \qquad \varphi = \frac{(\lambda + 2\mu) P}{4\pi\mu(\lambda + \mu) a} \int_0^\infty e^{-\alpha z} \frac{\sin \alpha a}{\alpha}\, J(\alpha r)\, d\alpha,$$

also, wenn J_1 die Besselsche Funktion der Ordnung 1 ist [Bd. I, § 72 (6)]:

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{(\lambda + 2\mu) P}{4\pi\mu(\lambda + \mu) a} \frac{x}{r} \int_0^\infty e^{-\alpha z} \sin \alpha a\, J_1(\alpha r)\, d\alpha,$$

und wenn wir also $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$ und

$$(6) \qquad u = -\varrho \cos \vartheta, \qquad v = -\varrho \sin \vartheta$$

setzen:

$$(7) \qquad \varrho = \frac{P}{4\pi(\lambda + \mu) a} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha a}{\alpha}\, J_1(\alpha r)\, d\alpha,$$

und hierin bedeutet ϱ die horizontale Verschiebung gegen den Mittelpunkt hin, die, wie zu erwarten war, von ϑ unabhängig ist.

Elfter Abschnitt.

Bewegung der gespannten Saiten.

§ 83.

Die Differentialgleichungen der schwingenden Saite.

Unter den Problemen der Bewegung elastischer Körper behandeln wir zunächst die schwingende Saite, für die wir die Differentialgleichungen auf dem folgenden direkten Wege erhalten können [1]).

Wenn die Saite hinlänglich stark gespannt ist, so wird die Schwerkraft keinen merklichen Einfluß mehr auf ihre Bewegung haben, und wir sehen also von der Wirkung der Schwere der Saite ab. Dann wird die Saite in ihrer Gleichgewichtslage geradlinig sein, und wir zählen auf dieser geraden Linie die Abszissen x. Den Anfangspunkt, $x = 0$, und den Endpunkt, $x = l$, nehmen wir zunächst als fest an. Vor der Befestigung aber soll die Saite durch ein Gewicht P gespannt sein. Dann ist die Spannung in jedem Punkte $= P$, d. h. wenn wir uns die Saite an irgend einer Stelle durchschnitten denken, dann muß, um das Gleichgewicht zu erhalten, an jedem der beiden freien Enden eine Kraft von der Größe P in der Richtung der Saite angebracht werden.

Wir nehmen nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem an, dessen x-Achse mit der Gleichgewichtslage der Saite zusammenfällt, und erteilen einem beliebigen Punkte M mit der Abszisse x eine Verschiebung (Mm), deren Projektionen ξ, η, ζ heißen mögen.

---

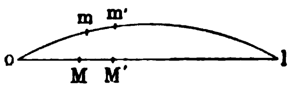
[1]) Über die Geschichte dieses Problems vergleiche man die Abhandlung von Riemann „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“ (Riemanns Werke, 2. Aufl., S. 227).

Wir nehmen ξ, η, ζ als stetige Funktionen von x und von der Zeit t an, und ebenso sollen die Differentialquotienten

$$(1) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

zunächst noch stetige Funktionen von x und t sein. Wir betrachten aber ξ, η, ζ und ihre Differentialquotienten als unendlich kleine Größen erster Ordnung, deren höhere Potenzen gegen die niedrigeren vernachlässigt werden können. Die Differentialquotienten nach x sollen auch mit ξ', η', ζ' bezeichnet werden.

Fig. 21.



Wir betrachten (Fig. 21) ein Element $(MM') = dx$ der Saite, das durch die Verschiebung in $(mm') = ds$ übergegangen sei, und das Element ds schließe mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β, γ ein. Die Verschiebung $(M'm')$ wird dann ausgedrückt durch

$$(2) \qquad \begin{aligned} \xi + d\xi &= \xi + \xi' dx \\ \eta + d\eta &= \eta + \eta' dx \\ \zeta + d\zeta &= \zeta + \zeta' dx \end{aligned}$$

und wenn also

$$(3) \qquad x + \xi, \quad \eta, \quad \zeta$$

die Koordinaten von m sind, so sind

$$(4) \qquad x + dx + \xi + d\xi, \quad \eta + d\eta, \quad \zeta + d\zeta$$

die Koordinaten von m'.

Es ist daher mit den erlaubten Vernachlässigungen

$$(5) \qquad ds = \sqrt{(dx + d\xi)^2 + d\eta^2 + d\zeta^2} = dx(1 + \xi').$$

Die Verlängerung von dx ist also durch $\xi' dx$ ausgedrückt. Es ist nun ferner nach (3) und (4)

$$(6) \qquad dx + d\xi = ds \cos\alpha, \quad d\eta = ds \cos\beta, \quad d\zeta = ds \cos\gamma,$$

woraus mit den erlaubten Vernachlässigungen

$$(7) \qquad \cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = \eta', \quad \cos\gamma = \zeta'.$$

Es ist nun die Kraft zu bestimmen, die auf das Element ds wirkt. Diese setzt sich aber aus zwei Teilen zusammen. Es wirkt zunächst auf jedes der Enden m, m' in der Richtung der Tangente, die ursprüngliche Spannung P, und zwar in m gegen den Nullpunkt, in m' gegen den Endpunkt der Saite gerichtet. Außerdem aber wird durch die Verlängerung, die das Element erfahren hat, eine Vergrößerung der Spannung hervorgerufen, die man mit der Vergrößerung der Längeneinheit, hier [nach (5)] mit ξ' proportional annimmt, und die also $= E\xi'$ zu setzen ist. Der Faktor E drückt die Kraft aus, die erforderlich wäre, um irgend ein Stück der Saite um das Doppelte zu verlängern (vorausgesetzt, daß dieses einfache Gesetz auch bei so starken Deformationen noch gültig wäre, was natürlich nicht der Fall ist) und heißt nach § 69 der Elastizitätsmodulus.

Demnach wirken an dem Punkte m die Kraftkomponenten

$$\begin{aligned} X &= -(P + E\xi')\cos\alpha = -(P + E\xi'), \\ Y &= -(P + E\xi')\cos\beta = -P\eta', \\ Z &= -(P + E\xi')\cos\gamma = -P\zeta', \end{aligned}$$

und an dem Punkte m'

$$\begin{aligned} X' &= P + E\xi' + \frac{\partial(P + E\xi')}{\partial x}dx, \\ Y' &= P\eta' \qquad + \frac{\partial P\eta'}{\partial x}dx, \\ Z' &= P\zeta' \qquad + \frac{\partial P\zeta'}{\partial x}dx, \end{aligned}$$

und folglich wirken auf das Element ds die Kraftkomponenten

$$E\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx, \qquad P\frac{\partial^2\eta}{d x^2}dx, \qquad P\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}dx. \tag{8}$$

Diese Kräfte müssen nun nach dem Grundgesetz der Dynamik (Bd. I, § 126) dem Produkte aus der Masse μ des Elementes ds mit den Komponenten der Beschleunigung gleich sein, also gleich

$$\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}, \qquad \mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}, \qquad \mu\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Um μ auszudrücken, bezeichnen wir mit p das Gewicht der ganzen Saite von der Länge l; dann ist das Gewicht des Elementes von der ursprünglichen Länge dx gleich $p\,dx : l$, und wenn wir also noch das Gewicht der Masseneinheit, d. h. die Beschleunigung der Schwerkraft mit g bezeichnen, so ist dieser Ausdruck gleich μg; folglich

$$\mu = \frac{p\,dx}{gl}, \tag{10}$$

und dies läßt sich auch auf den Fall anwenden, daß die Saite nicht durchweg von der gleichen Dicke und Dichte ist, nur ist dann p/l keine Konstante, sondern eine gegebene Funktion von x.

Danach erhalten wir aus (8) und (9) die Gleichungen:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{Elg}{p}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{Plg}{p}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \frac{Plg}{p}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Die drei Komponenten ξ, η, ζ sind also in diesen Gleichungen vollständig voneinander getrennt, und jede von ihnen wird durch eine Gleichung der gleichen Form bestimmt. Zu ihrer vollständigen Bestimmung treten noch die Nebenbedingungen, daß für $x = 0$ und $x = l$ alle drei Komponenten ξ, η, ζ für jeden Wert von t verschwinden sollen, und die Bedingungen des Anfangszustandes, nach denen für $t = 0$ die sechs Größen ξ, η, ζ, $\partial\xi/\partial t$, $\partial\eta/\partial t$, $\partial\zeta/\partial t$ in gegebene Funktionen von x übergehen sollen. Diese Funktionen sind aber nur in dem Intervall $(0, l)$ für x gegeben.

Die Funktion ξ bestimmt die longitudinalen Schwingungen. Diese allein hängen von der Konstanten E ab, η und ζ sind die beiden Komponenten der transversalen Schwingungen, und es genügt, wenn wir uns in der Folge mit einer von den drei Komponenten, etwa mit η, beschäftigen, für die wir, wenn wir

$$(12)\qquad a^2 = \frac{Plg}{p}$$

setzen, die Differentialgleichung erhalten:

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

mit den Nebenbedingungen:

$$(14)\qquad \eta = 0 \qquad \text{für } x = 0 \text{ und } x = l$$

$$\left.\begin{aligned} (15)\qquad \eta &= f(x) \\ (16)\qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} &= F(x) \end{aligned}\right\} \text{für } t = 0, \quad 0 < x < l.$$

Bei der homogenen Saite ist a konstant, bei der inhomogenen eine gegebene Funktion von x.

§ 84.
Partikulare Lösungen.

Wir suchen zunächst partikulare Lösungen der Gleichungen (13), § 83, indem wir für η ein Produkt UV einer Funktion U von t allein und einer Funktion V von x allein setzen. Es ergibt sich dann durch Division mit UV:

$$\frac{1}{U}\frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{a^2}{V}\frac{d^2 V}{dx^2}.$$

Es müssen also beide Seiten dieser Gleichung gleich einer und derselben Konstante sein, die wir mit $-m^2$ bezeichnen wollen, so daß sich die beiden Gleichungen ergeben:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = -m^2 U$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{m^2}{a^2} V.$$

Die zweite dieser Gleichungen gehört, wenn a eine Funktion von x ist, zu dem Typus von Differentialgleichungen, die wir in § 25 f. betrachtet haben, und die dort abgeleiteten allgemeinen Theoreme erhalten also hier ihre physikalische Bedeutung. Wir wollen uns aber jetzt nur mit dem Falle beschäftigen, wo a konstant ist, also mit der homogenen Saite. Unter dieser Voraussetzung haben die vorstehenden Differentialgleichungen die partikularen Integrale:

$$U = \cos mt, \qquad \sin mt$$

$$V = \cos\frac{mx}{a}, \qquad \sin\frac{mx}{a}.$$

Unter diesen suchen wir solche aus, die der Bedingung (14) in § 83 genügen, also für $x = 0$ und $x = l$ verschwinden. Dies wird erreicht, wenn wir $V = \sin\frac{mx}{a}$, und $m = an\pi/l$ setzen, worin n eine ganze Zahl ist, die positiv angenommen werden kann.

Wenn man dann mit τ und A noch zwei willkürliche Konstanten bezeichnet, so erhält man ein partikulares Integral der partiellen Differentialgleichung § 83 (13):

$$(1) \qquad \eta_n = A\cos n\frac{\pi a(t-\tau)}{l}\sin n\frac{\pi x}{l},$$

und hierin kann n jede ganze positive Zahl bedeuten.

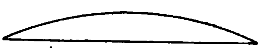
Wenn die Saite nach diesem Gesetze schwingt, so ist der Vorgang in bezug auf die Zeit periodisch, und die Schwingungsdauer T_n ist gleich $2l/an$. Der reziproke Wert der Schwingungsdauer heißt die Schwingungszahl:

$$(2) \qquad Z_n = \frac{na}{2l} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{Pg}{pl}} \quad [\S\ 83,\ (12)],$$

und dies ist die Anzahl der Schwingungen, die in der Zeiteinheit (der Sekunde) ausgeführt werden. Von dieser Zahl hängt die Tonhöhe ab. Den tiefsten Ton, den die Saite geben kann, erhält man für $n = 1$. Er heißt der Grundton der Saite. Die übrigen heißen die harmonischen Obertöne. Für $n = 2$ erhält man die Oktave des Grundtones, für $n = 3$ die Quinte der Oktave, für $n = 4$ die zweite Oktave, für $n = 5$ die große Terz der zweiten Oktave.

Der Ausdruck (1) zeigt, daß, wenn x ein Vielfaches von l/n ist, η_n fortdauernd $= 0$ bleibt. Es teilt sich so die Saite in n Teile, deren jeder für sich so schwingt, wie wenn eine Saite von der Länge l/n mit ihrem Grundton schwingt. Die Teilpunkte

Fig. 22.



n = 1

Fig. 23.

n = 3

dieser Strecken, deren Zahl $n - 1$ beträgt, heißen die Knotenpunkte (Fig. 22, 23).

Die Formel (2) zeigt die Abhängigkeit der Höhe des Grundtones von der Länge l, der Spannung P und dem Gewicht p der Saite. Der Faktor A heißt die Amplitude der Schwingung. Ihr Quadrat bestimmt die Stärke oder Intensität des Tones.

Wenn wir mehrere Ausdrücke von der Form (1) addieren, so erhalten wir kompliziertere Schwingungsformen der Saite, bei denen der Grundton und mehrere der harmonischen Obertöne zusammenklingen, die ein geübtes Ohr auch wieder voneinander zu trennen weiß. Von der relativen Stärke der Obertöne hängt nach Helmholtz die Klangfarbe ab.

Um diese allgemeineren Schwingungsformen darzustellen, zerlegen wir den Kosinus in der Formel (1) und erhalten, wenn wir

$$A_n = A \cos n \frac{\pi a \tau}{l}, \quad B_n = A \sin n \frac{\pi a \tau}{l}$$

setzen und mit T die Schwingungsdauer des Grundtones bezeichnen:

$$(3)\qquad \eta = \sum^{n} \left(A_n \cos n \frac{2\pi t}{T} + B_n \sin n \frac{2\pi t}{T} \right) \sin n \frac{\pi x}{l},$$

worin sich die Summe auf beliebige Werte von n erstrecken kann. Durch Bestimmung der Konstanten A_n und B_n haben wir dann noch die Möglichkeit, eine unendliche Mannigfaltigkeit von Anfangszuständen zu berücksichtigen, und wenn wir die Annahme machen, daß die Formel (3) auch noch gültig sei, wenn wir die Anzahl der Glieder unendlich nehmen, so können wir auch noch die Bedingungen eines willkürlichen Anfangszustandes erfüllen.

§ 85.

Einführung des Anfangszustandes.

Wir nehmen also jetzt die Lösung des Problems der schwingenden Saite in der Form an:

$$(1)\qquad \eta = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos n \frac{\pi a t}{l} + B_n \sin n \frac{\pi a t}{l} \right) \sin n \frac{\pi x}{l}$$

und verlangen, daß die Konstanten A_n, B_n so bestimmt werden, daß dieser Ausdruck für $t = 0$ einen gegebenen Anfangszustand darstelle. Dieser Anfangszustand ist nach § 83 (15), (16) durch zwei Funktionen $f(x)$, $F(x)$ bestimmt, so daß für $t = 0$, $0 < x < l$

$$(2)\qquad \eta = f(x), \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = F(x)$$

wird. Diese Funktionen $f(x)$, $F(x)$ sind nur in dem Intervall $(0, l)$ gegeben. Es muß dann nach (1)

$$(3)\qquad \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin n \frac{\pi x}{l} &= f(x), \\ \sum_{n=0}^{\infty} n B_n \sin n \frac{\pi x}{l} &= \frac{l}{\pi a} F(x) \end{aligned}$$

gesetzt werden.

Hieraus lassen sich A_n und B_n berechnen, wenn man nach § 35 des ersten Bandes die Funktionen $f(x)$, $F(x)$ in Sinusreihen entwickelt. Man erhält:

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha. \\
B_n &= \frac{2}{a\pi n} \int_0^l F(\alpha) \sin \frac{n\pi\alpha}{l}\, d\alpha.
\end{aligned}
$$

Die Formeln (3) gelten zunächst nur, solange x im Intervall $(0, l)$ liegt, und wenn wir für andere Werte von x die Formeln (3) als Definition für $f(x)$ und $F(x)$ ansehen, so ergibt sich:

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
f(-x) &= -f(x), & F(-x) &= -F(x), \\
f(x+2l) &= f(x), & F(x+2l) &= F(x),
\end{aligned}
$$

und erst durch diese Funktionalgleichungen sind die Funktionen $f(x)$, $F(x)$ für alle Werte von x eindeutig bestimmt, wenn sie zwischen $x = 0$ und $x = l$ gegeben sind. Aus (5) folgt:

$$
(6) \qquad f(l+x) = -f(l-x), \qquad F(l+x) = -F(l-x),
$$

und aus der zweiten Gleichung (3) leiten wir durch Integration in bezug auf x die Formel her:

$$
(7) \qquad \sum B_n \cos \frac{n\pi x}{l} = \frac{-1}{a} \int F(x)\, dx + \text{const.}
$$

die dann gleichfalls, wenn die Konstante richtig bestimmt wird, worauf es hier nicht ankommt, für beliebige x gilt. Nun läßt sich die Formel (1), mit Benutzung elementarer trigonometrischer Formeln, so darstellen:

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
\eta = {} & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\sin n \frac{\pi(x-at)}{l} + \sin n \frac{\pi(x+at)}{l} \right) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\cos n \frac{\pi(x-at)}{l} - \cos n \frac{\pi(x+at)}{l} \right),
\end{aligned}
$$

und hieraus ergibt sich mit Hilfe der Formeln (3) und (7) die folgende Darstellung der Funktion η:

$$
(9) \qquad \eta = \frac{1}{2} \Big[f(x+at) + f(x-at) \Big] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x)\, dx.
$$

Diese zweite Form der Lösung des Problems rührt von d'Alembert her und ist älter als die durch die Fouriersche

Reihe, die auf Daniel Bernoulli zurückzuführen ist. Wir haben hier die eine aus der anderen abgeleitet; jedoch läßt sich auch die d'Alembertsche Lösung direkt verifizieren.

§ 86.

Diskussion der Lösung.

Der Ausdruck, den wir zuletzt für η gefunden haben:

$$(1)\qquad \eta = \frac{1}{2}\Big[f(x+at) + f(x-at)\Big] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} F(x)\,dx,$$

genügt der Differentialgleichung § 83 (13) identisch, wenn die Funktionen $f(x)$ überall einen bestimmten zweiten und $F(x)$ einen bestimmten ersten Differentialquotienten haben, mögen übrigens $f(x)$ und $F(x)$ sein, was sie wollen.

Die Grenzbedingung [§ 83 (14)], daß η für $x = 0$ und $x = l$ verschwinden soll, ist durch (1) befriedigt, wenn $f(x)$ und $F(x)$ den Gleichungen § 85 (5), (6) gemäß bestimmt sind, und wenn außerdem $f(x)$ eine stetige Funktion ist. Dann ist

$$f(l+at) + f(l-at) = 0,$$

$$\int\limits_{-at}^{+at} F(x)\,dx = 0,\quad \int\limits_{l-at}^{l+at} F(x)\,dx = \int\limits_{-at}^{+at} F(l+x)\,dx = 0.$$

Durch diese Voraussetzungen ist zugleich die Bedingung erfüllt, daß η für $t = 0$ in $f(x)$ übergeht.

Bilden wir aber noch

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{a}{2}\,[f'(x+at) - f'(x-at)] + \frac{1}{2}\,[F(x+at) + F(x-at)],$$

so erkennt man, daß dies für $t = 0$ nur dann in $F(x)$ übergeht, wenn auch noch $f'(x)$ und $F(x)$ stetige Funktionen sind. Diese Voraussetzungen wollen wir also jetzt machen.

Zunächst ziehen wir einen allgemeinen Schluß aus der Formel (1). Wir setzen $at = l$, d. h. wir gehen in der Zeit von $t = 0$ aus um eine halbe Schwingungsdauer des Grundtones vorwärts (wobei der Anfangszustand irgend ein im Verlauf der Bewegung eintretender Zustand sein kann). Es ist aber

$$\int\limits_{x-l}^{x+l} F(x)\,dx = 0,$$

was man ohne Rechnung aus der Fig. 24 einsieht, die den Verlauf der Kurve $y = F(x)$ darstellt, bei der der Flächeninhalt

Fig. 24.

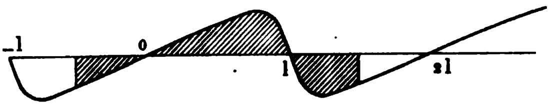
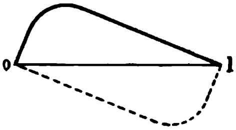


Fig. 25.



irgend eines Stückes, dessen Basis $2l$ ist, immer verschwindet. Daraus folgt also für $at = l$:

$$\eta = \frac{1}{2}\,[f(x+l) + f(x-l)] = -f(l-x),$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -F(l-x),$$

und es ist also nach einer halben Schwingungsdauer sowohl die Gestalt der Kurve als die Geschwindigkeit in doppelter Hinsicht umgekehrt, sowohl von rechts nach links, als von oben nach unten (Fig. 25).

§ 87.

Fortschreitende Wellen.

Wir wollen noch einen Fall betrachten, der, obwohl bei Saiten nicht unmittelbar realisierbar, doch in mancher Beziehung lehrreich ist. Wir wollen nämlich eine beiderseits unendlich lange Saite betrachten, so daß die Grenzbedingungen wegfallen. Dann sind die Funktionen $f(x)$ und $F(x)$ durch den Anfangszustand für alle Werte von x bestimmt, und η ist durch die Formel (1), § 86 für alle Zeiten bestimmt. Wir betrachten zwei Fälle.

I. Es sei $F(x) = 0$ für alle Werte von x, $f(x)$ nur in einer endlichen Strecke, $-\alpha < x < \alpha$, von Null verschieden. Dann ist also:

$$\eta = \frac{1}{2}\,[f(x+at) + f(x-at)]; \tag{1}$$

betrachten wir irgend einen festen Wert von t, so hat $f(x+at)$ nur so weit einen von Null verschiedenen Wert, als $x + at$ zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ liegt, also so lange

$$-at - \alpha < x < -at + \alpha \tag{2}$$

ist, und $f(x-at)$ ist nur dann von Null verschieden, wenn

$$at - \alpha < x < at + \alpha. \tag{3}$$

Wenn daher $at - \alpha > - at + \alpha$, d. h. $at > \alpha$ ist, so ist $\eta = 0$, wenn keine der beiden Ungleichungen (2), (3) befriedigt ist, also wenn entweder

$$x < - at - \alpha$$

oder

$$-at + \alpha < x < at - \alpha$$

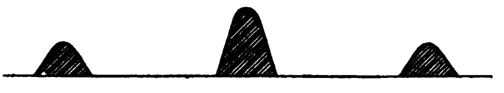
oder endlich

$$at + \alpha < x,$$

und η ist nur von Null verschieden, wenn eine der beiden (einander ausschießenden) Ungleichungen (2), (3) erfüllt ist.

Es pflanzen sich also von der anfänglich erregten Stelle aus nach beiden Seiten Wellen mit der konstanten Geschwindigkeit a und der Breite 2α fort, deren Höhe halb so groß ist als die Höhe der ursprünglichen Welle. Außerhalb dieser fortschreitenden Wellen befindet sich die Saite in der Gleichgewichtslage (Fig. 26).

Fig. 26.



II. Es sei $f(x) = 0$ für alle Werte von x, und $F(x)$ sei von Null verschieden in der Strecke $- \alpha < x < \alpha$; außerhalb dieser Strecke sei auch $F(x) = 0$. Dann ist

$$\eta = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} F(x)\, dx. \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich, wenn wir wieder einen Wert von t festhalten, daß $\eta = 0$ ist, wenn $x - at > \alpha$, oder wenn $x + at < - \alpha$, also wenn

$$x < - at - \alpha \text{ oder } x > at + \alpha.$$

Ist aber $x - at < - \alpha$ und $x + at > + \alpha$, also

$$- at + \alpha < x < at - \alpha$$

(was voraussetzt, daß $at > \alpha$ ist), so hat η den konstanten Wert

$$\frac{1}{2a} \int\limits_{-\alpha}^{+\alpha} F(x)\, dx = c,$$

der durch den Flächeninhalt der Kurve mit der Ordinate $F(x)$ dargestellt werden kann. Wenn x zwischen $at - \alpha$ und $at + \alpha$

Fig. 27.

liegt, so wird η stetig von dem Werte c zu Null abfallen, und ebenso, wenn x zwischen $-at + \alpha$ und $-at - \alpha$ liegt. Die Fig. 27 veranschaulicht den Verlauf von η.

§ 88.

Unstetigkeiten.

Wir haben in § 86 ausdrücklich die Forderung gestellt, daß die Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, $F(x)$ stetige Funktionen von x sein sollen. Es kommen aber in den Anwendungen Fälle vor, die sich einem Zustande stark annähern, in dem diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Wir erinnern an das Beispiel der gezupften Saite, d. h. einer Saite, die etwa durch einen schmalen Stift seitwärts gedrängt und dann sich selbst überlassen ist. Dann

Fig. 28.

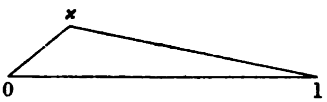
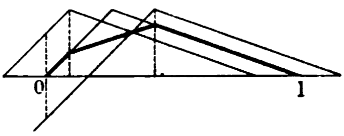
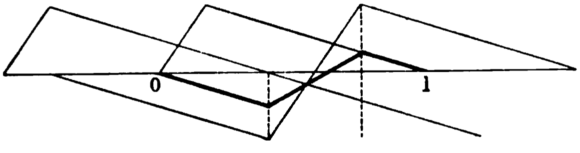


Fig. 29.



wird die Kurve $y = f(x)$ nahezu aus zwei geraden Linien bestehen, die in einem Punkte $\varkappa$ unter einem Winkel aneinander stoßen (Fig. 28). In diesem Falle ist also $f'(x)$ unstetig. Ebenso können wir uns vorstellen, daß $F(x)$ unstetig sei. Dagegen ist eine Unstetigkeit der Funktion $f(x)$ physikalisch nicht zulässig, weil sonst der Zusammenhang der Saite aufgehoben wäre.

Fig. 30.



Nun zeigt uns die Betrachtung des § 85, daß auch diese Fälle durch die bisherige Theorie erledigt werden. Denn wenn wir uns in den Reihen § 85 (3) auf eine beliebige, aber endliche Anzahl von Gliedern beschränken, so erhalten wir die Bewegung der Saite, die einem stetigen Anfangszustande entspricht, der sich aber dem tatsächlich gegebenen unstetigen (der ja auch nur eine Annäherung an die Wirklichkeit ist) bis zu jedem Grade nähert, und wir werden daher auch die Formeln § 88 (8), (9), die den weiteren Verlauf der Bewegung darstellen, als eine Annäherung an den wirklichen Vorgang betrachten können.

Um nach dieser Methode z. B. die gezupfte Saite zu behandeln, setze man

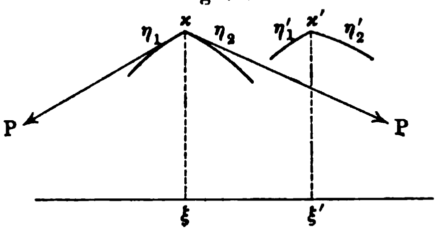
$$\eta = \tfrac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)],$$

und man kann leicht die aufeinander folgenden Gestalten der Saite durch eine geometrische Konstruktion finden, wenn man die Kurven $f(x + at)$ und $f(x - at)$ gleichzeitig zieht, und das Mittel zwischen ihren Ordinaten sucht; man erhält so eine Gestalt der Kurve, die aus drei oder aus zwei geradlinigen Strecken zusammengesetzt ist. Die Fig. 29 und 30 geben zwei dieser Gestalten.

Man sieht, daß sich der eine Unstetigkeitspunkt beim Beginne der Bewegung in zwei teilt, die nach vorwärts und nach rückwärts mit der Geschwindigkeit at fortschreiten.

Eine andere Behandlung dieser Probleme, bei der auf die Unstetigkeiten von vornherein Rücksicht genommen ist, hat Christoffel gegeben[1]), der aus den geometrischen und mechanischen Bedingungen der Aufgabe Gleichungen für die Bewegung der Unstetigkeiten hergeleitet hat. Wir gelangen zu diesen Gleichungen auf folgendem Wege.

Fig. 31.



Es sei auf der Saite in einem bestimmten Augenblick t ein Punkt mit der Abszisse ξ, wo die Differentialquotienten $\partial\eta/\partial x$ und $\partial\eta/\partial t$ unstetig sind, und also die η-Kurve eine Ecke x bildet.

Wir unterscheiden die Werte der Funktionen vor und hinter der Unstetigkeitsstelle durch den Index 1 und 2 (Fig. 31). Wir wollen nun weiter annehmen, daß diese Unstetigkeitsstelle in dem Zeitelement dt um eine Strecke $d\xi$ mit der Geschwindigkeit c

[1]) Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten. Annali di Matematica, tomo VIII (1876). Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, S. 51.

14*

fortrücke, so daß $d\xi = c\,dt$ ist, und es sei infolgedessen der Unstetigkeitspunkt $\varkappa$ in der Zeit dt nach $\varkappa'$ fortgerückt.

Die erste der hierzu erforderlichen Bedingungen erhalten wir, wenn wir die Koordinate des Punktes $\varkappa'$ in zweierlei Weise ausdrücken, einmal als Punkt der Kurve η'_1, dann als Punkt der Kurve η'_2 und beides einander gleich setzen.

Wir erhalten so

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x}\,d\xi + \frac{\partial \eta_1}{\partial t}\,dt = \frac{\partial \eta_2}{\partial x}\,d\xi + \frac{\partial \eta_2}{\partial t}\,dt \quad \text{oder}$$

$$(1) \qquad c\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_1 = c\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_2.$$

Diese Bedingung, die die Forderung enthält, daß die Kurven η_1, η_2 zusammenhängend bleiben sollen, kann auch so ausgedrückt werden, daß die Verbindung $c\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t}$ ohne Unstetigkeit über den Punkt $\varkappa$ hinweggehen muß.

Die zweite Bedingung ist mechanischer Natur, und beruht auf dem Satze, daß ein Körper von der Masse μ, der während einer unendlich kurzen Zeit dt von einer Stoßkraft Q angegriffen wird, eine Geschwindigkeitszunahme von der Größe $Q\,dt/\mu$ in der Richtung der Kraft erfährt.

Das Element der Saite, das hier eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung erfährt, können wir wegen der unendlich kleinen Winkel, die hier überall vorausgesetzt sind (§ 83), von der Länge $d\xi$ annehmen, und seine Masse μ ist also gleich $p\,d\xi/gl$ [§ 83 (10)]. Da dieses Element plötzlich von dem Teil η_2 auf den Teil η_1 übergeht, so ist seine Geschwindigkeitszunahme gleich

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_1 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_2.$$

Die Stoßkraft erhalten wir, wenn wir die Spannung P am Anfang des Elementes in der Richtung η_1, am Ende in der Richtung η_2 angreifen lassen, und die Summe der Komponenten dieser beiden Kräfte nach der Richtung der η-Achse nehmen. So erhalten wir, da wir bei den unendlich kleinen Winkeln den Sinus durch die Tangente ersetzen dürfen, für diese Stoßkraft:

$$P\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_1\right],$$

und es ergibt sich also nach dem angeführten mechanischen Prinzip die Gleichung:

$$P\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_1\right] dt = \left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_1 - \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_2\right] \frac{pd\xi}{gl},$$

also wenn wir $d\xi = cdt$ und $Plg/p = a^2$ setzen [§ 83, (12)]:

$$(2) \qquad a^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_1 + c\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_1 = a^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_2 + c\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_2,$$

und die zweite Bedingung ist also die, daß auch $a^2\frac{\partial\eta}{\partial x} + c\frac{\partial\eta}{\partial t}$ ohne Unstetigkeit über den Punkt $\varkappa$ hinweggehen muß.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)_1 = K, \quad \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_2 - \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)_1 = K',$$

so können wir die beiden gefundenen Bedingungen auch so darstellen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} cK + K' &= 0, \\ a^2K + cK' &= 0, \end{aligned}$$

und wenn nun der Punkt $\varkappa$ wirklich ein Unstetigkeitspunkt ist, also K und K' nicht beide verschwinden, so folgt aus (3)

$$(4) \qquad c^2 = a^2, \qquad c = \pm a.$$

Die Unstetigkeit rückt also mit der Geschwindigkeit a entweder nach vorwärts oder nach rückwärts, und aus (3) folgt noch

$$(5) \qquad K'/K = \mp a.$$

Wenn nun aber an einer Stelle $\varkappa$ eine Unstetigkeit K, K' beliebig gegeben ist, die der Bedingung (5) nicht genügt, so müssen wir eine solche Unstetigkeitsstelle als durch das Zusammenfallen zweier entstanden betrachten, von denen die eine vorwärts, die andere rückwärts läuft. Haben diese beiden die Unstetigkeiten K_1, K_1'; K_2, K_2', so ergeben sich zur Bestimmung dieser Größen

$$(6) \qquad \begin{aligned} aK_1 - K_1' &= 0, \quad & K_1 + K_2 &= K, \\ aK_2 + K_2' &= 0, \quad & K_1' + K_2' &= K', \end{aligned}$$

woraus K_1, K_2, K_1', K_2' aus K und K' eindeutig bestimmt sind.

Alle diese Verhältnisse lassen sich leicht auch an den Ausdrücken für η durch die trigonometrische Reihe, oder was dasselbe ist, durch die willkürlichen Funktionen nachweisen, so daß sich diese Ausdrücke auch bei dieser Betrachtungsweise als gültig erweisen. Es ist nämlich nach § 85 (9):

$$2\frac{\partial\eta}{\partial x} = f'(x+at) + f'(x-at) + \frac{1}{a}F(x+at) - \frac{1}{a}F(x-at)$$

$$2\frac{\partial\eta}{\partial t} = af'(x+at) - af'(x-at) + F(x+at) + F(x-at).$$

Wenn also die Funktionen $f'(x)$ und $F(x)$ bei $x = \xi$ eine Unstetigkeit haben, so gehen auch nach diesen Formeln, wenn t von 0 an wächst, von diesem Punkte aus je eine Unstetigkeit von $\partial\eta/\partial x$ und $\partial\eta/\partial t$ mit der Geschwindigkeit a nach vorwärts und nach rückwärts, und wenn $af'(x) + F(x)$ bei ξ stetig ist, verschwindet die rückwärts laufende, und wenn $-af'(x) + F(x)$ stetig ist, die vorwärts laufende Unstetigkeit. Beachtet man noch, daß der Ausdruck

$$a\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial t} = af'(x+at) + F(x+at)$$

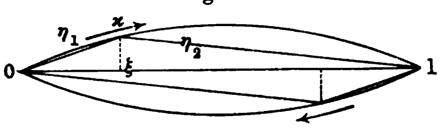
für ein feststehendes t bei $x = \xi + at$ stetig ist, so erkennt man, daß die Bedingung erfüllt ist, daß von der bereits nach vorwärts gewanderten Unstetigkeit nicht abermals eine Unstetigkeit nach rückwärts läuft. Dies würde nur dann der Fall sein, wenn $\xi + at = \xi_1$ die Abszisse einer zweiten Unstetigkeitsstelle von $f'(x)$ und $F(x)$ wäre. Es würden dann die von ξ und ξ_1 auslaufenden Unstetigkeitswellen einfach übereinander hinweg laufen.

§ 89.

Beispiel.

Wir können in manchen Fällen die Bewegung der Saite ohne die allgemeine Theorie, mit Benutzung der Bedingungen, die im vorigen Paragraphen für die Bewegung der Unstetigkeiten auf-

Fig. 32.



gestellt sind, bestimmen. Dies soll das folgende Beispiel zeigen. Dazu bemerke man zunächst, daß die Hauptgleichung [§ 83 (13)] identisch befriedigt ist, wenn η sowohl in bezug auf x als in bezug auf t **linear** ist. Es besteht dann die Gestalt der Saite in jedem Augenblicke aus geradlinigen Strecken. Wir wollen den Fall betrachten, daß sich die Saite nur in zwei solche Strecken teilt und also die beistehende Gestalt hat (Fig. 32).

Da wir den Anfangspunkt der Zeit beliebig wählen können, so setzen wir:

$$(1)\qquad \begin{aligned}\eta_1 &= a_1 x(t-t_1),\\ \eta_2 &= a_2(l-x)t,\end{aligned}$$

worin a_1, a_2 zwei Konstanten sind, und wodurch der Bedingung genügt ist, daß die Saite in den Punkten $x = 0$ und $x = l$ fest sein soll. Wir berechnen die Abszisse ξ des Schnittpunktes $\varkappa$, von dem wir annehmen, daß er mit der konstanten Geschwindigkeit a nach vorwärts wandern soll. Wir erhalten ξ aus der Gleichung:

$$a_1 \xi (t - t_1) = a_2 (l - \xi) t,$$

und da ξ eine ganze lineare Funktion von t sein muß, so ergibt sich:

$$-a_1 = a_2 = \alpha a,$$

worin α eine neue Konstante ist. Es folgt dann

$$\xi = \frac{lt}{t_1},$$

also $l = at_1$, und aus (1) folgt nun:

$$(2)\qquad \eta_1 = \alpha(l - at)x, \qquad \eta_2 = \alpha(l - x)at,$$

und wenn wir $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $x = \xi$ setzen,

$$(3)\qquad \begin{aligned}\eta &= \alpha(l-at)\xi &&= \alpha(l-\xi)at,\\ \xi &= at, &\eta &= \alpha(l-\xi)\xi.\end{aligned}$$

Es ergibt sich aber aus (2):

$$(4)\qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial x} = \alpha(l - at), \qquad \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = -\alpha a t,$$

$$(5)\qquad \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = -\alpha a x, \qquad \frac{\partial \eta_2}{\partial t} = \alpha a (l - x),$$

also, wenn man $x = \xi = at$ setzt,

$$a\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial t} = a\frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \frac{\partial \eta_2}{\partial t} = \alpha a(l - 2\xi),$$

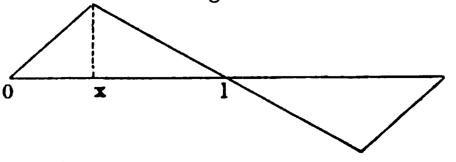
entsprechend der Bedingung § 88 (1) oder (2).

Für $t = 0$ hat die Saite die Gleichgewichtslage und besteht nur aus der Strecke η_2. Die Geschwindigkeit wird dann durch die Formel (5) bestimmt; sie ist positiv und bei $x = 0$ unstetig. Während nun at von 0 bis l geht, läuft der Punkt $\varkappa$ mit der in der x-Richtung konstanten Geschwindigkeit a von 0 bis l und $\varkappa$ beschreibt einen Parabelbogen [nach (3)]. Für $at = l$ ist die

Saite wieder geradlinig. Die Geschwindigkeit ist durch die erste Formel (5) bestimmt. Sie ist negativ und bei $x = l$ unstetig; von nun an geht der Unstetigkeitspunkt wieder zurück, ist aber nach unten gekehrt.

Betrachten wir noch die Bewegung eines einzelnen Punktes mit der Abszisse x als Funktion der Zeit, so ergibt sich, daß dieser Punkt, solange er der Linie η_2 angehört, also während at von 0 bis x geht, mit gleichförmiger Geschwindigkeit in die Höhe steigt, von da an aber, während at von x bis l geht, wieder mit gleichförmiger Geschwindigkeit bis zur Gleichgewichtslage hinabsteigt. Von hier an wiederholt sich das Spiel nach der ent-

Fig. 33.



gegengesetzten Seite. In der Fig. 33 ist η als Funktion von at dargestellt für ein x, das kleiner ist als $\frac{1}{2} l$.

Nach Helmholtz[1]) bewegt sich nahezu nach diesem Gesetze die Violinsaite. Der Bogen erteilt dem Punkte, in dem die Saite gestrichen wird, eine der Fig. 33 entsprechende Bewegung.

[1]) Die Lehre von der Tonempfindung, 2. Auflage. Braunschweig 1865. Wissenschaftl. Abhandlungen, Bd. 1. Leipzig 1881. Vgl. auch Harnack, Mathem. Annalen 29, 486 (1887).

Zwölfter Abschnitt.

Die Riemannsche Integrationsmethode.

§ 90.

Allgemeine Integration der Differentialgleichung der schwingenden Saite.

Wir wollen das Problem der schwingenden Saite noch nach einer anderen Methode behandeln, die uns die Lösung unter noch allgemeineren Voraussetzungen geben wird, und die zugleich Aufschluß gibt über die Grenzbedingungen, die zur vollständigen Bestimmung der Lösung notwendig und hinreichend sind.

Riemann hat diese Methode zuerst auf ein allgemeineres Problem angewandt, wie wir später noch sehen werden [1]).

Wir betrachten die Differentialgleichung § 83 (13):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0,$$

und setzen darin zur Vereinfachung

$$at = y, \tag{1}$$

so daß die Differentialgleichung die Form annimmt:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \tag{2}$$

Zur Veranschaulichung wollen wir nun x, y als rechtwinkelige Koordinaten in einer Ebene deuten. Dem Anfangswert $t = 0$ oder $y = 0$ entspricht dann die x-Achse, den Enden der Saite $x = 0$ und $x = l$ entsprechen die y-Achse und eine ihr parallele Gerade.

---

[1]) Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Riemanns gesammelte Werke, 2. Aufl., S. 171. (Letzter Abschnitt dieses Werkes.)

Wir wenden nun in dieser Ebene das **Gaußsche** Theorem in der Form an [Bd. I, § 41 (9)]:

$$\iint\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)dx\,dy=\int(U dx + V dy), \tag{3}$$

worin sich das Doppelintegral über ein Flächenstück S erstreckt, in dem U, V stetige Funktionen des Ortes sind, und das einfache Integral auf die Begrenzung dieses Flächenstückes, was im positiven Sinne zu umkreisen ist.

Darin nehmen wir

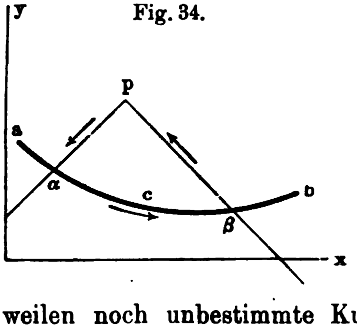
$$U=\frac{\partial \eta}{\partial y},\quad V=\frac{\partial \eta}{\partial x}, \tag{4}$$

und setzen also diese beiden Differentialquotienten als stetig voraus. Dann folgt aus (4) und (2):

$$\int\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dy+\frac{\partial \eta}{\partial y}\,dx\right)=0. \tag{5}$$

Jetzt wollen wir das Flächenstück S folgendermaßen annehmen. Wir ziehen von einem beliebigen Punkte p, der die Koordinaten x_1, y_1 haben mag, für den die Funktion η bestimmt werden soll, die beiden gegen die Koordinatenachsen unter 45° geneigten Geraden

Fig. 34.



$$\begin{aligned} x-y&=x_1-y_1,\\ x+y&=x_1+y_1, \end{aligned} \tag{6}$$

und begrenzen das Gebiet S durch diese beiden Linien, und eine einstweilen noch unbestimmte Kurve c, die diese Geraden in α, β treffen soll, wie die Fig. 34 zeigt.

Es ist dann $dx = dy$ an (α, p) und $dx = -dy$ an (β, p). Folglich

$$\int_\alpha^p\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dy+\frac{\partial \eta}{\partial y}\,dx\right)=\int_\alpha^p\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \eta}{\partial y}\,dy\right)=\eta_p-\eta_\alpha,$$

$$\int_\beta^p\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dy+\frac{\partial \eta}{\partial y}\,dx\right)=-\int_\beta^p\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dx+\frac{\partial \eta}{\partial y}\,dy\right)=-\eta_p+\eta_\beta,$$

und es folgt also aus (5):

$$(7)\qquad 2\eta_p = \eta_\alpha + \eta_\beta + \int\limits_\alpha^\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dy + \frac{\partial \eta}{\partial y}\,\partial x\right),$$

worin das Integral von α bis β über die Kurve c genommen ist.

Hieraus ist zu sehen, daß die Funktion η in dem Punkte p bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist, wenn längs der Kurve c zwischen α und β die Differentialquotienten $\partial\eta/\partial x$ und $\partial\eta/\partial y$ gegeben sind. Denn dann ist

$$(8)\qquad \eta = \int \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \eta}{\partial y}\,dy\right)$$

an der Kurve c gleichfalls gegeben, wenn der Wert von η außerdem noch in einem Punkte dieser Kurve gegeben ist. Man kann auch längs der Kurve c die Funktion η selbst nebst ihrem nach der Normale genommenen Differentialquotienten gegeben annehmen. Der Wert von η im Punkte p hängt hiernach nur von dem Teile der Kurve ab, der zwischen α und β verläuft.

Um aber die Frage zu beantworten, inwieweit der gefundene Ausdruck für η_p den Bedingungen für diese Funktion wirklich genügt, setzen wir den Ausdruck (7) nach (8) in die Form:

$$\begin{aligned} 2\eta_p = &\int^\alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \eta}{\partial y}\,dy\right) + \int^\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \eta}{\partial y}\,dy\right) \\ &- \int^\alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dy + \frac{\partial \eta}{\partial y}\,dx\right) + \int^\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dy + \frac{\partial \eta}{\partial y}\,dx\right) \end{aligned}$$

oder:

$$(9)\quad 2\eta_p = \int^\alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)(dx - dy) + \int^\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)(dx + dy),$$

worin die Integrale so zu verstehen sind, daß sie von einem beliebigen unteren Grenzpunkte aus längs der Kurve c bis zu dem Punkte α oder β zu führen sind.

Lassen wir nun p variieren, also x_1, y_1 um dx_1, dy_1 wachsen, so bleibt α nach (6) ungeändert, wenn $x_1 - y_1$ ungeändert bleibt, und β, wenn $x_1 + y_1$ ungeändert bleibt, und es ist

$$(10)\quad dx_\alpha - dy_\alpha = dx_1 - dy_1, \quad dx_\beta + dy_\beta = dx_1 + dy_1,$$

also durch Differentiation von (9):

$$\begin{aligned} (11)\qquad 2\,d\eta_p = &\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_\alpha (dx_1 - dy_1) \\ &+ \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_\beta (dx_1 + dy_1). \end{aligned}$$

Setzen wir längs der Kurve c

$$(12)\qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \varphi_1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \varphi_2$$

und bezeichnen mit $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ die Werte dieser Funktionen in einem Punkte α, so ist nach (11)

$$(13)\qquad \begin{aligned} 2\frac{\partial \eta_p}{\partial x_1} &= \quad \varphi_1(\alpha) - \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta), \\ 2\frac{\partial \eta_p}{\partial y_1} &= -\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) + \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta). \end{aligned}$$

Durch (9) ist η_p in zwei Bestandteile η'_p, η''_p zerlegt, wenn wir

$$\eta'_p = \frac{1}{2}\int^{\alpha}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)(dx - dy), \quad \eta''_p = \frac{1}{2}\int^{\beta}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)(dx + dy)$$

setzen, und für diese ergibt sich wie in (13):

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial \eta'_p}{\partial x_1} &= \quad \varphi_1(\alpha) - \varphi_2(\alpha), & 2\frac{\partial \eta''_p}{\partial x_1} &= \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta), \\ 2\frac{\partial \eta'_p}{\partial y_1} &= -\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha), & 2\frac{\partial \eta''_p}{\partial y_1} &= \varphi_1(\beta) + \varphi_2(\beta), \end{aligned}$$

und folglich

$$\frac{\partial \eta'_p}{\partial x_1} = -\frac{\partial \eta'_p}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial \eta''_p}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta''_p}{\partial y_1},$$

und daraus folgt, daß die Differentialgleichung (2) durch η'_p und durch η''_p, also auch durch $\eta_p = \eta'_p + \eta''_p$ befriedigt ist, wenn x, y durch x_1, y_1 ersetzt wird.

In bezug auf die Grenzbedingungen haben wir aber zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Wir nehmen ein Stück a, b der Kurve c, das von keiner unter 45° gegen die Koordinatenachsen geneigten Geraden in mehr als einem Punkte geschnitten wird (Fig. 34). Wenn wir dann den Punkt p nach α rücken lassen, so rückt β zugleich nach α, und die Gleichungen (13) ergeben:

$$\left(\frac{\partial \eta_p}{\partial x_1}\right)_\alpha = \varphi_1(\alpha), \quad \left(\frac{\partial \eta_p}{\partial y_1}\right)_\alpha = \varphi_2(\alpha),$$

und Entsprechendes gilt, wenn wir p nach β rücken lassen. In diesem Falle also können die Differentialquotienten von η an der Kurve ab beliebig gegeben sein.

2. Anders liegen die Verhältnisse aber, wenn eine unter 45° gegen die Achsen geneigte Linie etwa eine Linie $x + y = \text{const.}$

die Kurve zweimal schneidet. Dann wird, wenn p nach α rückt, β nicht nach α, sondern nach einem anderen durch α bestimmten Punkt α' rücken (Fig. 35), und wenn dann die Differentialquotienten von η_p im Punkte α in $\varphi_1(\alpha)$ und $\varphi_2(\alpha)$ übergehen sollen, so muß zwischen diesen beiden Funktionen nach (13) die Relation bestehen:

$$\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\alpha) = \varphi_1(\alpha') + \varphi_2(\alpha'), \tag{14}$$

diese beiden Funktionen sind also nicht mehr längs der ganzen Kurve willkürlich.

Ebenso ergibt sich, wenn eine Linie $x - y = \text{const.}$ die Kurve c in zwei Punkten β, β' schneidet, für zwei solche Punkte aus (13) die Bedingung:

$$\varphi_1(\beta) - \varphi_2(\beta) = \varphi_1(\beta') - \varphi_2(\beta'). \tag{15}$$

Wir erhalten hiernach auf der Kurve, längs deren die Differentialquotienten von η gegeben sind, gewisse kritische Punkte

Fig. 35.

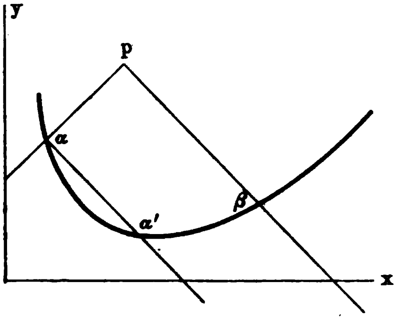
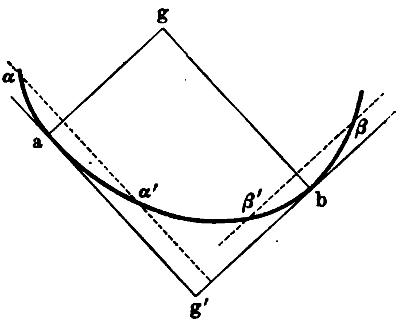


Fig. 36.



a, b, die, wenn die Kurve stetig gekrümmt ist, dadurch bestimmt sind, daß die Tangenten dort einen Winkel von 45° mit der x-Achse einschließen (Fig. 36). Längs ab können dann die Differentialquotienten von η beliebig vorgeschrieben sein und dadurch ist die Funktion η in dem ganzen Dreieck abg (sogar in dem Rechteck $gag'b$) eindeutig bestimmt. Über a und b hinaus sind die Differentialquotienten von η nicht mehr willkürlich, sondern an die Relationen (14), (15) gebunden (wenigstens wenn in ag und bg die Differentialquotienten von η stetig bleiben sollen).

Die kritischen Punkte können auch Ecken in der Kurve c sein, wie wir nachher an einem Beispiele sehen werden.

Die Relationen (14), (15) ergeben sich nach der Bedeutung (12) der Funktionen φ auch einfach aus der d'Alembertschen

Form des Integrales η, nach der η die Summe einer Funktion von $x + y$ und einer Funktion von $x - y$ ist. Setzen wir hiernach

$$\eta = f(x + y) + f_1(x - y),$$

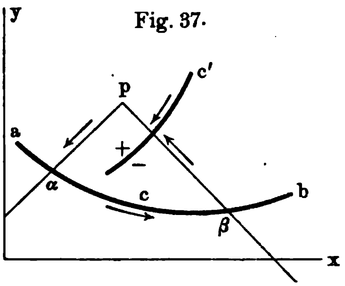
so wird

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2 f'(x + y)$$

eine Funktion von $x + y$ allein, und kann also in den beiden Punkten α, α', in denen $x + y$ denselben Wert hat, keine verschiedenen Werte haben. Dies besagt die Relation (14), und ebenso wird (15) abgeleitet.

Die Form der Grenzbedingungen, die hier vorausgesetzt ist, würde auf solche Probleme anwendbar sein, bei denen vorgeschriebene Werte von $\partial\eta/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$ nicht in einem Augenblick über die ganze Saite gegeben wären, sondern nach einem gegebenen Gesetze mit der Zeit über die Saite dahin wanderten; dieses Gesetz findet dann eben in der Kurve c seine geometrische Darstellung.

Fig. 37.



Darauf läßt sich auch ein praktisch wichtiges Problem zurückführen, das von Wirtinger angeregt und von Radaković gelöst ist[1]).

Es handelt sich dabei um die Bewegung einer Saite unter dem Einfluß einer Kraft von gegebener (auch in der Zeit veränderlicher) Stärke, deren Angriffspunkt nach einem gegebenen Gesetze über die Saite wandert.

Es sind dies Verhältnisse, wie sie, in großem Maßstabe, etwa bei einer Eisenbahnbrücke bestehen, während ein Zug darüber fährt.

Wir können uns den Vorgang so vorstellen, daß im Augenblick t an der Stelle $x = \xi$ eine Stoßkraft μP auf ein Massenelement μ der Saite ausgeübt wird, worin ξ und P gegebene Funktionen der Zeit sind. Dieser Stoß wird eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung von μ hervorrufen, die gleich P ist.

Die Abhängigkeit zwischen ξ und t oder zwischen ξ und y wird in unserer xy-Ebene durch eine Kurve c' dargestellt (Fig. 37),

---

[1]) Radaković: „Über die Bewegung einer Saite unter der Einwirkung einer Kraft mit wanderndem Angriffspunkt". Sitzungsberichte der Wiener Akademie 108, 577 (1899).

und an dieser Kurve besteht mit Rücksicht auf (1) die Bedingung

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_+ - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_- = \frac{P}{a}, \tag{16}$$

während η selbst an dieser Linie stetig sein muß. Denkt man sich η über der xy-Ebene als Ordinate einer Fläche aufgetragen, so hat diese Fläche über c' eine scharfe Kante, bleibt übrigens stetig zusammenhängend. Die Tangente an dieser Kante wird bestimmt durch das nach der Richtung c' genommene Differentialverhältnis $d\eta$, dy, das den Ausdruck hat:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{d\xi}{dy}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

und dies ist längs c' stetig. Daraus ergibt sich:

$$\frac{d\xi}{dy}\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_-\right] = -\frac{P}{a}. \tag{17}$$

Die Differentialquotienten $\partial\eta/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$ haben also an der Kurve c' vorgeschriebene Unstetigkeiten:

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_+ - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)_- = X,$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_+ - \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_- = Y.$$

Man muß dann bei Anwendung des Gaußschen Satzes auf die Fläche S beide Ufer der Kurve c' zur Begrenzung rechnen, und erhält auf der rechten Seite der Formel (7) ein Zusatzglied:

$$-\int_{c'}(X dy + Y dx),$$

wobei aber nur über den Teil der Kurve c' zu integrieren ist, der innerhalb S liegt. Spezielle Beispiele dieses Problems sind in der erwähnten Arbeit von Radaković enthalten.

§ 91.

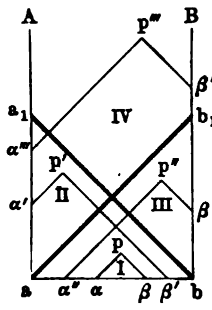
Erzwungene Schwingungen.

Nach der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Methode läßt sich das Problem der erzwungenen Schwingungen einer Saite behandeln. Wir verstehen darunter die Bewegung einer gespannten Saite, bei der die Enden eine vorgeschriebene Bewegung haben, während zugleich irgend ein Anfangszustand gegeben ist.

Ein zpezieller Fall ist es dann, daß das eine oder auch alle beide Enden fest sind. Eine solche Bewegung ist realisierbar, wenn etwa die Enden mit Stimmgabeln verbunden sind, die eine bekannte Bewegung haben.

Die Kurve c, die wir im vorigen Paragraphen benutzt haben, setzt sich jetzt aus drei geradlinigen Zügen zusammen, von denen der eine ein Stück der x-Achse von der Länge der Saite, die wir hier zur Längeneinheit nehmen wollen, ist, während die beiden anderen der y-Achse parallel nach der Seite der positiven y ins Unendliche verlaufen. Die kritischen Punkte sind dann die beiden Ecken a, b (Fig. 38). Das Gebiet, in dem die Funktion η gesucht wird, ist der in der Richtung nach A, B unbegrenzte rechteckige Streifen $(abAB)$. Die Grenzbedingungen seien die folgenden:

Fig. 38.



(1) für $y = 0$, $0 < x < 1$:

$$\eta = f(x), \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = F(x);$$

(2) für $x = 0$, $y > 0$:

$$\eta = \varphi(y), \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \Phi(y);$$

(3) für $x = 1$, $y > 0$:

$$\eta = \psi(y), \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \Psi(y).$$

Hierin müssen

$$f(x),\ F(x),\ f'(x); \quad \varphi(y),\ \Phi(y),\ \varphi'(y); \quad \psi(y),\ \Psi(y),\ \psi'(y)$$

stetige Funktionen der Argumente sein und wegen der Stetigkeit in den Ecken muß

$$(4) \quad \begin{array}{lll} \varphi(0) = f(0), & \Phi(0) = f'(0), & \Psi(0) = f'(1); \\ \psi(0) = f(1), & \varphi'(0) = F(0), & \psi'(0) = F(1) \end{array}$$

sein. Ferner ist dabei zu bemerken, daß $f(x)$ und $F(x)$ nur für die Argumentwerte zwischen 0 und 1, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ nur für positive Argumentwerte gegeben sind, und daß $\Phi(y)$, $\Psi(y)$ durch die übrigen Funktionen [nach § 90 (14), (15)] bestimmt sind, worauf wir nachher zurückkommen.

Wenn wir nach der Formel § 90 (7):

$$(5)\qquad 2\eta_p = \eta_\alpha + \eta_\beta + \int_\alpha^\beta \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\,dy + \frac{\partial \eta}{\partial y}\,dx\right)$$

die Funktion η bestimmen wollen, haben wir, wie die Fig. 38 oder 39 zeigt, vier Teilgebiete I, II, III, IV zu unterscheiden. Bezeichnen wir jetzt die Koordinaten des Punktes p (oder p', p'', p''') mit x, y, so haben in dem Gebiete I die Punkte α, β die Koordinaten $x-y$, $x+y$, und ähnlich sind die Koordinaten der Punkte α', β'; α'', β''; α''', β''' für die drei anderen Gebiete bestimmt. Dann ergibt die Formel (5), wenn wir die Integrationsvariable mit α bezeichnen:

(6) $y < x, \quad y + x < 1$:

$$2\eta = f(x-y) + f(x+y) + \int_{x-y}^{x+y} F(\alpha)\,d\alpha \quad \text{(im Gebiet I)};$$

(7) $y > x, \quad y + x < 1$:

$$2\eta = \varphi(y-x) + f(y+x) - \int_0^{y-x} \Phi(\alpha)\,d\alpha + \int_0^{y+x} F(\alpha)\,d\alpha$$

(im Gebiet II);

(8) $y < x, \quad y + x > 1$:

$$2\eta = f(x-y) + \psi(x+y-1) + \int_{x-y}^{1} F(\alpha)\,d\alpha + \int_0^{x+y-1} \Psi(\alpha)\,d\alpha$$

(im Gebiet III);

(9) $y > x, \quad y + x > 1$:

$$2\eta = \varphi(y-x) + \psi(x+y-1) - \int_0^{y-x} \Phi(\alpha)\,d\alpha + \int_0^{1} F(\alpha)\,d\alpha + \int_0^{x+y-1} \Psi(\alpha)\,d\alpha$$

(im Gebiet IV).

Es bleibt noch übrig, die Funktionen $\Phi(y)$, $\Psi(y)$ nach § 90 (14), (15) zu bestimmen. Nach § 90 (12) ist darin zu setzen:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = f'(x), && \varphi_2 = F(x) && \text{an der Strecke } (ab),\\
&\varphi_1 = \Phi(y), && \varphi_2 = \varphi'(y) && \text{„ „ „ } (aA),\\
&\varphi_1 = \Psi(y), && \varphi_2 = \psi'(y) && \text{„ „ „ } (bB),
\end{aligned}$$

und die dort mit α, α', β, β' bezeichneten Punkte haben die Koordinaten

$$0,\ y; \quad y,\ 0; \quad 1,\ y; \quad 1-y,\ 0,$$

wenn $y < 1$ ist, und

$$0,\ y;\quad 1,\ y-1;\quad 1,\ y;\quad 0,\ y-1,$$

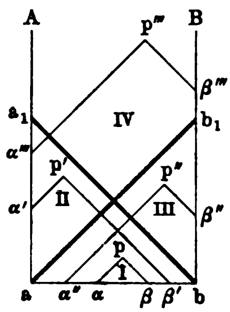
wenn $y > 1$ ist. Wir erhalten daher:

$$(10)\quad \left.\begin{aligned} \Phi(y) &= F(y) + f'(y) - \varphi'(y) \\ \Psi(y) &= -F(1-y) + f'(1-y) + \psi'(y) \end{aligned}\right\} y < 1,$$

$$(11)\quad \left.\begin{aligned} \Phi(y) &= \Psi(y-1) + \psi'(y-1) - \varphi'(y) \\ \Psi(y) &= \Phi(y-1) - \varphi'(y-1) + \psi'(y) \end{aligned}\right\} y > 1.$$

Für $y = 1$ ergeben beide Ausdrücke nach (4) für $\Phi(1)$ und $\Psi(1)$ denselben Wert, und es sind also durch (10) und (11) $\Phi(y)$ und $\Psi(y)$ als **stetige Funktionen** für beliebige Argumentwerte bestimmt.

Fig. 39.



Zur Vereinfachung wollen wir bei der weiteren Diskussion dieser Resultate die Annahme machen, daß $\psi(y) = 0$ ist. Dies entspricht dem Falle der schwingenden Saite, in dem das eine Ende, $x = 1$, **fest** ist, während das andere Ende $x = 0$ in einer gegebenen Bewegung begriffen ist.

Dazu kommt ein beliebiger, an die Bedingungen (4) gebundener Anfangszustand $[F(1) = 0,\ f(1) = 0]$.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich aus (10):

$$(12)\quad \begin{aligned} \Phi(y) &= \quad F(y) + f'(y) - \varphi'(y), \\ \Psi(y) &= -F(1-y) + f'(1-y), \end{aligned}\quad y < 1,$$

und wenn man in den Gleichungen (11) hiervon Gebrauch macht:

$$(13)\quad \begin{aligned} \Phi(y) &= -F(2-y) + f'(2-y) - \varphi'(y), \\ \Psi(y) &= \quad F(y-1) + f'(y-1) - 2\varphi'(y-1), \end{aligned}\quad 1 < y < 2.$$

Hierdurch sind die Funktionen $\Phi(y)$ und $\Psi(y)$ in dem Intervall $0 < y < 2$ bestimmt.

Ist $y > 2$, so wenden wir die Formeln (11) an, und erhalten

$$\Phi(y) = \Psi(y-1) - \varphi'(y),$$
$$\Psi(y-1) = \Phi(y-2) - \varphi'(y-2),$$

also durch Addition dieser beiden Formeln:

$$(14)\qquad \Phi(y) = \Phi(y-2) - \varphi'(y) - \varphi'(y-2),$$

und ebenso aus (11):

$$\begin{aligned} \Psi(y) &= \Phi(y-1) - \varphi'(y-1), \\ \Phi(y-1) &= \Psi(y-2) - \varphi'(y-1), \end{aligned}$$

woraus wieder durch Addition:

$$\Psi(y) = \Psi(y-2) - 2\varphi'(y-1). \tag{15}$$

Daraus ergibt sich dann für jedes positive y:

$$\begin{aligned} &\Phi(y+2) = \Phi(y) - \varphi'(y) - \varphi'(y+2), \\ &\Phi(y+4) = \Phi(y+2) - \varphi'(y+2) - \varphi'(y+4), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und folglich für ein beliebiges ganzzahliges n:

$$\begin{aligned} \Phi(y+2n) = \Phi(y) - \varphi'(y) - 2\varphi'(y+2) - \cdots \\ - 2\varphi'(y+2n-2) - \varphi'(y+2n), \end{aligned} \tag{16}$$

und auf demselben Wege:

$$\begin{aligned} \Psi(y+2n) = \Psi(y) - 2\varphi'(y+1) - 2\varphi'(y+3) - \cdots \\ - 2\varphi'(y+2n-1). \end{aligned} \tag{17}$$

Wir wollen als Beispiel die Annahme machen $\varphi'(y) = e^{\pi i \lambda y}$, worin λ eine reelle Zahl ist. Um zu reellen Resultaten zu kommen, haben wir in den Endformeln den reellen Teil und den imaginären Teil für sich zu betrachten.

Es ist dann

$$\begin{aligned} &\varphi'(y) + 2\varphi'(y+2) + \cdots 2\varphi'(y+2n-2) + \varphi'(y+2n) \\ &= e^{i\pi\lambda y}(1 + 2e^{2\pi i\lambda} + 2e^{4\pi i\lambda} + \cdots + 2e^{(2n-2)\pi i\lambda} + e^{2n\pi i\lambda}) \\ &\qquad = e^{i\pi\lambda y}(1 - e^{2n\pi i\lambda})\frac{1 + e^{2\pi i\lambda}}{1 - e^{2\pi i\lambda}} \end{aligned}$$

oder wenn λ eine ganze Zahl ist:

$$= 2ne^{i\pi\lambda y},$$

und ebenso

$$\begin{aligned} &2\varphi'(y+1) + 2\varphi'(y+3) + \cdots + 2\varphi'(y+2n-1) \\ &\qquad = 2e^{\pi i\lambda(y+1)}\frac{1 - e^{2n\pi i\lambda}}{1 - e^{2\pi i\lambda}} \text{ oder } = 2ne^{i\pi\lambda(y+1)}. \end{aligned}$$

Wenn also λ nicht eine ganze Zahl ist, so bleiben die Ausdrücke (16) und (17) mit wachsendem n in endlichen Grenzen eingeschlossen. Ist aber λ eine ganze Zahl, so wachsen diese Ausdrücke unter fortwährendem Schwanken zwischen unaufhörlich wachsenden Grenzen und diese Eigenschaften der Bewegung übertragen sich auch auf den Ausdruck (9) für η.

Wir haben früher gesehen (§ 84), daß die Schwingungsdauer des Grundtones unserer Saite (von der Länge 1 und mit dem Werte $a = 1$) bei festgehaltenen Enden gleich 2 ist, und daß die Schwingungsdauer des $n$ten harmonischen Obertones gleich $2/n$ ist. Bei der Annahme, die wir hier gemacht haben, ist $2/\lambda$ die Schwingungsdauer der gezwungenen Bewegung des Anfangspunktes unserer Saite, und es folgt also daraus, daß die Schwingungsamplituden der Saite in endlichen Grenzen eingeschlossen bleiben, wenn die Schwingungsdauer des Endes nicht mit der Schwingungsdauer eines der harmonischen Obertöne übereinstimmt. Fällt aber die Schwingungsdauer des Endpunktes mit der Schwingungsdauer eines der Obertöne zusammen, so wachsen die Amplituden unaufhörlich. Hat also der eine Endpunkt der Saite eine Bewegung, die zum Grundton der Saite harmonisch ist, so wird die Saite in kräftige Mitschwingung versetzt. Selbstverständlich gelten aber unsere Formeln nur solange, als die allgemeine Grundlage der Theorie, die auf der Annahme unendlich kleiner Bewegungen beruht, noch zulässig ist.

§ 92.
Fortschreiten einer Erschütterung des Endpunktes der Saite.

Diese Betrachtungen sind geeignet, ein Paradoxon aufzuklären, das sich in dem Problem der schwingenden Saite zeigt und darin besteht, daß sich die beiden Variablen x, y, obwohl sie in der Differentialgleichung [§ 90 (2)] ganz gleichartig vorkommen, in bezug auf die Grundbedingungen ganz verschieden verhalten.

Nehmen wir z. B. eine einseitig unbegrenzte Saite an, die an ihrem Ende $x = 0$ einen für alle Zeiten gegebenen Bewegungsstand hat, so daß

$$(1) \quad \eta = f(y), \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = F(y), \quad \text{für } x = 0, \quad -\infty < y < +\infty,$$

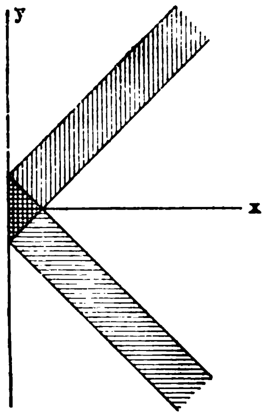
so können wir, wenn $f(y)$, $F(y)$ für alle Werte von y bekannt sind, ebenso integrieren, als ob bei einer ganz unbegrenzten Saite der Anfangszustand gegeben wäre, und wir erhalten:

$$(2) \qquad 2\eta = f(y-x) + f(y+x) + \int_{y-x}^{y+x} F(\alpha)\, d\alpha.$$

Da es nun physikalisch undenkbar ist, daß ein später eintretender Zustand des Endes einen Einfluß auf frühere Zustände der Saite hat, so ist dies Resultat bei beliebigem f und F nur dadurch zu verstehen, daß noch ein anderer Einfluß aus dem Unendlichen her wirksam ist.

Nehmen wir z. B. $F(y) = 0$ und $f(y)$ nur in einem Intervall um den Nullpunkt herum von Null verschieden an, so wird η in der xy-Ebene nur in zwei unter 45° gegen die Achsen geneigten Streifen von Null verschieden sein. Es wird also eine Welle längs der Saite aus dem Unendlichen hereinlaufen bis an das feste Ende und von da ins Unendliche zurückkehren.

Fig. 40.



Durch (2) ist η als Summe einer Funktion von $x + y$ und einer Funktion von $x - y$ dargestellt, und wenn nun η in einem Punkt x, y unabhängig sein soll von den Werten der Funktionen f, F, wie sie für größere Werte von y, also später stattfinden, so muß der Teil, der von $x + y$ abhängt, wegfallen, es muß also $F(y) = - f'(y)$ sein und infolgedessen

$$\eta = f(y - x).$$

Wenn also unter den sonstigen Voraussetzungen der Figur diese Bedingung noch befriedigt ist, so wird der in der Fig. 40 nach unten laufende Streifen wegfallen, und es wird von der Zeit der Erschütterung an eine Welle längs der Saite nach vorwärts laufen.

§ 93.
Einfache harmonische Schwingungen.

Bereits Lagrange hat die allgemeine Differentialgleichung der analytischen Mechanik auf unendlich kleine Oszillationen materieller Punktsysteme und besonders auf das Problem der schwingenden Saite angewandt. Auf dieses Hilfsmittel hat Lord Rayleigh zurückgegriffen und daraus eine Integrationsmethode hergeleitet, deren Grundgedanken wir hier kurz darlegen und auf einige einfache Probleme anwenden wollen[1]).

[1]) Lagrange, Mécanique analytique, Seconde Partie, Section VI. Sur les oscillations très petites d'un système quelconque de Corps (Paris 1811). — Rayleigh, Theory of Sound (London 1894).

Wir betrachten zunächst ein System, dessen Lage durch eine endliche Anzahl voneinander unabhängiger veränderlicher Größen $q_1, q_2 \ldots, q_n$, die wir seine Koordinaten nennen, bestimmt wird, wie wir es in § 128 des ersten Bandes erklärt haben. Dieses System soll unter dem Einfluß irgend welcher nicht näher bestimmter Kräfte eine **stabile Gleichgewichtslage** haben, der die Werte Null der Koordinaten entsprechen. Durch eine anfängliche Störung führe dieses System nun Schwingungen um diese Gleichgewichtslage aus, bei denen wir voraussetzen, daß die Werte der Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ immer unendlich klein bleiben. Nach Bd. I, § 128 hat die potentielle Energie V dieses Systems in der Gleichgewichtslage einen Minimumwert, den wir gleich Null annehmen können. Wenn wir also V nach Potenzen von $q_1, q_2 \ldots, q_n$ entwickelt annehmen, und mit den Gliedern zweiter Ordnung abbrechen, so ist V eine homogene Funktion zweiten Grades der q_i, die nur verschwindet, wenn die sämtlichen q_i verschwinden, und außerdem nur positive Werte annimmt (eine definite positive Form).

Wir setzen

$$2V = \sum c_{hk} q_h q_k, \tag{1}$$

worin die Koeffizienten c_{hk} Konstanten des Systems sind und $c_{hk} = c_{kh}$ ist. Bezeichnen wir mit t die Zeit, mit q'_k den Differentialquotienten dq_k/dt, so ist auch die kinetische Energie T eine definite positive Form zweiten Grades der Variablen

$$q'_1, q'_2 \ldots, q'_n,$$

die wir so bezeichnen:

$$2T = \sum a_{hk} q'_h q'_k, \tag{2}$$

worin die $a_{hk} = a_{kh}$ gleichfalls Konstanten des Systems sind. Hieraus erhält man die Differentialgleichungen der Bewegung in der Lagrangeschen Form Bd. I, § 130:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0. \tag{3}$$

Wir erhalten also in (3) ein System linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, das nach Bd. I, § 62 integriert werden kann.

Die Gleichungen (3) werden nach (1) und (2):

$$\begin{gathered} a_{1k}\frac{d^2q_1}{dt^2} + a_{2k}\frac{d^2q_2}{dt^2} + \cdots + a_{nk}\frac{d^2q_n}{dt^2} \\ = - c_{1k} q_1 - c_{2k} q_2 - \cdots - c_{nk} q_n, \qquad k = 1, 2, \ldots n, \end{gathered} \tag{4}$$

und von diesem System suchen wir ein partikulares Integral in der Form

$$(5)\qquad q_h = A_h \cos(mt - \alpha), \qquad h = 1, 2, \ldots n,$$

worin m und α von h unabhängig sein sollen.

Es ergibt sich dann zur Bestimmung von m, $A_1, \ldots A_n$ das System von Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} A_1(a_{1k}m^2 - c_{1k}) + A_2(a_{2k}m^2 - c_{2k}) + \cdots \\ + A_n(a_{nk}m^2 - c_{nk}) = 0, \end{aligned}$$

woraus man die Gleichung $n$ten Grades

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}\lambda - c_{11}, & a_{21}\lambda - c_{21}, \ldots, & a_{n1}\lambda - c_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}\lambda - c_{1n}, & a_{2n}\lambda - c_{2n}, \ldots, & a_{nn}\lambda - c_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

erhält, deren n Wurzeln die Größen $\lambda = m_1^2, m_2^2, \ldots m_n^2$ sind. Für jede dieser Wurzeln erhält man aus (6) die Verhältnisse der $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Wir erhalten so aus (5) n verschiedene, einfache harmonische Schwingungen, aus denen sich die allgemeine Bewegung des Systems zusammensetzt.

Nach einem bekannten Satze der Algebra[1]) kann man durch eine lineare Substitution zwei quadratische Formen gleichzeitig so transformieren, daß in jeder von ihnen nur die Quadrate der Variablen vorkommen. Sind die Formen definit und positiv, so haben alle diese Quadrate positive Koeffizienten, die man für die eine der beiden Formen noch willkürlich, etwa gleich 1 annehmen kann.

Wendet man diesen Satz auf die Funktionen T und V an, so ergibt sich, daß man an Stelle der Koordinaten $q_1, q_2, \ldots q_n$ ein anderes System von Koordinaten $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ einführen kann, in dem die Funktionen T und V die einfache Form annehmen:

$$(8)\qquad \begin{aligned} 2T &= Q_1'^2 + Q_2'^2 + \cdots + Q_n'^2, \\ 2V &= m_1^2 Q_1^2 + m_2^2 Q_2^2 + \cdots + m_n^2 Q_n^2, \end{aligned}$$

und darin sind die $m_1^2, m_2^2, \ldots, m_n^2$ die Wurzeln der Gleichung (7). Man sieht hieraus, daß, wenn V und T, wie wir angenommen haben, positive definite Formen sind, die Wurzeln dieser Gleichung

[1]) Vgl. z. B. Hesse, Analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl., S. 270, 498. Leipzig 1876.

alle reell und positiv sind, und daß also die q_h nach (5) periodische Funktionen der Zeit sind. Wenn diese Wurzeln alle voneinander verschieden sind, so sind die $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$ durch die in (8) liegende Forderung als lineare Funktionen der Variablen $q_1, q_2, \ldots q_n$ eindeutig bestimmt. Es können aber auch gleiche Wurzeln vorkommen, und dann gibt es unendlich viele Bestimmungsarten dieser linearen Funktionen.

Die Variablen $Q_1, Q_2, \ldots$ heißen nach Rayleigh normale Koordinaten des Systems. Sie sind dadurch ausgezeichnet, daß die einfachen harmonischen Schwingungen nur je eine dieser Variablen verändern. Für diese Variablen werden die Differentialgleichungen (3)

$$\frac{d^2 Q_k}{dt^2} + m_k^2 Q_k = 0,$$

und daher

$$Q_k = A_k \cos(m_k t - \alpha_k), \tag{9}$$

worin A_k willkürlich ist.

§ 94.

Variierte Systeme.

Durch das Vorhergehende ist das Problem der kleinen Schwingungen eines Systems auf die Bestimmung der normalen Koordinaten, also im wesentlichen auf die Auflösung einer Gleichung $n$ten Grades zurückgeführt. Dies Resultat läßt sich nun mit Vorteil anwenden, um den Einfluß zu bestimmen, den kleine Änderungen in der Verfassung des Systems auf den Schwingungsvorgang haben.

Um dies zu zeigen, gehen wir aus von einem System S, dessen Lage durch die normalen Koordinaten Q_k bestimmt ist, so daß also die Funktionen T und V durch die Formeln (8), § 93 dargestellt sind. Daneben betrachten wir ein zweites davon nur unendlich wenig verschiedenes System S', in dem T und V die allgemeinen Ausdrücke § 93 (1), (2) haben. Wir nehmen dann die Größen

$$\begin{array}{llll}
a_{11} - 1, & a_{12}, \ldots a_{1n}, & c_{11} - m_1^2, & c_{12}, \ldots c_{1n}, \\
a_{21}, & a_{22} - 1, \ldots a_{2n}, & c_{21}, & c_{22} - m_2^2, \ldots c_{2n}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1}, & a_{n2}, \ldots a_{nn} - 1, & c_{n1}, & c_{n2}, \ldots c_{nn} - m_n^2
\end{array}$$

als unendlich kleine Größen erster Ordnung an, deren höhere Potenzen und Produkte gegen die niedrigeren zu vernachlässigen sind.

Die dem System S' entsprechenden harmonischen Schwingungen seien nach § 93, (5):

(1) $A_h^{(1)} \cos(\mu_1 t - \alpha_1),\quad A_h^{(2)} \cos(\mu_2 t - \alpha_2) \ldots A_h^{(n)} \cos(\mu_n t - \alpha_n),$

so daß $\mu_1^2, \mu_2^2, \ldots \mu_n^2$ die Wurzeln der Gleichung (7) § 93 sind und sich von $m_1^2, m_2^2, \ldots m_n^2$ nur um unendlich kleine Größen unterscheiden. Ebenso sind $A_h^{(k)}$, wenn h von k verschieden ist, als unendlich kleine Größen zu betrachten.

Die Gleichungen (6), § 93 erhalten die Form

$$A_1^{(h)}(a_{1k}\mu_h^2 - c_{1k}) + A_2^{(h)}(a_{2k}\mu_h^2 - c_{2k}) + \cdots A_n^{(h)}(a_{nk}\mu_h^2 - c_{nk}) = 0, \tag{2}$$

worin h und k beide von Null bis n gehen.

Nehmen wir zunächst aus den Gleichungen (2) die heraus, in denen $h = k$ ist, so sind darin nach der Voraussetzung alle Glieder unendlich klein von der zweiten Ordnung mit Ausnahme des $h$ten

$$A_h^{(h)}(a_{hh}\mu_h^2 - c_{hh}),$$

und es muß also auch dieses Glied, d. h. $(a_{hh}\mu_h^2 - c_{hh})$ unendlich klein in der zweiten Ordnung sein, und kann mit der hier festgehaltenen Annäherung $= 0$ gesetzt werden. Es ergibt sich hieraus:

$$a_{hh} m_h^2 - c_{hh} = a_{hh}(m_h^2 - \mu_h^2),$$

und da $m_h^2 - \mu_h^2$ unendlich klein von der ersten Ordnung ist, so kann auf der rechten Seite a_{hh} durch 1 ersetzt werden. Man erhält so:

$$m_h^2 - \mu_h^2 = a_{hh} m_h^2 - c_{hh}, \tag{3}$$

wodurch die Variation der Perioden der einzelnen harmonischen Schwingungen bestimmt ist.

Betrachten wir zweitens eine der Gleichungen (2), in der h von k verschieden ist, so bleiben zwei Glieder, die nicht unendlich klein von der zweiten Ordnung sind:

$$A_k^{(h)}(a_{kk}\mu_h^2 - c_{kk}), \qquad A_h^{(h)}(a_{hk}\mu_h^2 - c_{hk}),$$

und wenn man deren Summe Null setzt, und, was erlaubt ist, μ_h^2, a_{kk}, c_{kk} durch m_h^2, 1, m_k^2 ersetzt:

$$\frac{A_k^{(h)}}{A_h^{(h)}} = \frac{a_{hk} m_h^2 - c_{hk}}{m_k^2 - m_h^2}. \tag{4}$$

§ 95.

Anwendung auf die schwingende Saite.

Obwohl diese Betrachtungen zunächst nur auf solche Systeme passen, deren Lage durch eine endliche Anzahl von Variablen bestimmt werden kann, so werden sie von Lord Rayleigh doch unbedenklich auf Systeme angewendet, in denen dies nicht der Fall ist, wie z. B. auf die Schwingungen eines nicht starren Körpers, und die Resultate, die er dadurch gewinnt, sind sehr beachtenswert; sie sind der Beobachtung zugänglich und stehen mit der Erfahrung im besten Einklang. Wir wollen hier eine Anwendung auf die Transversalschwingungen einer gespannten Saite machen.

Wir nehmen an, daß die Schwingungen in einer Ebene stattfinden, und bezeichnen wie im § 84 mit η die Ordinate eines Punktes mit der Abszisse x, so daß η eine Funktion von x und t ist. Die Länge der Saite ist l, die Masse eines Elementes der Saite ist [§ 83 (10)]

$$\mu = \frac{p\,dx}{g\,l},$$

oder wenn wir $p = \varrho g l$ setzen, so daß ϱg das Gewicht und ϱ die Masse der Längeneinheit ist,

$$\mu = \varrho\,dx.$$

Da die Geschwindigkeit dieses Elementes $\partial\eta/\partial t$ ist, so ergibt sich für die kinetische Energie der ganzen Saite der Ausdruck

$$2T = \int_0^l \varrho \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 dx, \tag{1}$$

und wir wollen auch den Fall nicht ausschließen, daß ϱ eine Funktion von x, die Saite also inhomogen ist.

Um auch den Ausdruck für die potentielle Energie zu bilden, bedenken wir, daß auf das Saitenelement dx im Zustande der Elongation η nach § 83 (8) in der Richtung der η-Achse die Kraft wirkt

$$P\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\,dx,$$

wenn P die Spannung der Saite bedeutet. Die Verschiebung des Elementes ist η, und um diese Verschiebung hervorzubringen, ist also eine Arbeit zu leisten von der Größe

$$-\tfrac{1}{2} P \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \eta \, dx.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ rührt daher, daß die Verschiebung gleichzeitig mit der Kraft von Null an bis zu ihrem aktuellen Werte wächst (vgl. Bd. I, § 133, 4.), und hiernach erhalten wir für die potentielle Energie V der gespannten Saite die Gleichung:

$$2V = -P \int_0^l \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \eta \, dx,$$

oder wenn man partielle Integration anwendet, und beachtet, daß η für $x = 0$ und $x = l$ verschwindet:

$$2V = P \int_0^l \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{2}$$

Dieser Ausdruck ist also von ϱ unabhängig.

Wir nehmen nun die Funktion η von x, die für $x = 0$ und $x = l$ verschwindet, in eine Sinusreihe entwickelt an. Wir bezeichnen mit ϱ_0 eine Konstante, von der die Funktion ϱ längs der ganzen Saite nur unendlich wenig abweichen soll, und setzen:

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{\varrho_0 l}} \left(q_1 \sin \frac{\pi x}{l} + q_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + q_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \cdots\right) \tag{3}$$

und für den Fall, daß $\varrho = \varrho_0$ ist, die Saite also in ihrer ganzen Länge homogen ist:

$$\eta = \sqrt{\frac{2}{\varrho_0 l}} \left(Q_1 \sin \frac{\pi x}{l} + Q_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + Q_3 \sin \frac{3\pi x}{l} + \cdots\right). \tag{4}$$

Die Koeffizienten $q_1, q_2, q_3 \ldots$ oder $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ sind Funktionen der Zeit, die von dem Anfangszustande abhängen. Wir betrachten sie als die Koordinaten des Systems, das von unserer Saite gebildet ist.

Die Anzahl der Koordinaten ist hier unendlich. Wollte man die Reihen auf eine endliche Zahl von Gliedern beschränken, so müßte die Saite durch ein anders eingerichtetes mechanisches System ersetzt werden, das aber mit der Saite um so mehr Ähnlichkeit haben würde, je größer die Anzahl der beibehaltenen Glieder ist.

Bilden wir zunächst aus (3) die kinetische und potentielle Energie

$$2\,T = \sum a_{hk}\, q'_h\, q'_k, \qquad 2\,V = \sum c_{hk}\, q_h\, q_k,$$

so ergibt sich aus (1) und (2):

$$a_{hk} = \frac{2}{\varrho_0 l} \int_0^l \varrho \sin\frac{h\pi x}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx, \tag{5}$$

$$c_{hk} = \frac{2\,Phk\pi^2}{\varrho_0 l^3} \int_0^l \cos\frac{h\pi x}{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\, dx, \tag{6}$$

und mit Hilfe der Formeln:

$$\int_0^l \sin\frac{h\pi x}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\, dx = 0\,(h \gtrless k), \qquad \int_0^l \left(\sin\frac{h\pi x}{l}\right)^2 dx = \tfrac{1}{2}\, l,$$

$$\int_0^l \cos\frac{h\pi x}{l} \cos\frac{k\pi x}{l}\, dx = 0\,(h \gtrless k), \qquad \int_0^l \left(\cos\frac{h\pi x}{l}\right)^2 dx = \tfrac{1}{2}\, l,$$

$$c_{hk} = 0 \;(h \gtrless k), \qquad c_{hh} = \frac{Ph^2\pi^2}{\varrho_0 l^2} \tag{7}$$

allgemein, und für den Fall der homogenen Saite $\varrho = \varrho_0$:

$$a_{hk} = 0, \quad h \gtrless k, \qquad a_{hh} = 1. \tag{8}$$

Für den Fall der homogenen Saite sind also die Variablen $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ normale Koordinaten und es ergibt sich aus (7) nach § 93 (8), wenn $\varrho_0 g l$ wieder gleich p gesetzt wird:

$$m_h = \sqrt{c_{hh}} = \frac{h\pi}{l} \sqrt{\frac{P}{\varrho_0}} = h\pi \sqrt{\frac{Pg}{pl}} \tag{9}$$

in Übereinstimmung mit § 84. Es entspricht $h = 1$ dem Grundton, die höheren h den harmonischen Obertönen.

Da wir $\varrho - \varrho_0$ als eine unendlich kleine Größe vorausgesetzt haben, so können wir die Formeln des § 94 anwenden, und erhalten zunächst für die variierte Periode μ_h des $h$ten Obertones nach § 94 (3), da hier $c_{hh} = m_h^2$ ist:

$$\mu_h^2 = m_h^2\,[1 - (a_{hh} - 1)],$$

oder nach (5):

$$\mu_h^2 = m_h^2 \left[1 - \frac{2}{\varrho_0 l} \int_0^l (\varrho - \varrho_0) \left(\sin\frac{h\pi x}{l}\right)^2 dx\right]. \tag{10}$$

Nehmen wir beispielsweise an, daß in der Mitte der sonst homogenen Saite, also bei $x = \frac{1}{2}\, l$, auf einer unendlich kurzen

Strecke von der Länge λ ein Übergewicht von der Größe $\varrho_0 g \lambda$ verteilt sei, so ist $\varrho - \varrho_0$ überall mit Ausnahme der Strecke λ gleich Null und in dieser Strecke $= \varrho_0$. Das in (10) vorkommende Integral reduziert sich also auf $\varrho_0 \lambda \sin^2(\frac{1}{2} h \pi)$ und es ist, wenn h eine gerade Zahl ist, $\mu_h^2 = m_h^2$, und es tritt also keine Änderung in der Tonhöhe der geradzahligen Obertöne ein. Ist aber h eine ungerade Zahl, so ergibt sich:

$$\mu_h^2 = m_h^2 \left(1 - \frac{2\lambda}{l}\right), \tag{11}$$

so daß also alle ungeradzahligen Obertöne und speziell der Grundton tiefer werden. Durch Entwickelung der Quadratwurzel kann man dafür auch setzen:

$$\mu_h = m_h \left(1 - \frac{\lambda}{l}\right). \tag{12}$$

Zum Vergleich wollen wir noch den Fall betrachten, daß das Gewicht $\varrho_0 \lambda g$ gleichmäßig über die ganze Saite verteilt, diese also wieder homogen sei. Dann hätte man, um die veränderte Periode m_h' zu erhalten, in (9) p durch

$$p + \varrho_0 \lambda g = p(1 + \lambda/l)$$

zu ersetzen, und würde finden

$$m_h' = m_h \left(1 - \frac{\lambda}{2l}\right),$$

also eine geringere Vertiefung des Tones als bei der vorigen Annahme.

Auf dieselbe Weise kann man auch die Veränderung der Tonhöhe bestimmen, wenn das Zusatzgewicht an einer anderen Stelle der Saite liegt, und findet, daß Töne, die an der Stelle, wo das Zusatzgewicht angebracht ist, ihre Knotenpunkte haben, in ihrer Höhe nicht geändert werden. Wenn die Abszisse der belasteten Stelle nicht in rationalem Verhältnis zur Saitenlänge steht, so werden alle Obertöne verändert. Die Schwingungszahlen stehen dann auch nicht mehr im Verhältnis ganzer Zahlen zueinander, und die Obertöne sind daher nicht mehr untereinander harmonisch. Ist die Belastung an einer Stelle angebracht, deren Abszisse in rationalem Verhältnis zur Saitenlänge steht, so zerfallen die Obertöne in Reihen, so daß die Töne einer und derselben Reihe untereinander harmonisch sind, wie in dem oben betrachteten besonderen Falle die Obertöne von gerader und von ungerader Ordnungszahl.

§ 96.

Variation der Amplituden.

Nehmen wir an, daß die Saite in dem $h$ten Oberton allein schwingt, so ist im Falle der homogenen Saite, da hier die Koordinaten normal sind [§ 93 (9)]:

(1) $$Q_h = A_h \cos(m_h t - \alpha_h), \quad Q_k = 0, \quad k \gtrless h$$

und folglich [§ 95 (4)]:

(2) $$\eta = \sqrt{\frac{2}{\varrho_0 l}}\, A_h \cos(m_h t - \alpha_h) \sin \frac{h \pi x}{l}.$$

Für die inhomogene Saite aber erhalten wir [§ 94 (1)]:

(3) $$q_k = A_k^{(h)} \cos(\mu_h t - \alpha_h),$$

und folglich:

(4) $$\eta = \sqrt{\frac{2}{\varrho_0 l}} \cos(\mu_h t - \alpha_h) \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(h)} \sin \frac{k \pi x}{l}.$$

Darin sind die Verhältnisse $A_k^{(h)} : A_k^{(h)}$ nach der Formel § 94 (4) zu bestimmen:

$$\frac{A_k^{(h)}}{A_h^{(h)}} = \frac{a_{hk} m_k^2 - c_{hk}}{m_k^2 - m_h^2}.$$

Bestimmt man diesen Wert nach den Formeln § 95 (6) bis (9) ($c_{h,k} = 0$), so folgt:

$$\frac{A_k^{(h)}}{A_h^{(h)}} = \frac{2}{\varrho_0 l} \frac{h^2}{k^2 - h^2} \int_0^l \varrho \sin \frac{h \pi x}{l} \sin \frac{k \pi x}{l}\, dx,$$

wofür man auch, da h von k verschieden ist, setzen kann:

(5) $$\frac{A_k^{(h)}}{A_h^{(h)}} = \frac{2}{\varrho_0 l} \frac{h^2}{k^2 - h^2} \int_0^l (\varrho - \varrho_0) \sin \frac{h \pi x}{l} \sin \frac{k \pi x}{l}\, dx.$$

Um hiervon eine Anwendung zu machen, wollen wir die Variationen der Knotenpunkte bestimmen.

Wenn $\varrho = \varrho_0$ ist, so erhalten wir die Abszissen ξ der Knotenpunkte für den $h$ten Oberton aus der Gleichung

$$\sin \frac{h \pi \xi}{l} = 0,$$

also

(6) $$\xi = \frac{s l}{h}, \quad s = 1, 2, \ldots h - 1.$$

Bei der inhomogenen Saite werden diese Knotenpunkte eine Verschiebung $\delta\xi$ erleiden, die sich aus der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(h)} \sin\frac{k\pi(\xi+\delta\xi)}{l} = 0$$

ergibt, und man findet daraus durch Zerlegung des Sinus, mit Vernachlässigung höherer Potenzen von $\delta\xi$ mit Benutzung von (5):

$$\sum A_k^{(h)} \sin\frac{sk\pi}{h} + \delta\xi \sum \frac{k\pi}{l} A_k^{(h)} \cos\frac{sk\pi}{h} = 0,$$

oder wenn man beachtet, daß $A_k^{(h)}$, wenn k von h verschieden ist, unendlich klein, also $\delta\xi A_k^{(h)}$ zu vernachlässigen ist:

$$(7) \qquad \delta\xi = \frac{-l}{h\pi A_h^{(h)} \cos s\pi} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(h)} \sin\frac{sk\pi}{h}.$$

Nehmen wir beispielsweise $h = 2$, so ist für die homogene Saite nur ein Knotenpunkt in der Mitte. Es ist also $s = 1$ zu setzen und in (7) fallen alle Glieder, in denen k gerade ist heraus. Man findet:

$$(8) \qquad \delta\xi = \frac{l}{2\pi A_2^{(2)}} (A_1^{(2)} - A_3^{(2)} + A_5^{(2)} - A_7^{(2)} + \cdots).$$

Nehmen wir, ähnlich wie im vorigen Paragraphen, an, daß bei $x = \frac{1}{4}l$ ein kleines Gewicht $\varrho_0 \lambda g$ angebracht sei, so ist, nach (5):

$$\frac{A_k^{(2)}}{A_2^{(2)}} = \frac{4\lambda}{l} \frac{2\sin\frac{k\pi}{4}}{k^2-4} = \frac{2\lambda}{l} \sin\frac{k\pi}{4}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k+2}\right).$$

Es ergibt sich also nach (8):

$$\delta\xi = -\frac{2\lambda}{\pi\sqrt{2}}\left(1 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{11} - \cdots\right),$$

also [Bd. I, § 36 (4)]:

$$\delta\xi = -\frac{\lambda}{2}.$$

Es wird also der Knotenpunkt um $\lambda/2$ gegen die belastete Stelle hin verschoben.

Dieselbe Methode läßt sich auch auf die Schwingungen einer elastischen Platte anwenden, die nicht vollständig homogen oder nicht vollständig kreisförmig ist. Dies ist von Zenneck durchgeführt und durch schöne Beobachtungen bestätigt worden (Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge, Bd. 67, 1899).

Dreizehnter Abschnitt.

Schwingungen einer Membran.

§ 97.

Differentialgleichungen der schwingenden Membran.

Eine Membran ist ein elastischer Körper von der Gestalt eines dünnen Häutchens, der einer Biegung keinen Widerstand entgegensetzt, wohl aber einer Ausdehnung. Eine solche Membran sei in einer gegebenen festen Randkurve durch eine längs des Randes überall konstante Zugkraft P ausgespannt, und wir nehmen an, daß sie im Gleichgewichtszustande in einer Ebene liegt, die wir zur xy-Ebene machen.

Für das Gleichgewicht sind dann die molekularen Druckkräfte durch § 70 (4) bestimmt:

$$
(1) \qquad \begin{aligned} X_x^0 &= P, \quad & Y_y^0 &= P, \quad & Z_z^0 &= 0, \\ Y_z^0 &= 0, \quad & Z_x^0 &= 0, \quad & X_y^0 &= 0. \end{aligned}
$$

Wenn die Membran durch eine anfängliche Störung aus der Gleichgewichtslage herausgebracht ist, wobei wir den Rand festhalten wollen, so wird sie Schwingungen ausführen, wobei sich dann auch die Druckkräfte mit der Zeit ändern. Wir nehmen an, daß bei der Bewegung, die wir immer als unendlich klein ansehen, auch die Druckkräfte nur unendlich wenig von den in (1) angegebenen Werten für das Gleichgewicht abweichen. Diese unendlich kleinen Abweichungen sind Funktionen von x, y. Wir setzen voraus, daß sie von z unabhängig sind.

Gegen die Oberfläche der Membran sollen keine äußere Druckkräfte wirken. Bezeichnen wir mit n die Richtung der Normalen an der Oberfläche der bewegten Membran in ihrer augenblicklichen Lage, so genügen die Druckkräfte während der ganzen Dauer der Bewegung den Gleichungen § 61 (11):

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) &= 0,\\
Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) &= 0,\\
Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z) &= 0.
\end{aligned}
$$

Es mögen nun u, v, w die Komponenten der unendlich kleinen Verschiebung sein, die ein Punkt, der in der Gleichgewichtslage die Koordinaten x, y, 0 hat, zur Zeit t erfahren hat, so daß $x + u$, $y + v$, w die Koordinaten dieses Punktes zur Zeit t sind. Bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung können wir dann w auch als die momentane Erhebung der Membran an der Stelle x, y zur Zeit t über die xy-Ebene betrachten, und es ist dann w eine Funktion von x, y, durch die die z-Ordinate der Oberfläche der Membran in ihrer augenblicklichen Gestalt dargestellt ist.

Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie ist dann

$$
\begin{aligned}
\cos(n, x) &= -\cos(n, z)\,\frac{\partial w}{\partial x},\\
\cos(n, y) &= -\cos(n, z)\,\frac{\partial w}{\partial y},\\
\cos(n, z) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}}.
\end{aligned}
$$

Mit Vernachlässigung von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung kann man also

$$
\cos(n, z) = 1, \qquad \cos(n, x) = -\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \cos(n, y) = -\frac{\partial w}{\partial y}
$$

setzen. Es sind aber nach der Voraussetzung

$$
\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad X_x - P, \quad Y_y - P,
$$

$$
X_y = Y_x, \quad Z_x = X_z, \quad Z_y = Y_z, \quad Z_z
$$

unendlich kleine Größen erster Ordnung, und es folgt also aus (2) mit Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung:

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
Z_x &= P\,\frac{\partial w}{\partial x}\\
Z_y &= P\,\frac{\partial w}{\partial y}\\
Z_z &= 0,
\end{aligned}
$$

von denen die letzte besagt, daß Z_z unendlich klein von einer höheren Ordnung ist.

Die Differentialgleichung für die Bewegung erhalten wir nun aus der letzten der Gleichungen § 61 (10):

$$\varrho Z + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

wenn wir $-Z$ durch die Beschleunigung ersetzen, für die wir, mit Vernachlässigung von unendlich kleinen Größen höherer Ordnung, $\partial^2 w/\partial t^2$ setzen können. So finden wir nach (3):

$$\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{5}$$

oder wenn wir $P/\varrho = c^2$ setzen:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{6}$$

Hierzu kommen die Nebenbedingungen

$$w = 0 \quad \text{für den Rand der Membran,} \tag{7}$$

$$w = f(x, y), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = F(x, y) \quad \text{für } t = 0, \tag{8}$$

wenn f, F gegebene Funktionen von x, y sind.

§ 98.

Die einfachen Töne der Membran.

Um die Methode der partikularen Integrale auf die Differentialgleichung (6) des vorigen Paragraphen anzuwenden, setzen wir:

$$w = e^{ikct}\, W, \tag{1}$$

worin k eine Konstante, W eine Funktion von x, y allein bedeutet. Dann ergibt sich für W die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k^2 W = 0. \tag{2}$$

Die Konstanten k nehmen wir reell an, da sonst in dem Ausdruck (1) w mit wachsendem t, dem absoluten Werte nach, entweder unbegrenzt wachsen oder gegen Null abnehmen würde. Beides ist unzulässig, wenn die partikulare Lösung (1) dem Satze von der Energie entsprechen soll. Aus der Forderung, daß die partikulare Lösung der Grenzbedingung § 97 (7) genügen soll, folgt die Grenzbedingung für die Funktion W:

$$W = 0 \quad \text{für den Rand der Membran.} \tag{3}$$

Wir werden sehen, daß diesen Bedingungen nur für gewisse, wenn auch unendlich viele Werte der Konstanten k genügt werden kann. Sind diese Werte bestimmt, so bilden wir die Summe

$$w = \sum^{k} A_k e^{ikct} W_k, \tag{4}$$

worin die A_k noch unbestimmte Konstanten sind, die aus den Bedingungen des Anfangszustandes

$$\begin{aligned} \sum^{k} A_k W_k &= f(x, y) \\ ic \sum^{k} k A_k W_k &= F(x, y) \end{aligned} \tag{5}$$

zu bestimmen sind.

Damit der Ausdruck (4) reelle Werte ergibt, müssen darin je zwei konjugiert imaginäre Glieder vorkommen. Dadurch zerfällt (4) in eine Summe von Gliedern, deren jedes in bezug auf t periodisch ist. Die Periode hängt aber außer von c auch noch von dem betreffenden Werte von k ab. Die Periode eines jeden dieser Glieder entspricht der Schwingungsdauer eines einfachen Tones, den die Membran bei geeigneter Erregung zu geben vermag, und im allgemeinen werden alle diese Töne gleichzeitig ansprechen. Unter diesen Tönen ist der tiefste der, der dem kleinsten Werte von k entspricht. Dieser heißt der Grundton der Membran, die anderen die Obertöne. Diese Obertöne sind aber nur dann zu dem Grundton oder untereinander harmonisch, wenn die entsprechenden Werte von k in rationalen Verhältnissen stehen, wie es bei den Schwingungen der homogenen Saite, im allgemeinen aber nicht bei der Membran der Fall ist.

Ehe wir auf die allgemeine Theorie der Differentialgleichung (2) eingehen, behandeln wir einige besondere Fälle.

§ 99.

Rechteckige Membran.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß die Membran durch ein Rechteck von den Seitenlängen a, b begrenzt ist und legen den Koordinatenanfangspunkt der x, y in eine Ecke dieses Rechtecks, die x-Achse in die Seite a, die y-Achse in die Seite b.

Wir suchen wieder partikulare Lösungen der Differentialgleichung § 98 (2), die aus einem Produkt einer Funktion von x und einer Funktion von y bestehen, und finden leicht

$$\sin\alpha x \sin\beta y,\quad \cos\alpha x \sin\beta y,\quad \sin\alpha x \cos\beta y,\quad \cos\alpha x \cos\beta y,$$

wenn α, β zwei Konstanten sind, die der Bedingung

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \tag{1}$$

entsprechen. Von diesen vier partikularen Lösungen hat nur die erste

$$\sin\alpha x \sin\beta y, \tag{2}$$

die Eigenschaft, an den beiden Randlinien $x = 0$ und $y = 0$ zu verschwinden.

Damit diese aber auch an den beiden Randlinien $x = a$ und $y = b$ verschwinde, müssen die Konstanten α, β die Form haben

$$\alpha = \frac{m\pi}{a},\quad \beta = \frac{n\pi}{b}, \tag{3}$$

worin m und n ganze Zahlen sind, die wir positiv annehmen können. Aus (1) ergibt sich dann für k der Ausdruck:

$$k = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \tag{4}$$

Diese Formel stellt unendlich viele, aber diskrete Werte von k dar, die von den Dimensionen des Rechtecks abhängig sind.

Jeder dieser Werte von k entspricht einer einfachen periodischen Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$T = T_{m,n} = \frac{2\pi}{kc} = \frac{2}{c\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}, \tag{5}$$

und man erhält dieser Schwingungsdauer entsprechend die partikularen Lösungen der Hauptgleichung § 97, (6):

$$\cos\frac{2\pi t}{T}\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b},\quad \sin\frac{2\pi t}{T}\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b}. \tag{6}$$

Sind $A = A_{m,n}$ und $B = B_{m,n}$ konstante Koeffizienten, die mit m und n wechseln, so ist die allgemeine Lösung:

$$w = \sum_{1,\infty}^{m,n}\left(A\cos\frac{2\pi t}{T} + B\sin\frac{2\pi t}{T}\right)\sin m\frac{\pi x}{a}\sin n\frac{\pi y}{b}, \tag{7}$$

und die Konstanten A und B werden durch die beiden Gleichungen

$$
(8) \qquad \begin{aligned} &\sum A \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b} = f(x, y) \\ &\sum \frac{2\pi B}{T} \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b} = F(x, y) \end{aligned}
$$

bestimmt, wenn man die gegebenen Funktionen $f(x, y)$, $F(x, y)$ durch Fouriersche Doppelreihen darstellt.

Man findet, wenn man mit

$$
\sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b} \, dx \, dy
$$

multipliziert und über die Fläche des Rechtecks integriert:

$$
(9) \qquad \begin{aligned} A_{m,n} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b} \, dx \, dy, \\ B_{m,n} &= \frac{2T}{\pi a b} \int_0^a \int_0^b F(x, y) \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b} \, dx \, dy. \end{aligned}
$$

§ 100.
Harmonische Obertöne.

Wir fragen, welche unter den einfachen Tönen der Membran untereinander harmonisch sind, oder mit anderen Worten, welche der durch § 99 (4) dargestellten Werte von k untereinander in rationalem Verhältnis stehen.

Es seien also k, k' zwei solche Werte, die den ganzen Zahlen m, n und m', n' entsprechen, und $k : k' = h : h'$, worin h und h' positive ganze Zahlen sind, die wir ohne gemeinschaftlichen Teiler annehmen können. Dann ist

$$
(1) \qquad h'^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = h^2 \left(\frac{m'^2}{a^2} + \frac{n'^2}{b^2} \right),
$$

also

$$
(2) \qquad \frac{h'^2 m^2 - h^2 m'^2}{a^2} = - \frac{h'^2 n^2 - h^2 n'^2}{b^2},
$$

und wenn nun a^2 und b^2 nicht in einem rationalen Verhältnis stehen, so müssen beide Seiten von (2) verschwinden, also

$$
\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{h}{h'}.
$$

Wenn wir m und n ohne gemeinschaftlichen Teiler annehmen, so folgt hieraus, wenn l eine ganze Zahl ist:

(3) $$m' = lm, \quad n' = ln,$$

und es ergibt sich also eine Reihe von harmonischen Tönen aus

$$k, \quad 2k, \quad 3k, \quad 4k \ldots \qquad (k)$$

wenn k dadurch gebildet ist, daß für m, n in § 99 (4) irgend zwei positive relative Primzahlen genommen werden.

Wir bekommen dann eine Reihe (k) von harmonischen Tönen, von denen wir den ersten, k, als den (relativen) Grundton bezeichnen können. Den absolut tiefsten Ton (Grundton der Membran) erhalten wir, wenn wir $m = 1$, $n = 1$ setzen.

Nehmen wir nun irgend ein anderes Paar relativer Primzahlen m_1, n_1, so erhalten wir eine zweite Reihe (k_1) möglicher, harmonischer Töne:

$$k_1, \quad 2k_1, \quad 3k_1, \quad 4k_1, \ldots \qquad (k_1)$$

und so fort, zu jedem Paar relativer Primzahlen m, n eine Reihe harmonischer Töne; und wenn a^2, b^2 nicht in rationalem Verhältnis stehen, so sind je zwei Töne verschiedener Reihen nicht harmonisch.

Anders ist es aber, wenn a^2 und b^2 in einem rationalen Verhältnis stehen. Dann können auch die Töne verschiedener Reihen harmonisch sein.

Setzen wir unter dieser Voraussetzung

(4) $$\frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} = \alpha : \beta,$$

worin α, β positive ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, so lautet die Bedingung (1) für die Harmonie zweier Reihen (k) und (k'):

(5) $$h'^2(\alpha m^2 + \beta n^2) = h^2(\alpha m'^2 + \beta n'^2).$$

Wenn irgend zwei Töne einer Reihe (k) untereinander harmonisch sind, so sind je zwei Töne dieser Reihe harmonisch, und wenn also ein Ton der Reihe (k) mit einem der Reihe (k') harmonisch ist, so ist jeder Ton der einen Reihe mit jedem der anderen harmonisch. Wir nennen dann die beiden Reihen harmonisch. Suchen wir also alle zu einer bestimmten Reihe (k) harmonischen Reihen (k') auf, so können wir in (5) m und n relativ prim annehmen, und erhalten, wenn wir

$$\alpha m^2 + \beta n^2 = \gamma,$$
$$hm' = x, \quad hn' = y, \quad h' = z$$

setzen, aus (5) die Gleichung:

$$\gamma z^2 = \alpha x^2 + \beta y^2, \tag{6}$$

und es kommt also auf die Lösung der zahlentheoretischen Aufgabe an:

> alle Lösungen der unbestimmten Gleichung (6) in ganzen Zahlen x, y, z zu finden, wenn α, β, γ gegebene ganze Zahlen sind.

Die Lösung dieser Aufgabe ist dadurch vereinfacht, daß man eine Lösung von (6) kennt, nämlich $z = 1$, $x = m$, $y = n$[1]).

Um alle einfachen Töne der Membran zu finden, die untereinander gleiche Schwingungsdauer haben, hat man also alle ganzzahligen Werte x, y zu ermitteln, die dem Ausdruck

$$\alpha x^2 + \beta y^2$$

einen und denselben ganzzahligen Wert γ erteilen, worin α, β die aus (4) zu entnehmenden ganzen Zahlen sind, oder, wie man sich in der Zahlentheorie ausdrückt, alle Darstellungen einer Zahl γ durch die quadratische Form $\alpha x^2 + \beta y^2$ zu finden. Die Anzahl dieser Darstellungen ist immer endlich, weil es nur eine endliche Anzahl ganzer Zahlen geben kann, für die die positive ganze Zahl $\alpha x^2 + \beta y^2$ eine gegebene Grenze nicht überschreitet. Wir wollen hier auf diese zahlentheoretische Aufgabe nicht näher eingehen, für die wir auf den IV. Abschnitt von Dirichlet-Dedekinds Vorlesungen über Zahlentheorie verweisen, und begnügen uns damit, für den besonderen Fall $\alpha = \beta = 1$, also für die quadratische Membran, ein Paar einfache Beispiele anzuführen.

$$\begin{aligned} 2 &= 1^2 + 1^2, \\ 5 &= 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2, \\ 10 &= 1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2, \\ 65 &= 1^2 + 8^2 = 8^2 + 1^2, \\ &= 4^2 + 7^2 = 7^2 + 4^2. \end{aligned} \tag{7}$$

§ 101.

Knotenlinien.

Eine einfache Schwingung der rechteckigen Membran wird dargestellt durch ein einzelnes Glied der Summe § 99 (7):

---

[1]) Vgl. über die zahlentheoretische Aufgabe Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., § 156.

(1) $$W = \left(A \cos \frac{2\pi t}{T} + B \sin \frac{2\pi t}{T}\right) \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b},$$

worin die Schwingungsdauer

(2) $$T = \frac{2}{c\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}$$

ist. Setzen wir

$$A = M \sin \Delta, \quad B = M \cos \Delta,$$

worin M eine positive Konstante, Δ einen zwischen 0 und 2π gelegenen Winkel bedeuten möge, so erhalten wir:

(3) $$W = M \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \Delta\right) \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b}.$$

M heißt die Amplitude der Schwingung und die Größe $\frac{2\pi t}{T} + \Delta$, oder vielmehr ihr Überschuß über das nächst kleinere Vielfache von 2π die Phase. Indem man den Anfangspunkt der Zeit oder die Phase um eine konstante Größe ändert, erhält man endlich aus (3):

(4) $$W = M \sin \frac{2\pi t}{T} \sin m \frac{\pi x}{a} \sin n \frac{\pi y}{b},$$

und man sieht daraus, daß W über die ganze Membran gleich Null ist, wenn t gleich einem Vielfachen von $\frac{1}{2} T$ ist.

Wenn andererseits x gleich einem Vielfachen von a/m oder y gleich einem Vielfachen von b/n ist, so ist W für alle Zeit gleich Null. Wir haben also zwei Systeme gerader Linien, die den Seiten des Rechteckes parallel sind, in denen die nach der Formel (4) schwingende Membran dauernd in Ruhe bleibt. Solche Linien heißen Knotenlinien. Sie teilen die rechteckige Membran in mn rechteckige Felder von den Seiten a/m, b/n, und W ist in benachbarten Feldern zu jeder Zeit abwechselnd positiv und negativ.

Wenn nun bei einer zusammengesetzten Schwingung, die durch eine Summe mehrerer Ausdrücke der Form (3)

$$w = \sum W$$

dargestellt wird, Knotenlinien, d. h. Linien, in denen w dauernd gleich Null ist, vorhanden sein sollen, so muß der von der Zeit abhängige Faktor

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varDelta\right)$$

in allen Gliedern der Summe (4) derselbe sein. Es muß also die Schwingungsdauer T und die Phase in allen Gliedern der Summe (4) dieselbe sein. Es kann dies, wie wir gesehen haben, nur vorkommen, wenn a^2 und b^2 in rationalem Verhältnis stehen, und man erhält unter dieser Voraussetzung als Bedingung für die Knotenlinien:

$$\sum M \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} = 0, \tag{5}$$

worin sich, wenn $\frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} = \alpha : \beta$ ist, die Summe auf alle Werte m, n erstrecken kann, für die $\alpha m^2 + \beta n^2$ einen und denselben Wert γ hat. Da jedes Glied der Summe (5) mit einem beliebigen Faktor M multipliziert sein kann, so ist in der Gleichung (5) eine große Menge von möglichen Gestalten von Knotenlinien oder, wie man auch sagt, von **Klangfiguren** enthalten, deren Diskussion aber nicht ganz einfach ist. Wir wollen einige Beispiele betrachten.

§ 102.

Klangfiguren. I. Beispiel.

Nach § 100 (7) ist $5 = 1^2 + 2^2 = 2^2 + 1^2$, und wir erhalten also aus (5) § 101, wenn wir der Einfachheit halber $a = b = \pi$ setzen,

$$M \sin x \sin 2y + M' \sin 2x \sin y = 0$$

oder

$$\sin x \sin y\,(M \cos y + M' \cos x) = 0; \tag{1}$$

der Faktor $\sin x \sin y$ verschwindet nur am Rande und eine freie Knotenlinie erhalten wir also aus der Gleichung

$$M \cos y + M' \cos x = 0,$$

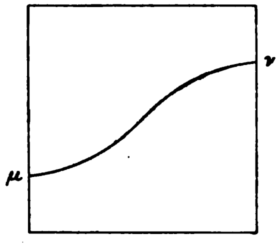
setzen wir $M' = -\lambda M$, so ergibt sich daraus:

$$\cos y = \lambda \cos x, \tag{2}$$

und wir können, unbeschadet der Allgemeinheit, λ als einen positiven echten Bruch annehmen. Die übrigen Fälle werden durch Vertauschung von x mit $\pi - x$ oder von x mit y auf diesen zurückgeführt.

Da (2) für $x = y = \pi/2$ befriedigt ist, so geht die gesuchte Linie durch den Mittelpunkt des Quadrates. Für $x = 0$ und $x = \pi$ wird

Fig. 41.



$$y = \arc\cos\lambda, \quad y = \pi - \arc\cos\lambda,$$

während für $y = 0$ kein reeller Wert von x vorhanden ist. Die Knotenlinie hat ungefähr die Gestalt der Kurve $\mu\nu$ in der Fig. 41. Sie besteht aus zwei kongruenten Zweigen, deren Tangente im Mittelpunkte unter dem Winkel $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\lambda$ gegen die x-Achse geneigt ist, und die die Grenzlinie bei μ und ν rechtwinklig schneidet. Wird $\lambda = 0$, so geht diese Kurve in die Gerade $y = \pi/2$ über, und wenn $\lambda = 1$ ist, in die Diagonale des Quadrates.

§ 103.

II. Beispiel.

$$10 = 1^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2.$$

Die Gleichung für die Knotenlinie wird:

$$M \sin x \sin 3y + M' \sin y \sin 3x = 0,$$

oder nach Abwerfung des Faktors $\sin x \sin y$, dessen Verschwinden die Randlinien darstellt, mit Rücksicht auf die trigonometrische Formel

$$\sin 3x = \sin x(4\cos^2 x - 1) = \sin x(2\cos 2x + 1),$$
$$\sin 3y = \sin y(4\cos^2 y - 1) = \sin y(2\cos 2y + 1),$$

wenn wieder $M' = -\lambda M$ gesetzt wird:

$$(1) \qquad \cos^2 y - \frac{1}{4} = \lambda\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right).$$

Man sieht, daß alle in der Gleichung (1) enthaltenen Kurven durch die vier Punkte

$$x = \frac{\pi}{3}, \ \frac{2\pi}{3}; \qquad y = \frac{\pi}{3}, \ \frac{2\pi}{3}$$

hindurchgehen.

Bei der Diskussion dieser Gleichung kann man λ als positiven oder negativen echten Bruch (einschließlich ± 1) betrachten, da die anderen Fälle auf diesen durch Vertauschung von x und y zurückgeführt werden. Die Randlinien $y = 0$, $y = \pi$ werden dann von keiner dieser Kurven geschnitten, weil für solche Schnittpunkte $\cos^2 x > 1$ oder negativ ausfallen würde.

Die Schnittpunkte der Randlinien $x = 0$, $x = \pi$ erhält man aus

$$\cos^2 y = \frac{1 + 3\lambda}{4},$$

und diese Schnittpunkte werden also reell, wenn $\lambda > -1/3$ ist. Liegt also λ zwischen -1 und $-1/3$, so verläuft die Knoten-

Fig. 42.

$\lambda = -1$

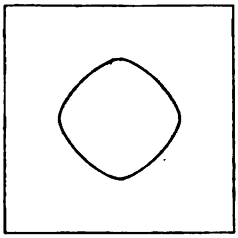


Fig. 43.

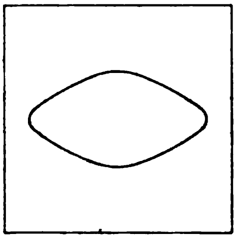


Fig. 44.

$\lambda = -\frac{1}{3}$

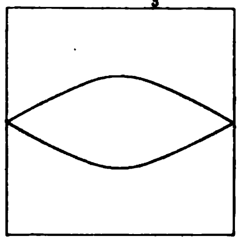


Fig. 45.

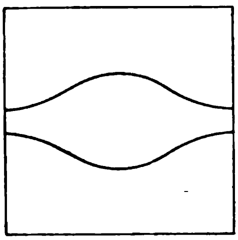


Fig. 46.

$\lambda = 0$

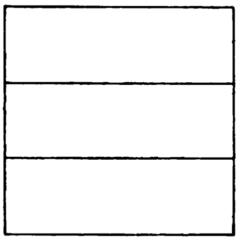


Fig. 47.

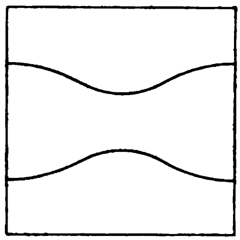
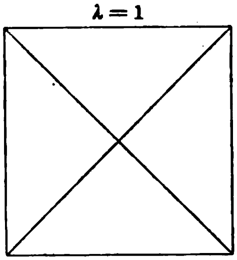


Fig. 48.

$\lambda = 1$



linie ganz im Innern des Rechteckes. Die Figuren 42 bis 48 geben die ungefähren Gestalten einiger dieser Klangfiguren, die in der Reihenfolge der aufsteigenden Werte von λ geordnet sind.

§ 104.

Kreisförmige Membran.

Wenn die Membran durch einen Kreis begrenzt ist, so führt man zur Integration der Differentialgleichung (2), § 98 Polarkoordinaten r, φ in der xy-Ebene ein. Man erhält nach Bd. I, § 44 (4):

$$
(1) \qquad \frac{1}{r}\,\frac{\partial r \dfrac{\partial W}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + k^2 W = 0.
$$

Hat die Membran die Gestalt eines **vollen Kreises** vom Radius a, so muß W endlich bleiben, wenn r die Werte von 0 bis a durchläuft, und muß dieselben Werte wieder annehmen, wenn φ um 2π wächst. Wir werden also die partikularen Lösungen von (1) in der Form

$$
(2) \qquad W = R e^{im\varphi}
$$

annehmen, worin m eine ganze Zahl und R eine Funktion von r allein ist, für die sich aus (1) die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$
(3) \qquad \frac{1}{r}\,\frac{dr \dfrac{dR}{dr}}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0
$$

oder

$$
(4) \qquad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0
$$

ergibt. Man erkennt hierin die Differentialgleichung der Besselschen Funktion $J_m(kr)$ (Bd. I, § 72 (12)], und diese Funktion $J_m(kr)$ ist die einzige Lösung dieser Differentialgleichung, die für $r = 0$ endlich bleibt.

Es ist also, wenn C eine Konstante bedeutet,

$$
(5) \qquad W = C J_m(kr)\, e^{im\varphi}
$$

zu setzen, und damit diese Funktion am Rande der kreisförmigen Membran, also für $r = a$ verschwinde, ist k aus der transzendenten Gleichung

$$
(6) \qquad J_m(ka) = 0
$$

zu bestimmen. Diese transzendente Gleichung haben wir im § 74 des ersten Bandes näher untersucht. Wir haben dort gesehen, daß die Gleichung $J_m(\lambda) = 0$ unendlich viele, aber nur reelle Wurzeln hat, von denen wir nur die positiven zu berücksichtigen brauchen. Wir wollen sie, der Größe nach geordnet, mit

$$\lambda_{m,1}, \quad \lambda_{m,2}, \quad \lambda_{m,3}, \ldots$$

und allgemein mit $\lambda_{m,n}$ bezeichnen. Dann haben wir für k einen der Werte

$$k = \frac{\lambda_{m,n}}{a}$$

zu setzen, und wir erhalten, wenn wir zu der reellen Form übergehen, und mit $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $D_{m,n}$ willkürliche Konstanten bezeichnen, den allgemeinen Ausdruck von w in der Form:

$$(7) \qquad w = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m\left(\frac{\lambda_{m,n} r}{a}\right) \left\{ \begin{aligned} & A_{m,n} \cos\frac{\lambda_{m,n} ct}{a} \cos m\varphi \\ & + B_{m,n} \cos\frac{\lambda_{m,n} ct}{a} \sin m\varphi \\ & + C_{m,n} \sin\frac{\lambda_{m,n} ct}{a} \cos m\varphi \\ & + D_{m,n} \sin\frac{\lambda_{m,n} ct}{a} \sin m\varphi \end{aligned} \right.$$ [1]).

§ 105.
Bestimmung der Konstanten.

Die Konstanten $A_{m,n} \ldots$, die in dem Ausdruck (7) § 104 für w noch unbestimmt bleiben, sind aus dem Anfangszustande, d. h. aus den Werten von w und $\partial w / \partial t$ für $t = 0$ zu bestimmen. Wenn für $t = 0$

$$(1) \qquad w = f(r, \varphi)$$

ist, so ergibt sich aus (7) für $t = 0$, wenn wir zur Vereinfachung $a = 1$ setzen:

$$(2) \qquad f(r, \varphi) = \sum^{m,n} J_m(\lambda_{m,n} r)\,(A_{m,n} \cos m\varphi + B_{m,n} \sin m\varphi).$$

Hieraus können, ähnlich wie bei der Fourierschen Reihe, die Koeffizienten $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ durch bestimmte Integrale ausgedrückt werden. Es ist nämlich für irgend zwei ganze Zahlen m, m':

---

[1]) Ein nützliches Hilfsmittel für die Berechnung der Wurzeln $\lambda_{m,n}$ und überhaupt für numerische Berechnungen auf dem Gebiete der Funktionentheorie bildet das 1909 erschienene Werk von Jahnke und Emde, „Funktionentafeln mit Formeln und Kurven" (Teubner, Leipzig u. Berlin).

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \, \sin m'\varphi \, d\varphi = 0,$$

ferner, wenn m nicht gleich Null ist:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\varphi \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2 m\varphi \, d\varphi = \pi$$

und wenn m von m' verschieden ist:

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \, \cos m'\varphi \, d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin m\varphi \, \sin m'\varphi \, d\varphi = 0.$$

Hieraus ergibt sich für ein feststehendes m:

$$(3) \quad \begin{aligned} \sum^n A_{m,n} J_m(\lambda_{m,n} r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \cos m\varphi \, d\varphi, \\ \sum^n B_{m,n} J_m(\lambda_{m,n} r) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi) \sin m\varphi \, d\varphi, \end{aligned}$$

wobei in der ersten dieser Formeln für $m = 0$ die rechte Seite noch durch 2 zu dividieren ist.

Desgleichen wenden wir die Formel an:

$$(4) \quad \begin{aligned} &\beta J_m(\alpha) J_{m+1}(\beta) - \alpha J_m(\beta) J_{m+1}(\alpha) \\ &= (\beta^2 - \alpha^2) \int_0^1 J_m(\alpha r) J_m(\beta r) r \, dr, \end{aligned}$$

die wir im § 73, II des ersten Bandes bewiesen haben. Aus ihr folgt, wenn $\lambda_{m,n}$ und $\lambda_{m,n'}$ zwei verschiedene Wurzeln von $J_m(\lambda) = 0$ sind:

$$(5) \quad \int_0^1 J_m(\lambda_{m,n} r) \, J_m(\lambda_{m,n'} r) r \, dr = 0,$$

und durch den Grenzübergang, wie er in Bd. I, § 73, IV gemacht ist [Bd. I, § 72 (10)]:

$$(6) \quad \begin{aligned} \int_0^1 [J_m(\lambda_{m,n} r)]^2 r \, dr &= -\frac{1}{2} J'_m(\lambda_{m,n}) J_{m+1}(\lambda_{m,n}) \\ &= \frac{1}{2} [J_{m+1}(\lambda_{m,n})]^2. \end{aligned}$$

Danach erhält man aus (3):

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
A_{m,n}[J_{m+1}(\lambda_{m,n})]^2 &= \frac{2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} f(r,(\varphi) J_m \lambda_{m,n} r) \cos m\varphi\, r\, dr\, d\varphi,\\
B_{m,n}[J_{m+1}(\lambda_{m,n})]^2 &= \frac{2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} f(r,\varphi) J_m(\lambda_{m,n} r) \sin m\varphi\, r\, dr\, d\varphi,
\end{aligned}
$$

worin wieder auf der rechten Seite der ersten Formel im Falle $m = 0$ durch 2 zu dividieren ist.

In gleicher Weise lassen sich die Konstanten $C_{m,n}$, $D_{m,n}$ aus der die Anfangsgeschwindigkeit darstellenden Funktion ableiten.

§ 106.

Klangfiguren.

Eine einfache Schwingung wird bei der kreisförmigen Membran durch einen Ausdruck von der Form

$$
(1)\qquad W = M \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varDelta\right) J_m\left(\frac{\lambda_{m,n} r}{a}\right) \sin m(\varphi - \varphi_0)
$$

dargestellt, worin die Schwingungsdauer

$$
(2)\qquad T = \frac{2\pi}{ck} = \frac{2\pi a}{c\lambda_{m,n}}
$$

ist. Der Ausdruck (1) verschwindet aber, von t unabhängig, außer am Rande noch, wenn

$$
(3)\qquad \varphi - \varphi_0 = \frac{h\pi}{m}
$$

und wenn

$$
(4)\qquad r = a\,\frac{\lambda_{m,n'}}{\lambda_{m,n}},
$$

worin h eine ganze Zahl und $\lambda_{m,n'}$ irgend eine Wurzel von J_m bedeutet, die kleiner ist als $\lambda_{m,n}$. Als Knotenlinien erhält man also aus (3) ein System von m Radien, und aus (4) ein System von $n - 1$ konzentrischen Kreisen.

Außer diesen wären nach (2) Knotenlinien nur dann möglich, wenn $\lambda_{m,n} = \lambda_{m',n'}$ wäre, für irgend zwei voneinander verschiedene m, m', also nur dann, wenn zwei verschiedene Funktionen J_m und $J_{m'}$ eine gemeinschaftliche Wurzel hätten. Daß dies der Fall ist, ist sehr unwahrscheinlich.

§ 107.

Elliptische Membran.

Wenn wir in die Differentialgleichung, auf die wir das Problem der schwingenden Membran zurückgeführt haben,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + k^2 W = 0 \tag{1}$$

elliptische Koordinaten einführen wollen, so können wir nach Bd. I, § 55

$$x + yi = \cos(u + iv), \tag{2}$$

also

$$\begin{aligned} x &= \cos u \cos iv, \\ y &= i \sin u \sin iv \end{aligned} \tag{3}$$

setzen, so daß konstante Werte von v Ellipsen entsprechen, unter denen eine, $v = v_0$, als Grenze der Membran betrachtet werden möge. Aus der Formel

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 &= \sin(u + iv) \sin(u - iv)\,(du^2 + dv^2) \\ &= (\sin^2 u - \sin^2 iv)\,(du^2 + dv^2) \end{aligned}$$

können wir dann nach Bd. I, § 43 (13) die Transformation des Differentialausdruckes

$$\Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

ableiten, wenn wir

$$e = e' = \sin^2 u - \sin^2 iv, \quad e'' = 1$$

setzen. Wir erhalten so die Differentialgleichung (1) in der Gestalt:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + k^2(\sin^2 u - \sin^2 iv)\, W = 0. \tag{4}$$

Setzen wir, um partikulare Lösungen dieser Gleichung zu erhalten,

$$W = UV \tag{5}$$

und nehmen an, daß U nur von u, V nur von v abhänge, so ergibt sich aus (4) durch Division mit UV:

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{du^2} + k^2 \sin^2 u = -\frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dv^2} + k^2 \sin^2 iv,$$

und da hier die linke Seite nur von u, die rechte nur von v abhängt, so müssen beide Seiten gleich einer Konstanten $-\lambda$ sein. Man erhält so für U und V die beiden linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\frac{d^2 U}{du^2} + (k^2 \sin^2 u + \lambda)\, U = 0, \\ &\frac{d^2 V}{dv^2} - (k^2 \sin^2 iv + \lambda)\, V = 0. \end{aligned}$$

Die Integration dieser beiden linearen Differentialgleichungen in geschlossener Form gelingt aber nicht.

§ 108.

Parabolische Begrenzung.

Wenn wir zwei Variable u, v durch die Substitution

$$(1)\qquad x + iy = \frac{1}{2}\,(u + iv)^2$$

oder

$$(2)\qquad x = \frac{1}{2}\,(u^2 - v^2),\quad y = uv$$

einführen, so ergibt sich durch Elimination von v und von u:

$$(3)\qquad x = \frac{1}{2}\left(u^2 - \frac{y^2}{u^2}\right),\qquad x = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{v^2} - v^2\right),$$

woraus zu ersehen ist, daß sowohl konstanten Werten von u als auch konstanten Werten von v Parabeln entsprechen. Alle diese Parabeln haben ihren Brennpunkt im Koordinatenanfangspunkte und ihre Achse in der Richtung der x-Achse. Die konkave Seite liegt bei den ersteren nach der Seite der negativen x, bei den letzteren nach der Seite der positiven x. Eine Membran kann etwa begrenzt werden durch eine Parabel der einen und eine der zweiten Art, $u = u_0$, $v = v_0$ (oder auch durch drei und vier Parabeln).

Aus (1) ergibt sich:

$$dx^2 + dy^2 = (u^2 + v^2)\,(du^2 + dv^2),$$

und hieraus erhält man, wie bei den Ellipsen:

$$\Delta W = \frac{1}{u^2 + v^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}\right),$$

also die transformierte Gleichung § 98 (2):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + k^2(u^2 + v^2)\, W = 0. \tag{4}$$

Setzt man wieder

$$W = U V \tag{5}$$

und nimmt U nur von u, V nur von v abhängig an, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2U}{du^2} + (k^2u^2 + \lambda)\, U = 0, \\ &\frac{d^2V}{dv^2} + (k^2v^2 - \lambda)\, V = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

worin λ eine Konstante ist.

Hier sind die bei einfachen Schwingungen auftretenden Knotenlinien konfokale Parabeln, deren Parameter man aus den transzendenten Gleichungen $U = 0$, $V = 0$ erhält.

§ 109.

Integration der Differentialgleichung für parabolische Begrenzung.

Wenn wir in die Differentialgleichung, auf die wir das Problem für den Fall parabolischer Begrenzung zurückgeführt haben:

$$\frac{d^2U}{du^2} + (k^2u^2 + \lambda)\, U = 0 \tag{1}$$

für u^2 eine neue Variable einführen, so kommen wir auf eine Differentialgleichung, deren Koeffizienten lineare Funktionen der Variablen sind, und die sich also nach § 3 durch hypergeometrische Reihen integrieren läßt. Diese Reihen stellen sich in imaginärer Form dar. In reelle Form lassen sich die bestimmten Integrale bringen, durch die man die Funktion U darstellen kann.

Wir machen zunächst in (1) die Substitution [§ 3 (8)]:

$$\begin{aligned} U &= e^{\frac{1}{2}iku^2} X, \\ \frac{dU}{du} &= e^{\frac{1}{2}iku^2}\left(\frac{dX}{du} + iku\,X\right), \\ \frac{d^2U}{du^2} &= e^{\frac{1}{2}iku^2}\left[\frac{d^2X}{du^2} + 2iku\,\frac{dX}{du} + (ik - k^2u^2)\, X\right], \end{aligned} \tag{2}$$

wodurch (1) in die Form übergeht:

$$\text{(3)} \qquad \frac{d^2 X}{d u^2} + 2 i k u \frac{d X}{d u} + (\lambda + i k) X = 0.$$

Wenn man nun für u^2 eine Variable x einführt, indem man

$$\text{(4)} \qquad -i k u^2 = x$$

setzt, so ergibt sich aus (3):

$$\text{(5)} \qquad x \frac{d^2 X}{d x^2} + \left(\frac{1}{2} - x\right) \frac{d X}{d x} - \left(\frac{1}{4} - \frac{i\lambda}{4k}\right) X = 0,$$

und dies ist genau die Form der Gleichung § 6 (3), wenn man dort

$$\gamma = \frac{1}{2}, \qquad \beta = \frac{1}{4} - \frac{i\lambda}{4k}$$

setzt. Die Integrale sind also [§ 6 (5), § 7, I_2]

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} X_1 &= \operatorname*{Lim}_{h=0} F\left(\frac{1}{h}, \frac{1}{4} - \frac{i\lambda}{4k}, \frac{1}{2}, hx\right), \\ X_2 &= \sqrt{x} \operatorname*{Lim}_{h=0} F\left(\frac{1}{h}, \frac{3}{4} - \frac{i\lambda}{4k}, \frac{3}{2}, hx\right), \end{aligned}$$

oder wenn man nach § 13 (3) zu der Darstellung durch bestimmte Integrale übergeht und einen konstanten Faktor wegläßt:

$$X_1 = \operatorname*{Lim}_{h=0} \int_0^1 s^{\frac{1}{4}-1} (1-s)^{\frac{1}{4}-1} \left(\frac{s}{1-s}\right)^{-\frac{i\lambda}{4k}} (1 - hsx)^{-\frac{1}{h}} ds,$$

$$X_2 = \sqrt{x} \operatorname*{Lim}_{h=0} \int_0^1 s^{\frac{3}{4}-1} (1-s)^{\frac{3}{4}-1} \left(\frac{s}{1-s}\right)^{-\frac{i\lambda}{4k}} (1 - hsx)^{-\frac{1}{h}} ds,$$

und hierin läßt sich der Grenzübergang unter dem Integralzeichen ausführen. Man erhält so:

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} X_1 &= \int_0^1 s^{\frac{1}{4}-1} (1-s)^{\frac{1}{4}-1} \left(\frac{s}{1-s}\right)^{-\frac{i\lambda}{4k}} e^{sx} ds, \\ X_2 &= \sqrt{x} \int_0^1 s^{\frac{3}{4}-1} (1-s)^{\frac{3}{4}-1} \left(\frac{s}{1-s}\right)^{-\frac{i\lambda}{4k}} e^{sx} ds, \end{aligned}$$

und folglich nach (2) und (4) die beiden Integrale der Differentialgleichung (1):

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
U_1 &= \int_0^1 s^{\frac{1}{4}-1}(1-s)^{\frac{1}{4}-1}\, e^{-i\left[ku^2\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{\lambda}{4k}\log\frac{s}{1-s}\right]}\, ds\\
U_2 &= u\int_0^1 s^{\frac{3}{4}-1}(1-s)^{\frac{3}{4}-1}\, e^{-i\left[ku^2\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{\lambda}{4k}\log\frac{s}{1-s}\right]}\, ds.
\end{aligned}
$$

Man sieht leicht durch die Substitution $s = 1 - s_1$, daß diese Ausdrücke für U_1, U_2 ungeändert bleiben, wenn i mit $-i$ vertauscht wird, und so findet man die Integrale von (1) in reeller Form:

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
U_1 &= \int_0^1 s^{\frac{1}{4}-1}(1-s)^{\frac{1}{4}-1}\cos\left[ku^2\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{\lambda}{4k}\log\frac{s}{1-s}\right] ds\\
U_2 &= u\int_0^1 s^{\frac{3}{4}-1}(1-s)^{\frac{3}{4}-1}\cos\left[ku^2\left(s-\frac{1}{2}\right)+\frac{\lambda}{4k}\log\frac{s}{1-s}\right] ds.
\end{aligned}
$$

Vierzehnter Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Differentialgleichung der schwingenden Membran.

§ 110.

Gleichgewichtslage einer Membran.

Wir haben im vorigen Abschnitt die Theorie der Schwingungen einer Membran auf die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

zurückgeführt, mit der Nebenbedingung, daß u am Rande einer gegebenen Fläche S in der xy-Ebene verschwinden soll. Es bedeutet hierin Δ die Operation

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{2}$$

und u kann aufgefaßt werden als die Ordinate einer krummen Oberfläche, die sich über der Fläche S erhebt. Wir betrachten nur solche Lösungen der Differentialgleichung (1), bei denen u und seine ersten Differentialquotienten endliche und stetige Funktionen von x, y sind.

Wir haben die Voraussetzung gemacht, daß die Verschiebungen der Membran immer nur unendlich klein seien. Dieser Voraussetzung wollen wir dadurch Rechnung tragen, daß wir uns u mit einem unendlich kleinen konstanten Faktor behaftet denken. Es sind dann von selbst schon die Differentialquotienten dieser Verschiebungen gleichfalls unendlich klein. Ob wir uns u selbst unendlich klein oder ins Endliche vergrößert denken, ist dann gleichgültig.

Wir können auch den Fall betrachten, daß u am Rande von S nicht gleich Null ist, sondern vorgeschriebene Werte hat.

Es würde dann die Membran nicht durch eine ebene Kurve, sondern durch eine Raumkurve, die aber von der Ebene nur unendlich wenig abweicht, begrenzt sein.

Die Gleichgewichtslage der Membran wird dann durch die Differentialgleichung

$$\Delta u = 0 \tag{3}$$

und durch die Grenzbedingung, daß u am Rande vorgeschriebene Werte haben soll, bestimmt. Wir wollen zunächst die Eigenschaften der Lösungen dieser letzten Gleichung etwas näher betrachten, um den charakteristischen Unterschied dieser und der Gleichung (1) deutlich hervortreten zu lassen.

Die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ haben wir in § 143 des ersten Bandes schon betrachtet, wo sie zur Bestimmung des logarithmischen Potentials diente. Dort handelt es sich um die Integration für das Gebiet außerhalb eines gegebenen Flächenstücks, wobei noch eine Bedingung fürs Unendliche hinzukam. Hier betrachten wir immer nur ein endliches Flächenstück S, auf dessen Grenze s die Funktion u gegeben ist, von der wir außerdem voraussetzen, daß sie nebst ihren ersten Ableitungen im Innern von S endlich und stetig ist. Dies schließt die Voraussetzung ein, daß auch die vorgeschriebenen Randwerte längs des ganzen Randes endlich und stetig sind und überall eine endliche Derivierte haben.

Der Kürze wegen wollen wir auch hier eine Funktion u, die in einem Gebiete S der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ genügt und mit ihren ersten Ableitungen endlich und stetig ist, ein logarithmisches Potential (für das Gebiet S) nennen.

Das Mittel der Untersuchung dieser Funktionen bildet der Gaußsche Integralsatz [Bd. I, § 41 (8)]:

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) df = -\int [X \cos(nx) + Y \cos(ny)]\, ds,$$

aus dem man, wenn man

$$X = w\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = w\frac{\partial u}{\partial y}$$

setzt, die Formel ableitet:

$$\int w \Delta u\, df + \int \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) df = -\int w \frac{\partial u}{\partial n}\, ds, \tag{4}$$

worin w und u irgend zwei im Innern von S stetige Funktionen sind, df, ds die Elemente der Fläche und des Randes von S und

n die nach innen gerichtete Normale an ds in der Ebene von df bedeutet.

Wenn wir uns die Aufgabe stellen, unter allen Funktionen u mit denselben Randwerten die zu bestimmen, für die das Integral

$$\Omega(u) = \int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] df \tag{5}$$

den kleinst möglichen Wert hat, so verfahren wir nach den Vorschriften der Variationsrechnung[1]).

Man ersetzt u in Ω durch $u + \varepsilon w$, worin ε eine Konstante, w eine stetige Funktion mit den Randwerten Null bedeutet und ordnet $\Omega(u + \varepsilon w)$ nach Potenzen von ε:

$$\Omega(u+\varepsilon w) = \Omega(u) + 2\varepsilon\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) df + \varepsilon^2\Omega(w). \tag{6}$$

Wenn nun $\Omega(u)$ ein Minimum sein soll, so muß der Koeffizient der ersten Potenz von ε, den wir die erste Variation von $\Omega(u)$ nennen, verschwinden, weil sonst, wenn ε hinlänglich klein und mit geeignetem Vorzeichen gewählt wird,

$$\Omega(u + \varepsilon w) < \Omega(u)$$

wäre.

Es ist also für die Funktion u, die Ω zum Minimum macht, und für ein beliebiges am Rande verschwindendes w:

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) df = 0, \tag{7}$$

und folglich nach (4)

$$\int w \Delta u \, df = 0, \tag{8}$$

woraus folgt, daß $\Delta u = 0$ ist.

Das Integral $\Omega(u)$ hat folgende Bedeutung:

Wenn u die Ordinate einer über S ausgespannten krummen Oberfläche ist, so ist der Flächeninhalt dieser Oberfläche

$$F = \int\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\, df,$$

und wenn wir beachten, daß $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ unendlich klein sind, so ergibt sich, wenn mit F_0 der Flächeninhalt des ebenen Stückes S bezeichnet wird, mit Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung:

$$F = F_0 + \tfrac{1}{2}\Omega(u). \tag{9}$$

[1]) Wir verweisen hier auf die Lehrbücher der Variationsrechnung von A. Kneser (Friedr. Vieweg & Sohn, 1900) und D. Bolza (Teubner, 1909).

Wir können also den Satz aussprechen:

I. **Eine ursprünglich ebene, am Rande gleichförmig gespannte Membran nimmt innerhalb einer von der Ebene unendlich wenig abweichenden Randkurve eine solche Gestalt an, daß der Flächeninhalt so klein wie möglich wird**[1].

§ 111.

Der Greensche Satz für das logarithmische Potential.

Wenn $\Delta u = 0$ ist, so ergibt sich aus § 110 (4) für ein beliebiges w:

$$\int \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) df = - \int w \frac{\partial u}{\partial n} ds, \tag{1}$$

und wenn wir $w = u$ annehmen:

$$\Omega(u) = \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] df = - \int u \frac{\partial u}{\partial n} ds. \tag{2}$$

Daraus schließen wir, daß, wenn u am Rande verschwindet, es in der ganzen Fläche S verschwinden muß. Denn es folgt in diesem Falle aus (2), daß $\Omega(u) = 0$ sein muß. Da die Elemente des Flächenintegrals aber niemals negativ sein können, so muß

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

also u konstant und wegen der verschwindenden Randwerte $= 0$ sein.

---

[1] Aus der Existenz eines Minimums wollten Gauß, W. Thomson, Dirichlet und Riemann auf die Möglichkeit der Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$ bei beliebig vorgeschriebenen Randwerten schließen. Riemann hat für diese Schlußweise den Namen „Dirichletsches Prinzip" eingeführt. Dagegen ist mit Recht eingewendet worden, daß für das Integral $\Omega(u)$, das nur positive Werte annehmen kann, zwar die Existenz einer unteren Grenze, aber nicht die eines Minimums evident ist (Riemanns Doktor-Dissertation, Art. 16 und „Theorie der Abelschen Funktionen", mathematische Werke, 2. Aufl., S. 30, 96). Daß Riemann diese Schwierigkeit wohl empfunden hat, ergibt sich aus dem Art. 17 der Doktor-Dissertation, wo er dem Bedenken teilweise, aber nicht vollständig begegnet (vgl. auch Anm. 6 zu der Dissertation, Werke, S. 47). Die Darstellung der eingehenden Untersuchungen, die von Schwarz, C. Neumann, D. Hilbert u. a. zu dem Zwecke angestellt sind, das Dirichletsche Prinzip durch strenge Beweise zu ersetzen, liegt nicht in dem Plane dieses Werkes (vgl. die Artikel „Potentialtheorie" und „Randwertaufgaben" in Bd. II der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften). Es gehören hierher auch die neueren Untersuchungen über Integralgleichungen, von denen weiter unten noch die Rede sein wird.

Sind u_1, u_2 zwei Lösungen von $\Delta u = 0$ mit denselben Randwerten, so ist $u = u_1 - u_2$ eine Lösung mit verschwindenden Randwerten, also identisch 0 und folglich $u_1 = u_2$. Damit ist bewiesen:

II. Ein logarithmisches Potential u ist durch die Randwerte innerhalb S eindeutig bestimmt, und wenn die Randwerte Null sind, identisch gleich Null.

Aus § 110 (4) ergibt sich, wenn man u mit w vertauscht und dann beide Formeln subtrahiert:

$$\int (w \Delta u - u \Delta w)\, df = -\int \left(w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds, \tag{3}$$

und wenn also sowohl Δu als Δw verschwinden:

$$\int \left(w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds = 0. \tag{4}$$

Wenn nun r die Entfernung eines variablen Punktes q von einem festen Punkt p ist, also wenn x, y und a, b die Koordinaten von q und p sind:

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

so genügt $w = \log r$ der Bedingung $\Delta w = 0$, und wir erhalten, wenn der Punkt p außerhalb S liegt, aus (4):

$$\int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \log r}{\partial n} \right) ds = 0. \tag{5}$$

Liegt aber p innerhalb S, so wird $\log r$ in dem Punkt p unendlich, und um die Formel (3), (4) anwenden zu können, müssen wir p durch eine Hülle von dem Gebiet S ausschließen. Diese Hülle wählen wir kreisförmig mit dem Mittelpunkt p und dem Radius ϱ und erhalten aus (4):

$$\int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \log r}{\partial n} \right) ds + \int_0^{2\pi} \left(\log \varrho \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{\varrho} \right) \varrho\, d\vartheta = 0,$$

woraus sich, wenn ϱ unendlich klein wird, und mit u_p der Wert von u in dem Punkt p bezeichnet wird, ergibt:

$$u_p = \frac{1}{2\pi} \int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \log r}{\partial n} \right) ds, \tag{6}$$

worin n die nach innen gerichtete Normale bedeutet.

Die entsprechende Formel für drei Variable haben wir in § 102 des ersten Bandes besprochen, und zur Ableitung des

Greenschen Satzes verwandt. Wir bezeichnen die Formel (6) auch hier als den Greenschen Satz. Er gibt einen Ausdruck für die Funktion u für einen beliebigen Punkt im Innern von S, wenn die Werte von u und $\partial u / \partial n$ am Rande bekannt sind.

Da nun, wenn p ein innerer Punkt ist, die in (6) unter dem Integralzeichen stehende Funktion und ihre nach a und b genommenen Derivierten beliebiger Ordnung in dem Integrationsintervall durchaus endlich bleiben, so schließen wir aus (6), wenn wir eine Funktion mit endlichen und stetigen Derivierten beliebig hoher Ordnung eine analytische Funktion nennen:

III. Ein logarithmisches Potential ist in seinem Gebiete S eine analytische Funktion[1]).

Wenn wir in der Formel (1) $w = 1$ setzen, so ergibt sich:

$$\int \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \tag{7}$$

und wenn wir daher die Formel (6) auf ein Gebiet anwenden, das von einem um p beschriebenen Kreis vom Radius r begrenzt ist, so ist $\log r$ konstant, $\partial \log r / \partial n = -1/r$, $ds = r d\vartheta$ zu setzen, und es folgt

$$u_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \, d\vartheta, \tag{8}$$

also:

IV. Der Wert u_p des logarithmischen Potentials u in einem beliebigen Punkt p ist gleich dem arithmethischen Mittel aller auf einer um p beschriebenen Kreislinie stattfindenden Werte.

Hieraus ergeben sich verschiedene Folgerungen:

---

[1]) Pringsheim hat gezeigt (Mathem. Annalen, Bd. 44), daß die Existenz von endlichen und stetigen Differentialquotienten jeder Ordnung nicht genügt, um die Entwickelbarkeit einer Funktion nach dem Taylorschen Lehrsatze zu gewährleisten. Wenn man also, wie es sonst gebräuchlich ist, unter einer analytischen Funktion der beiden Variablen a, b oder des Punktes p eine Funktion versteht, die in einer endlichen Umgebung eines jeden Punktes p_0 im Innern eines Gebietes S durch die Taylorsche Reihe darstellbar ist, so wird der Satz III erst dadurch begründet, daß die Funktionen $\log r$, $\partial \log r / \partial n$ in diesem Sinne analytische Funktionen in dem Gebiete S sind, und daß die Potenzreihen für diese Funktionen gleichmäßig konvergent bleiben, solange der Punkt q mit den Koordinaten x, y die Peripherie von S durchläuft, so daß die Integration (6) auch an den Potenzreihen ausgeführt werden kann.

V. **Das logarithmische Potential u kann in keinem Punkt innerhalb S einen Maximum- oder Minimumwert c haben.**

Denn wäre ein solcher vorhanden, so könnte man um ihn eine Kreisperipherie beschreiben, auf der u überall kleiner oder überall größer als c wäre, im Widerspruch mit dem Satze IV. Und ebenso schließt man:

VI. **Ein logarithmisches Potential u kann nicht in einem endlichen Flächenstück konstant sein, wenn es nicht überall konstant ist.**

Denn nehmen wir das Gegenteil an, und wählen für p einen Punkt an der Grenze des Gebietes, in dem u konstant ist, so können wir um diesen Punkt als Mittelpunkt eine Kreisperipherie legen, auf der u teils gleich c, teils nur kleiner oder nur größer als c ist, was gleichfalls dem Satz IV. widerspricht. Endlich:

VII. **Eine Linie innerhalb S, in der u einen konstanten Wert c hat, scheidet Flächenteile, in denen u kleiner als c ist, von solchen, in denen u größer als c ist.**

Denn wäre in der Nähe irgend eines Punktes p einer solchen Linie u zu beiden Seiten kleiner als c, so könnte man wieder um p eine Kreislinie legen, auf der u nirgends größer, wohl aber kleiner als c wird, während doch $u_p = c$ ist. Also erhält man den gleichen Widerspruch. Ebenso, wenn u zu beiden Seiten größer als c wäre.

Endlich fügen wir noch hinzu:

VIII. **Die Gleichgewichtsfläche der gespannten Membran hat, wenn sie nicht eben ist, überall eine sattelförmige Krümmung.**

Denn das Produkt der beiden Hauptkrümmungen (das Gaußsche Krümmungsmaß) ist nach einer bekannten Formel:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]^2} \;[1]),$$

und wegen $\Delta u = 0$ haben

[1]) Gauß, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Werke 4, 230 (auch in Ostwalds Klassikern, Nr. 5).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

immer entgegengesetzte Zeichen. Folglich haben auch ϱ_1, ϱ_2 entgegengesetzte Zeichen.

§ 112.

Die Gleichung der schwingenden Membran.

In mehrfacher Hinsicht anders wie die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ verhält sich die Differentialgleichung der schwingenden Membran

(1) $$\Delta u + k^2 u = 0\ [1]).$$

Ein wesentlicher Unterschied stellt sich schon bei folgender Betrachtung heraus:

Wenn wir in der Formel § 110 (4) $w = u$ setzen und annehmen, daß u der Gleichung (1) genüge, so ergibt sich, wenn u mit seinen ersten Differentialquotienten stetig ist, was wir jetzt immer stillschweigend voraussetzen wollen:

(2) $$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - k^2 u^2 \right] df = - \int u \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Wäre nun k^2 negativ, so würde man daraus wie beim logarithmischen Potential schließen können, daß u identisch gleich Null sein müßte, wenn es am Rande gleich Null ist, und daß also überhaupt die Lösung von (1) durch gegebene Randwerte eindeutig bestimmt ist.

Bei positiven Werten von k^2 ist dieser Schluß aber nicht mehr gestattet, und in der Tat sind gerade solche Lösungen von (1), die am Rande verschwinden, wie wir gesehen haben, bei der Theorie der Schwingungen der am Rande eingeklemmten Membran von Bedeutung. Es hat sich in den früher behandelten Beispielen gezeigt, daß es bei gegebenen Flächen S Lösungen u mit verschwindenden Randwerten für unendlich viele, aber nur diskrete Werte von k^2 gibt, und man sieht leicht, wenn es für ein

---

[1]) Man vergleiche über diese Differentialgleichung:

H. Weber, Über die Integration der partiellen Differentialgleichung usw. Mathematische Annalen, Bd. I (1868).

Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ (Leipzig 1891).

Poincaré, Sur les équations de la physique mathématique, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1894.

bestimmtes k^2 eine Lösung u_1 mit vorgeschriebenen Randwerten und eine u_2 mit verschwindenden Randwerten gibt, daß es dann unendlich viele solcher Funktionen u mit den gleichen Randwerten geben muß, nämlich, wenn λ eine Konstante ist:

$$u = u_1 + \lambda u_2.$$

Wenn es umgekehrt für dasselbe k^2 zwei Lösungen u, u_1 von (1) mit denselben Randwerten gibt, so ist ihre Differenz $u_2 = u - u_1$ eine Lösung mit verschwindenden Randwerten.

§ 113.
Analogon des Greenschen Satzes.

Ebenso, wie wir für die Untersuchung der Differentialgleichung des logarithmischen Potentials eine partikulare Lösung $\log r$ benutzt haben, so wenden wir auch hier eine partikulare Lösung der Differentialgleichung (1) an. Nehmen wir wie früher einen festen Punkt p und einen variablen Punkt q, deren Entfernung

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ist, und führen um p Polarkoordinaten r, ϑ in der Ebene ein, so erhalten wir aus § 112 (1) [vgl. § 104 (1)]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r \frac{\partial u}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + k^2 u = 0. \tag{1}$$

Wir suchen partikulare Integrale w, die von ϑ unabhängig sind, die also der Differentialgleichung

$$\frac{1}{r}\frac{d r \frac{d w}{d r}}{d r} + k^2 w = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{d^2 w}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d w}{d r} + k^2 w = 0 \tag{2}$$

genügen. Dies ist aber die Differentialgleichung für die Besselschen Funktionen 0ter Ordnung, und ihre partikularen Lösungen sind die beiden Funktionen Bd. I, § 76:

$$J(kr), \qquad K(kr). \tag{3}$$

Die erste von diesen Funktionen ist für alle endlichen Werte von r endlich und stetig, und erhält für $r = 0$ den Wert 1, die zweite wird unendlich für $r = 0$, und zwar so, daß

$$(4) \qquad K(kr) = -\frac{2}{\pi} \log kr + \text{funkt. kont.}$$

[Bd. I, § 76 (6), § 77 (14)].

Wenn wir in der Formel § 111 (3):

$$(5) \qquad \int (w\Delta u - u\Delta w)\, df = -\int \left(w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n}\right) ds$$

für u und w zwei Lösungen der Differentialgleichung § 112 (1), die innerhalb S stetig sind, einsetzen, so ergibt sich:

$$(6) \qquad \int \left(w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n}\right) ds = 0,$$

und folglich:

$$(7) \qquad \int \left(J(kr) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial J(kr)}{\partial n}\right) ds = 0,$$

und wenn p außerhalb S liegt, so ist auch

$$(8) \qquad \int \left(K(kr) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial K(kr)}{\partial n}\right) ds = 0.$$

Wenn aber p innerhalb S liegt, so erhält man wie oben § 111 mit Rücksicht auf (4):

$$(9) \qquad u_p = -\frac{1}{4} \int \left(K(kr) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial K(kr)}{\partial n}\right) ds,$$

und hieraus kann man wie in § 111 schließen:

I. Eine Lösung der Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, die innerhalb S mit ihren ersten Derivierten endlich und stetig ist, ist eine analytische Funktion.

Dieser Satz ist noch in Übereinstimmung mit dem Satze III. für das logarithmische Potential.

An Stelle der Funktion $K(kr)$ können wir nach (6) auch andere Funktionen setzen. Wenn wir nämlich unter v eine beliebige analytische Lösung von $\Delta v + k^2 v = 0$ verstehen, wie wir sie uns leicht in beliebiger Menge durch trigonometrische oder Besselsche Funktionen herstellen können, und dann

$$(10) \qquad \lambda = K(kr) + v$$

setzen, so ergibt sich aus:

$$(11) \qquad u_p = -\frac{1}{4} \int \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \lambda}{\partial n}\right) ds,$$

und über ein Gebiet, das den Punkt p nicht enthält:

$$0 = -\frac{1}{4}\int\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \lambda}{\partial n}\right)ds. \tag{12}$$

Zum Beweis der Formel (11) ist es aber nicht nötig, die Stetigkeit der Differentialquotienten von u vorauszusetzen. Das Wesentliche dabei ist nur, daß die Gleichung (12) für jeden Teil von S, der den Punkt p nicht enthält, befriedigt ist.

Lassen wir also die Stetigkeit der Derivierten von u in einzelnen Punkten oder Linien dahingestellt und zerlegen S in zwei Bestandteile S' und S'', so daß die Unstetigkeitsstellen alle in S'' enthalten sind, so wird die Formel (11) und damit der Satz I. für S' richtig sein, wenn nur das über die Begrenzung σ von S'' erstreckte Integral

$$\int\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial \lambda}{\partial \nu}\right)d\sigma = 0 \tag{13}$$

ist, worin wir unter ν die ins Innere von S'' gerichtete Normale an σ verstehen wollen. Da wir S'' auf Linien und Punkte zusammenziehen können, und die Funktion u selbst als stetig vorausgesetzt ist, so gilt die Formel (11) für jede Lage des Punktes p innerhalb S. Wir können also den Satz I. so ergänzen:

II. Eine stetige Lösung u der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, deren Derivierte höchstens in einzelnen Punkten oder Linien unstetig sind, ist in dem ganzen Gebiete S eine analytische Funktion, wenn die Bedingung (13) für jede innerhalb S geschlossene Linie σ befriedigt ist.

Da man in die Funktion λ eine beliebige endliche Anzahl linear vorkommender willkürlicher Konstanten aufnehmen kann, so können wir dieser Funktion noch weitere Bedingungen vorschreiben, z. B., daß sie in gewissen gegebenen Punkten $= 0$ werden soll.

§ 114.

Der Mittelwertsatz.

Eine andere Gestalt nimmt hier der Mittelwertsatz an, den wir in § 111, IV. für das logarithmische Potential ausgesprochen haben.

Wir wenden die Formeln (7) und (9) des vorigen Paragraphen auf ein um p als Mittelpunkt beschriebenes kreisförmiges Gebiet vom Radius r an, und erhalten, wenn wir die Ableitungen der Besselschen Funktionen $J(x)$ und $K(x)$ mit $J'(x)$, $K'(x)$ bezeichnen, da hier $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$ ist:

$$u_p = \frac{r}{4} K(kr) \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\vartheta - \frac{kr}{4} K'(kr) \int_0^{2\pi} u\, d\vartheta, \tag{1}$$

$$0 = \frac{r}{4} J(kr) \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r} d\vartheta - \frac{kr}{4} J'(kr) \int_0^{2\pi} u\, d\vartheta, \tag{2}$$

und wenn wir die Formel (1) auf die Funktion $u = J(kr)$ anwenden:

$$1 = \frac{k\pi r}{2} [K(kr) J'(kr) - J(kr) K'(kr)]. \tag{3}$$

Wenn wir daher (1) mit $J(kr)$, (2) mit $-K(kr)$ multiplizieren und addieren, so folgt mit Rücksicht auf (3):

$$u_p J(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\, d\vartheta. \tag{4}$$

III. Das arithmetische Mittel der Werte von u auf einer Kreislinie mit dem Radius r ist gleich dem Werte von u im Mittelpunkt, multipliziert mit der Funktion $J(kr)$ für die Kreisperipherie.

Dieser Satz zeigt, daß sich unsere Funktion u anders verhält, wie das logarithmische Potential.

Wenn zunächst $u_p = 0$ ist, so zeigt die Formel (4), daß u auf keiner um den Punkt p gelegten Kreisperipherie ein unveränderliches Vorzeichen haben kann, und daß also u auf jeder solchen Kreislinie wenigstens zweimal $= 0$ werden muß. Also:

IV. Durch jeden Punkt, in dem die Funktion u verschwindet, geht eine Linie, in der $u = 0$ ist.

V. Eine Linie, in der $u = 0$ ist, scheidet Flächenteile, in denen u positiv ist, von solchen, in denen u negativ ist.

Es kann hier, anders wie beim logarithmischen Potential, Punkte und Linien geben, in denen u einen Maximum- oder einen Minimumwert hat. Diese extremen Werte können aber nicht gleich Null sein.

Die Gleichung $J(\lambda) = 0$ hat, wie wir in § 74, Bd. I gesehen haben, unendlich viele Wurzeln, von denen die kleinste $\alpha = 2{,}4048\ldots$ ist. Wenn wir also $r = \alpha / k$ setzen, so folgt aus (4):

$$\int_0^{2\pi} u\, d\vartheta = 0.$$

VI. Es muß also auf einer Kreisperipherie, deren Radius den Wert α/k hat, wo auch der Punkt p liegen mag, die Funktion u ihr Zeichen wechseln, also gleich Null werden, vorausgesetzt natürlich, daß das Gebiet S, in dem u gegeben ist, eine hinlängliche Ausdehnung hat.

Ist die Funktion u in der ganzen unendlichen Ebene gegeben, so folgt hieraus, daß die Ebene durch Nullinien in Felder geteilt ist, deren Ausdehnung wenigstens in einer Richtung endlich ist, in denen u abwechselnd positiv und negativ ist.

§ 115.

Harmonische Funktionen.

Von besonderem Interesse sind die am Rande der Fläche S verschwindenden Lösungen der Differentialgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

in der Fläche S, weil diese Funktionen die einfachen periodischen Bewegungen der am Rande eingeklemmten Membran bestimmen. Wir nennen sie die harmonischen Funktionen oder auch die Eigenfunktionen der Fläche S. Sie treten bei einer gegebenen Fläche S nur für gewisse Werte der Konstanten k^2 auf, deren jeder eine einfache Schwingungsform bestimmt. Diese Werte der Konstanten k^2, die in unendlicher Zahl vorhanden sind, müssen für eine gegebene Form der Fläche S bestimmt werden, wenn das Schwingungsproblem gelöst werden soll; es kann dies aber erst dann geschehen, und zwar durch Lösung einer transzendenten Gleichung, wenn die partikularen Lösungen für ein unbestimmtes k^2 bekannt sind. Es kann bei besonderen Formen der Fläche S vorkommen, wie wir es z. B. bei der quadratischen Membran gesehen haben, daß für einen und denselben Wert von k^2 zwei oder mehr harmonische Funktionen $u_1, u_2 \ldots$ möglich sind, und zwar gibt es dann immer eine ganze Schar $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots$ mit willkürlichen Koeffizienten $a_1, a_2 \ldots$ Die Ermittelung solcher Fälle hängt von zahlentheoretischen Fragen ab, über die uns, abgesehen von dem einfachsten Fall der rechteckigen Fläche, nichts bekannt ist.

Andererseits können für solche Werte von k^2, für die eine harmonische Funktion U der Fläche S existiert, die Randwerte einer Lösung der Gleichung (1) nicht beliebig vorgeschrieben sein; denn nehmen wir in der Formel (6), § 113 für w eben diese harmonische Funktion U, so ergibt sich für die Randwerte von u die Bedingung:

$$\int u \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0.$$

Für die allgemeine Theorie der harmonischen Funktionen ist die Zurückführung auf eine Minimumsaufgabe von Wert, wenn auch, was die Beweiskraft dieser Betrachtung betrifft, dasselbe einzuwenden ist, wie in bezug auf das Dirichletsche Prinzip. (§ 110, Anmerkung.)

§ 116.

Die harmonische Grundfunktion.

Wir stellen folgende Aufgabe:

I. Es wird unter allen in S stetigen am Rande von S verschwindenden Funktionen eine solche, u, gesucht, die unter der Bedingung

$$\int u^2 df = 1 \tag{1}$$

das Integral

$$\Omega(u) = \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} df \tag{2}$$

so klein als möglich macht, wenn df alle Flächenelemente von S durchläuft.

Daß, wie in der analogen Aufgabe des logarithmischen Potentials, die Funktion $u = 0$ sei, ist durch die Bedingung (1) ausgeschlossen. Wir setzen zur Abkürzung, wenn u, w zwei beliebige Funktionen sind:

$$\Omega(u, w) = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) df. \tag{3}$$

Wir nehmen eine solche stetige Funktion u an, deren Derivierte in einzelnen Linien oder Punkten unstetig sein können und beweisen nun zunächst, um die Bedingungen für die gesuchte Funktion darzustellen, folgendes:

1. Das Integral $\Omega(u)$ kann noch verkleinert werden, wenn es eine am Rande verschwindende stetige Funktion w in S gibt, deren erste Ableitungen endlich sind und die den Bedingungen genügt, daß

$$\int uw\,df = 0, \tag{4}$$

$$\Omega(u, w) \text{ nicht } = 0. \tag{5}$$

Nehmen wir nämlich an, es existiere eine solche Funktion w, so setzen wir:

$$\int w^2 df = m, \tag{6}$$

$$U = (1 + h^2 a)u + hw, \tag{7}$$

worin h und a Konstanten bedeuten.

Es verschwindet hiernach U am Rande, und es ist nach (4):

$$\int U^2 df = (1 + h^2 a)^2 \int u^2 df + h^2 m,$$

und wenn also sowohl U als u der Bedingung (1) genügen sollen, so muß

$$1 + h^2 a = \sqrt{1 - h^2 m} \tag{8}$$

sein. Hieraus soll die Konstante a als Funktion der Konstanten h bestimmt werden; a wird reell, wenn h hinlänglich klein ist, und wird bei Vernachlässigung von h^2 gleich $-\frac{1}{2}m$, bleibt also endlich für $h = 0$.

Ist a nach (8) bestimmt, so genügt U der Bedingung (1). Es ist aber

$$\Omega(U) = (1 + h^2 a)^2\, \Omega(u) + 2h(1 + h^2 a)\,\Omega(u,w) + h^2\,\Omega(w).$$

und hierfür kann man setzen:

$$\Omega(U) = \Omega(u) + 2h\,\Omega(u,w) + h^2\,\Theta,$$

indem man alle Terme, die mit h^2 und höheren Potenzen von h multipliziert sind, in $h^2\Theta$ zusammenfaßt.

Da nun Θ und $\Omega(u, w)$ endlich sind, so kann man, wenn $\Omega(u, w)$ nicht verschwindet, h so klein annehmen, daß $2\,\Omega(u, w)$

$+ h\Theta$ im Vorzeichen mit $\Omega(u, w)$ übereinstimmt, und wenn man dann dem h das entgegengesetzte Zeichen gibt, so wird $\Omega(U) - \Omega(u)$ negativ, also

$$\Omega(U) < \Omega(u),$$

wie zu beweisen war.

Hiernach muß also, wenn $\Omega(u)$ der gesuchte Minimumwert ist, für jedes der Bedingung (4) genügende, am Rande verschwindende w

$$\Omega(u, w) = 0 \tag{9}$$

sein. Wir führen jetzt an Stelle von w eine neue Funktion η ein, indem wir

$$w = \eta - \mu u$$

setzen, und die Konstante μ so bestimmen, daß die Bedingung (4) identisch befriedigt wird, nämlich [wegen (1)]:

$$\mu = \int u \eta \, df. \tag{10}$$

Die Funktion η ist dann an keine weitere Bedingung gebunden, als daß sie innerhalb S stetig und am Rande von S gleich Null sein soll.

Wenn wir diesen Ausdruck von w in (9) substituieren, so folgt

$$\Omega(u, \eta) - \mu\,\Omega(u) = 0, \tag{11}$$

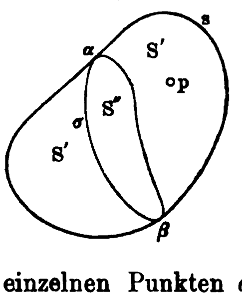
und wenn wir also

$$\Omega(u) = k^2 \tag{12}$$

setzen, also mit k^2 den gesuchten Minimumwert selbst, also eine Konstante bezeichnen, so erhalten wir aus (11), wenn wir für μ den Wert (10) einsetzen:

$$\Omega(u, \eta) - k^2 \int u \eta \, df = 0. \tag{13}$$

Fig. 49.



Wir zerlegen jetzt die Fläche S in zwei Teile $S' + S''$, die an einer Kurve σ zusammenstoßen. Diese Grenzkurve σ wählen wir so, daß alle etwa vorhandenen Unstetigkeiten der Derivierten von u innerhalb S'' liegen, daß die Grenzkurve σ höchstens in einzelnen Punkten $\alpha, \beta, \ldots$ mit der Grenze s von S zusammenfällt und daß an σ die Derivierten von u stetig sind.

Die Funktion η muß stetig und an der Grenze s gleich Null sein. Wir wählen sie so, daß ihre Derivierten in S'' stetig sind, lassen sie aber sonst unbestimmt.

Das Flächenintegral

$$\Omega(u, \eta) = \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) df$$

zerfällt dann in zwei Teile $\Omega'(u, \eta)$, $\Omega''(u, \eta)$, in denen df die Elemente df', df'' von S' und S'' durchläuft. Verstehen wir noch unter ν die ins Innere von S'' gerichtete Normale an σ, so ergibt sich aus dem Satz § 110 (4), da die Ableitungen von u in S', die von η in S'' stetig sind:

$$\Omega'(u, \eta) = -\int \eta \varDelta u \, df' + \int \eta \frac{\partial u}{d \nu} d\sigma,$$

$$\Omega''(u, \eta) = -\int u \varDelta \eta \, df'' - \int u \frac{\partial \eta}{\partial \nu} d\sigma,$$

und daraus durch Addition nach (13):

$$\int \eta (\varDelta u + k^2 u) df' + \int u (\varDelta \eta + k^2 \eta) df'' = \int \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \right) d\sigma. \tag{14}$$

Nehmen wir zunächst η innerhalb S'' und an der Grenze σ gleich Null an, so ergibt sich:

$$\int \eta (\varDelta u + k^2 u) df' = 0,$$

und da η in S', abgesehen von dem Randwert Null, willkürlich ist, so folgt hieraus:

$$\varDelta u + k^2 u = 0. \tag{15}$$

Diese Gleichung ist hierdurch zunächst nur für die Fläche S' bewiesen. Da aber S' jeder Teil von S sein kann, mit etwaigem Ausschluß solcher Linien und Punkte, in denen die Ableitungen von u unstetig sind, so ist die Gleichung (15) in der ganzen Fläche S befriedigt.

Wir machen in der Formel (14) noch eine zweite Annahme über η. Wir nehmen einen willkürlichen Punkt p innerhalb S' an, und nehmen eine Funktion λ wie im Satz § 113, II., d. h. eine Lösung der Gleichung

$$\varDelta \lambda + k^2 \lambda = 0,$$

die im ganzen Gebiete S, mit Ausnahme des Punktes p endlich und stetig ist, und im Punkte p logarithmisch unendlich wird.

Wir nehmen $\eta = \lambda$ innerhalb S'' und setzen η willkürlich, jedoch stetig, in das Gebiet S' bis zum Rande s fort, und so, daß η am Rande s den Wert Null erhält. Dies ist möglich, wenn wir λ in den etwa vorhandenen Berührungspunkten $\alpha, \beta \ldots$ von s und σ gleich Null annehmen, was nach der Schlußbemerkung in § 113 gestattet ist. Es ergibt sich dann aus (14):

$$\int\left(\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial \lambda}{\partial \nu}\right) d\sigma = 0, \tag{16}$$

und damit, mit Rücksicht auf § 113, II. der Satz:

2. **Die am Rande von S verschwindende stetige Funktion u, die dem Integral $\Omega(u)$ unter der Bedingung (1) den kleinsten Wert k^2 erteilt, ist eine analytische Lösung der Differentialgleichung**

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Es ist also u eine harmonische Funktion der Fläche S. Wir nennen sie die **harmonische Grundfunktion**.

Aus 2. ergeben sich über diese Funktion noch weitere Folgerungen:

3. **Die harmonische Grundfunktion hat innerhalb S überall dasselbe Vorzeichen.**

Wenn nämlich die Funktion u teils negativ, teils positiv wäre, so müßte eine Linie l existieren, an der $u = 0$ ist, und wir könnten eine Funktion u' bilden, die überall wo u positiv ist, $= u$, und wo u negativ ist, $= -u$ ist. Es ist dann

$$\int u'^2 df = 1, \quad \Omega(u') = \Omega(u) = k^2.$$

An der Linie l können aber die Differentialquotienten von u' nicht immer stetig sein, weil u' zu beiden Seiten von l dasselbe Zeichen hat, was nach § 115, V. bei einer der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügenden Funktion mit stetigen Differentialquotienten nicht möglich ist. Es würde also $\Omega(u')$ nach dem Satze 2. durch Abänderung von u' noch verkleinert werden können, was der Voraussetzung widerspricht, daß $\Omega(u) = \Omega(u')$ der kleinste Wert dieses Integrals sei.

Der harmonischen Grundfunktion entspricht eine mögliche Schwingung der Membran, die wir die Grundschwingung oder (in akustischer Anwendung) den Grundton nennen; Linien, in denen die Funktion u gleich Null wäre, würden bei dieser Schwingung Knotenlinien sein. Wir haben also den Satz:

4. Die Grundschwingung hat keine Knotenlinien,

und ferner:

5. Die harmonische Grundfunktion kann in keinem Punkte im Innern von S verschwinden.

Denn die Annahme, daß u in einem Punkte p gleich Null sei, widerspricht nach 4. dem Satze § 114, IV. und hieraus folgt:

6. Es gibt für ein gegebenes Gebiet S nur eine harmonische Grundfunktion, wenn wir von einer bloßen Änderung des Vorzeichens absehen.

Angenommen, wir hätten zwei solcher Funktionen u_1, u_2, die nicht in konstantem Verhältnis stehen, die also den Differentialgleichungen

$$\varDelta u_1 + k^2 u_1 = 0, \qquad \varDelta u_2 + k^2 u_2 = 0$$

genügen. Wir bezeichnen mit h, c Konstanten und setzen

$$u = h(u_1 + c u_2).$$

Dann kann, wenn h von Null verschieden ist, u nicht identisch verschwinden und es ist

$$\varDelta u + k^2 u = 0. \tag{17}$$

Für jedes c läßt sich die Konstante h, vom Vorzeichen abgesehen, eindeutig so bestimmen, daß

$$\int u^2 df = 1$$

wird. Dann ergibt sich aber aus (17) durch Multiplikation mit $u\,df$ und Integration über S nach § 110 (4), wenn dort $w = u$ gesetzt wird:

$$\Omega(u) = k^2.$$

Es würde also u für jede Annahme über c eine harmonische Grundfunktion sein. Nun kann man aber c so bestimmen, daß u in einem beliebigen Punkte von S verschwindet, was mit dem Satze 5. im Widerspruch steht.

§ 117.
Die höheren harmonischen Funktionen.

Nachdem die harmonische Grundfunktion u der Fläche S bestimmt ist, kommt man zu den höheren harmonischen Funktionen von S auf folgendem Wege:

II. **Es wird unter allen in S stetigen am Rande von S verschwindenden Funktionen eine solche, u_1, gesucht, die unter den Bedingungen**

$$\int u_1^2\, df = 1, \qquad \int u u_1\, df = 0 \tag{1}$$

dem Integral $\Omega(u_1)$ einen kleinsten Wert k_1^2 erteilt.

Aus der zweiten der Bedingungen (1) ersieht man zunächst, daß die Funktion u_1 von der Funktion u verschieden sein muß, und daraus folgt

$$k < k_1. \tag{2}$$

Man zeigt zunächst, genau wie bei dem Beweise des Satzes 1. im vorigen Paragraphen, daß die Funktion u_1 für jede stetige Funktion w in S, die den Gleichungen genügt:

$$\int u w\, df = 0, \qquad \int u_1 w\, df = 0, \tag{3}$$

die Bedingung

$$\Omega(u_1, w) = 0 \tag{4}$$

befriedigen muß.

Hierauf setzt man

$$w = \eta - \mu u - \mu_1 u_1 \tag{5}$$

und bestimmt die Konstanten μ, μ_1 so, daß die beiden Bedingungen (3) identisch, für jedes η befriedigt sind, nämlich, wegen (1) und § 116 (1):

$$\mu = \int \eta u\, df, \qquad \mu_1 = \int \eta u_1\, df; \tag{6}$$

dann ergibt sich aus (4):

$$\Omega(u_1, \eta) - \mu\, \Omega(u_1 u) - \mu_1\, \Omega(u_1) = 0,$$

und da nach § 116 (9):

$$\Omega(u_1, u) = 0,$$

und nach der Voraussetzung

$$\Omega(u_1) = k_1^2 \tag{7}$$

ist, so folgt hieraus

$$\Omega(u_1, \eta) - \mu_1 k_1^2 = 0,$$

und endlich nach (6):

$$\int\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} - k_1^2 \eta u_1\right) df = 0. \tag{8}$$

Hieraus aber können wir genau, wie wir im vorigen Paragraphen den Satz 2. bewiesen haben, schließen:

7. Die Funktion u_1 ist eine analytische Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0,$$

die am Rande von S den Wert Null hat.

Diese Funktion kann im Gegensatz zu der Grundfunktion u (§ 116, 3.) nicht in der ganzen Fläche S dasselbe Zeichen haben, wie aus der zweiten Gleichung (1) unmittelbar zu ersehen ist.

Der Funktion u_1 entspricht eine mögliche Schwingung der Membran, die die erste Oberschwingung oder der erste Oberton heißt.

8. Die erste Oberschwingung hat immer Knotenlinien.

Wir können auch nicht schließen, daß es nur eine solche Funktion u_1 gibt. Wir haben im Gegenteil an dem Beispiele des Rechteckes gesehen, daß es Fälle gibt, in denen zu einem bestimmten Werte von k^2 mehrere harmonische Funktionen gehören. Diese Fälle haben aber, wie jene Beispiele zeigen, den Charakter von Ausnahmefällen, d. h. die Begrenzung der Fläche S ist an irgend eine bis jetzt nicht bekannte tiefliegende algebraische Bedingung geknüpft.

Man kann auf diese Weise unbegrenzt weiter gehen, und es wird genügen, wenn wir noch den nächsten Schritt beschreiben.

III. Es wird, nachdem die beiden ersten harmonischen Funktionen u, u_1 gefunden sind, unter allen stetigen am Rande von S verschwindenden Funktionen eine solche, u_2, gesucht, die unter den Bedingungen

$$\int u_2^2\, df = 1, \quad \int u u_2\, df = 0, \quad \int u_1 u_2\, df = 0 \tag{9}$$

dem Integral $\Omega(u_2)$ einen kleinsten Wert k_2^2 erteilt.

Diese Funktion kann wegen (9) mit keiner der beiden Funktionen u, u_1, noch auch mit einer linearen Verbindung von ihnen mit konstanten Koeffizienten identisch sein, und da die Bedingungen (9) die Bedingungen der Aufgabe II. einschließen, so ist

$$k < k_1 \leqq k_2. \tag{10}$$

Man zeigt zunächst wie oben, daß

$$\Omega(u_2, w) = 0 \tag{11}$$

sein muß für alle den Bedingungen

$$\int u\,w\,d f = 0, \quad \int u_1\,w\,d f = 0, \quad \int u_2\,w\,d f = 0 \tag{12}$$

genügenden Funktionen w, und setzt dann

$$w = \eta - \mu u - \mu_1 u_1 - \mu_2 u_2, \tag{13}$$

worin, damit (12) befriedigt sei,

$$\mu = \int \eta\,u\,d f, \quad \mu_1 = \int \eta\,u_1\,d f, \quad \mu_2 = \int \eta\,u_2\,d f \tag{14}$$

zu setzen ist, und dann ergibt sich auf demselben Wege wie oben der Satz:

9. Die dritte harmonische Funktion u_2 ist eine am Rande verschwindende analytische Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0.$$

Es kann also hier der Fall eintreten, daß $k_1 = k_2$ wird, dann nämlich, wenn die Bestimmung von u_1 nicht eindeutig ist, man aber zunächst eine dieser Funktionen für u_1 beliebig ausgewählt hat. Tritt dieser Fall ein, so ist auch $a_1 u_1 + a_2 u_2$ für beliebige konstante Koeffizienten a_1, a_2 eine zu demselben k_2 gehörige harmonische Funktion.

Geht man dann zur Bestimmung einer vierten Funktion u_3 über, die unter den Bedingungen

$$\int u_3^2\,d f = 1, \quad \int u\,u_3\,d f = 0, \quad \int u_1\,u_3\,d f = 0, \quad \int u_2\,u_3\,d f = 0 \tag{15}$$

das Integral $\Omega(u_3)$ zu einem Minimum k_3^2 macht, so erhält man die nächste harmonische Funktion, und es ist durch (15) nicht nur ausgeschlossen, daß u_3 mit u oder u_1 oder u_2 identisch werde, sondern auch daß u_3 von u, u_1 und u_2 linear abhängig, d. h. in der Form $u_3 = au + a_1 u_1 + a_2 u_2$ enthalten sei.

Man kann auf diese Weise weiter schließen, und erhält eine unbegrenzte Reihe positiver, stets wachsender oder wenigstens nie abnehmender Werte von k:

$$k < k_1 \leqq k_2 \leqq k_3, \ldots, \tag{16}$$

und zu jeder dieser Konstanten erhält man eine analytische, am Rande verschwindende Lösung der Differentialgleichung:

$$\Delta u_i + k_i^2 u_i = 0. \tag{17}$$

Diese Funktionen geben die höheren Oberschwingungen der Membran.

Alle höheren Oberschwingungen haben Knotenlinien. Durch diese Knotenlinien wird die Fläche S in Felder geteilt, in denen die entsprechende Funktion u_i abwechselnd positive und negative Werte hat.

Durch die Differentialgleichung selbst sind die harmonischen Funktionen nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt; bisher haben wir diesen Faktor durch die Bedingung

$$\int u_i^2 \, df = 1 \tag{18}$$

bestimmt, und wir wollen daran auch jetzt noch festhalten.

Durch die Untersuchungen über Integralgleichungen, auf die wir in § 119 zurückkommen, hat sich ergeben, daß die Zahlen $k, k_1, k_2, \ldots$ die Nullwerte einer durch eine stets konvergente Potenzreihe dargestellten Funktion $\delta(\lambda)$ sind[1]. Eine solche Funktion kann aber in einem endlichen Gebiet immer nur eine endliche Anzahl von Nullstellen haben. Es folgt daraus, daß die Werte $k, k_1, k_2, \ldots$ der Reihe (16) mit dem Index ins Unendliche wachsen.

§ 118.

Entwickelung einer Funktion nach harmonischen Funktionen.

Sind u und v irgend zwei harmonische Funktionen der Fläche S, so ist, wenn k, λ die entsprechenden Konstanten sind:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \qquad \Delta v + \lambda^2 v = 0,$$

[1]) Vgl. die erste Hilbertsche Mitteilung aus den Göttinger Nachrichten von 1904, S 58.

und daraus folgt, wenn man die erste mit $v\,df$, die zweite mit $-u\,df$ multipliziert, addiert und über die Fläche S integriert:

$$\int (v\Delta u - u\Delta v)\,df = (\lambda^2 - k^2)\int u\,v\,df.$$

Die linke Seite ist aber hier gleich Null [nach § 112, (3)] und es folgt also, wenn λ von k verschieden ist:

$$\int u\,v\,df = 0. \tag{1}$$

Hieraus können wir zunächst schließen, daß es keine harmonische Funktion geben kann, die zu einem imaginären k gehört. Denn wenn k komplex ist, und λ zu k konjugiert imaginär, so ist k von λ verschieden, und u und v sind gleichfalls konjugiert imaginär, oder können wenigstens so angenommen werden. Dann ist aber uv wesentlich positiv, und die Gleichung (1) ist unmöglich. Daß k nicht rein imaginär, d. h. k^2 negativ sein kann, haben wir schon oben nachgewiesen (S. 268).

Wir nehmen nun die Reihe der aufeinander folgenden Werte

$$k,\ k_1,\ k_2,\ k_3\ \ldots \tag{2}$$

und zu jedem die zugehörige harmonische Funktion

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3\ \ldots, \tag{3}$$

die wir der Bedingung

$$\int u_i^2\,df = 1 \tag{4}$$

unterwerfen. Wir sehen zunächst von dem Falle ab, daß zu einem k_i mehrere harmonische Funktionen gehören. Dann ist, wenn h von i verschieden ist:

$$\int u_h\,u_i\,df = 0. \tag{5}$$

Es sei nun $\varphi(x, y)$ eine in der Fläche S willkürlich gegebene Funktion. Wir suchen die Konstanten $a, a_1, a_2 \ldots$ so zu bestimmen, daß

$$\varphi(x, y) = a\,u + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots, \tag{6}$$

d. h. wir suchen $\varphi(x, y)$ in eine unendliche Reihe zu entwickeln, die nach den harmonischen Funktionen fortschreitet.

Über die Möglichkeit einer solchen Entwickelung können wir im allgemeinen nichts aussagen. Setzen wir aber diese

Möglichkeit voraus, so können wir aus (4) und (5), ebenso wie bei der Fourierschen Reihe, die Koeffizienten a, a_1, a_2 ... bestimmen. Es ergibt sich nämlich, wenn wir mit $u_h\,df$ multiplizieren und über S integrieren:

$$a_h = \int \varphi(x, y)\, u_h\, df. \tag{7}$$

Wenn wir aber jetzt annehmen, daß zu einem Werte k_h mehrere, etwa ν, linear unabhängige harmonische Funktionen u'_h, u''_h, $u^{(\nu)}_h$ gehören, so wird das eine Glied $a_h u_h$ der Reihe (6) durch den Komplex

$$a'_h u'_h + a''_h u''_h + \cdots a^{(\nu)}_h u^{(\nu)}_h$$

ersetzt. Setzen wir dann

$$\int u^{(\varrho)}_h u^{(\sigma)}_h\, df = w_{\varrho,\sigma}, \tag{8}$$

so wird im allgemeinen $w_{\varrho,\sigma}$ nicht verschwinden. Wir erhalten zur Bestimmung der Koeffizienten a'_h, a''_h, ... das System der linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\int \varphi(x, y)\, u'_h\, df &= a'_h w_{1,1} + a''_h w_{2,1} + \cdots + a^{(\nu)}_h w_{\nu,1},\\
\int \varphi(x, y)\, u''_h\, df &= a'_h w_{1,2} + a''_h w_{2,2} + \cdots + a^{(\nu)}_h w_{\nu,2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\int \varphi(x, y)\, u^{(\nu)}_h\, df &= a'_h w_{1,\nu} + a''_h w_{2,\nu} + \cdots + a^{(\nu)}_h w_{\nu,\nu}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Daß die Determinante dieses Systems

$$\Delta = \sum \pm\, w_{1,1}\, w_{2,2} \ldots w_{\nu,\nu}$$

nicht verschwinden kann, ergibt sich so: Wenn $\Delta = 0$ wäre, so könnte man die Konstanten c_1, c_2, ... c_ν so bestimmen, daß

$$c_1 w_{i,1} + c_2 w_{i,2} + \cdots c_\nu w_{i,\nu} = 0$$

wäre für $i = 1, 2 \ldots \nu$, und da $w_{i,k} = w_{k,i}$ ist, so erhält man hieraus durch Multiplikation mit c_i und Summation:

$$\sum^{i,k} w_{i,k}\, c_i\, c_k = 0$$

oder mit Rücksicht auf die Bedeutung (8) von $w_{i,k}$:

$$\int (\Sigma\, c_i u^{(i)}_h)^2\, df = 0.$$

Daraus aber würde folgen:

$$\sum c_i u_h^{(i)} = 0,$$

was der Annahme widerspricht, daß die u_h', u_h'', ... linear unabhängig sind.

Man kann aber auch die Repräsentanten

$$u_h', u_h'', \ldots u_h^{(\nu)}$$

der linearen Schar so auswählen, daß auch in diesem Falle das Integral $w_{\varrho,\sigma}$ verschwindet, wenn ϱ von σ verschieden ist.

§ 119.

Integralgleichungen und Eigenfunktionen.

Seit dem Erscheinen der vorigen Auflage dieses Werkes hat die mathematische Physik in der Theorie der Integralgleichungen ein neues kräftiges Hilfsmittel gewonnen. Unter den grundlegenden Arbeiten über den Gegenstand seien hier nur die von Fredholm (Acta mathematica, Bd. 27, 1903), und die erste bis sechste Mitteilung von Hilbert in den Göttinger Nachrichten (1904 bis 1906) erwähnt[1]). Hier soll nur in der Kürze auf die Beziehung dieser Theorie zu der Theorie der schwingenden Membran hingewiesen werden. Während aber in der Literatur meist nur Funktionen einer Variablen betrachtet werden, kommt es uns hier besonders auf Funktionen zweier Variablen an, auf die sich die Hilbertschen Untersuchungen übrigens auch beziehen. (Vgl. besonders die zweite Mitteilung.)

Um zunächst die zu brauchenden Ausdrücke zu erklären, sei df wie in § 110 ein Element eines ebenen Flächenstückes S, und ds ein Element der Begrenzung; ferner dn ein Element der nach innen positiv genommenen Normalen. Es seien p, q zwei Punkte im Innern von S, und $K(p, q)$ eine gegebene, in jedem einzelnen Fall besonders zu definierende Funktion der beiden Punkte, die der Kern der Integralgleichung genannt wird.

---

[1]) Aus der bereits ziemlich umfangreich gewordenen Literatur dieses Gegenstandes ist noch das vor kurzem erschienene Werk von Kneser hervorzuheben: „Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik" (Braunschweig, Friedr. Vieweg u. Sohn 1911), das dem Gegenstande dieses Werkes besonders nahe steht.

Die Aufgabe der Integralgleichungen erster Art ist, eine Funktion $\varphi(p)$ des Punktes p so zu bestimmen, daß

I. $$f(q) = \int K(p, q)\, \varphi(p)\, d f_p$$

wird, worin $f(q)$ eine gegebene Funktion ist.

Eine Integralgleichung zweiter Art ist

II. $$f(q) = \varphi(q) - \lambda \int K(p, q)\, \varphi(p)\, d f_p,$$

in der wiederum φ als die gesuchte Funktion gilt, während λ eine gegebene Konstante ist.

Die Integralgleichung zweiter Art, in der $f(q) = 0$ ist:

(1) $$0 = \varphi(q) - \lambda \int K(p, q)\, \varphi(p)\, d f_p$$

hat die evidente Lösung $\varphi = 0$ und hat für ein beliebiges λ keine andere Lösung. Es gibt aber besondere Werte von λ, in denen die Gleichung (1) auch noch Lösungen hat, die von Null verschieden sind.

III. Diese besonderen Werte heißen die zu dem Kern $K(p, q)$ gehörigen Eigenwerte der Fläche S, und die entsprechenden Lösungen von (1) die Eigenfunktionen.

Auf diese Probleme soll nun die Theorie der schwingenden Membran zurückgeführt werden.

§ 120.

Integralgleichungen und schwingende Membran.

Wenn u und w zwei stetige Funktionen des Punktes p sind, so ist nach § 111 (3):

(1) $$\int (w \varDelta u - u \varDelta w)\, d f_p = - \int \left(w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) d s.$$

Es hänge nun w noch von einem Parameterpunkt q ab, in dem es unendlich werde, und zwar so, daß im Punkte q

(2) $$w = - \frac{1}{2\pi} \log r + \text{funct. cont},$$

worin $r = (p, q)$ die Entfernung der beiden Punkte, und funct. cont eine in der Umgebung des Punktes q reguläre Funktion von p ist. Um die Formel (1) anzuwenden, umgeben wir den Punkt q

mit einer kreisförmigen Hülle vom Radius ϱ, und schließen ihn dadurch von dem Gebiet S aus. Lassen wir dann die Hülle unendlich klein werden, so ergibt sich, wenn $\varrho \Delta w$ und ϱw in q nicht unendlich werden, ebenso wie oben die Formel § 113 (9) abgeleitet wurde:

$$(3) \qquad u_q = \int (w \Delta u - u \Delta w)\, d f_p + \int \left(w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) d s,$$

und wenn wir an der Grenze von S

$$(4) \qquad u = 0, \qquad w = 0$$

annehmen:

$$(5) \qquad u_q = \int (w \Delta u - u \Delta w)\, d f_p.$$

Es werde nun weiter angenommen, daß w der Differentialgleichung

$$(6) \qquad \Delta w + k^2 w = 0$$

genügt. Wegen (2) ist w eine Funktion der beiden Punkte p, q, die wir mit $G(p, q)$ bezeichnen wollen. Nach Hilbert heißt sie die Greensche Funktion für die Differentialgleichung (6) und das Gebiet S. Man erhält eine solche Funktion nach § 113 (4) etwa so:

$$(7) \qquad w = \tfrac{1}{4} K(k r) - v,$$

wenn K die Besselsche Funktion zweiter Art und v eine in S stetige Lösung von

$$\Delta v + k^2 v = 0$$

bedeutet, die am Rande mit $\frac{1}{4} K(k r)$ übereinstimmt.

Es genüge ferner u der Differentialgleichung

$$(8) \qquad \Delta u + h^2 u = 0,$$

worin h wieder ein konstanter Parameter ist. Dann ist nach (6) und (8):

$$w \Delta u - u \Delta w = (k^2 - h^2)\, u w,$$

und wir erhalten aus (5), wenn $w = G(p, q)$ gesetzt wird:

$$(9) \qquad u_q = (k^2 - h^2) \int G(p, q)\, u_p\, d f_p.$$

Nehmen wir $G(p, q)$ als Kern einer Integralgleichung, so ergibt sich aus § 119, III., daß

$$(10) \qquad k^2 - h^2 = \lambda_\nu$$

die Eigenwerte der Fläche S sein müssen, und u_ν die entsprechenden Eigenfunktionen, die nach (4) und (8) zugleich die harmonischen Funktionen dieser Fläche sind (§ 115).

Die Konstante k^2 kann beliebig, z. B. auch $= 0$, genommen werden, wodurch $G(p, q)$ in die gewöhnliche Greensche Funktion übergeht.

Behalten wir den Kern $w = G(p, q)$ bei, und lassen die Differentialgleichung (6) und die Randbedingung (4) fortbestehen, und setzen für ein sonst beliebiges u:

$$(11) \qquad \Delta u + k^2 u = v,$$

so ergibt sich aus (6) und (11):

$$(12) \qquad w \Delta u - u \Delta w = v w = v G(p, q),$$

also nach (5):

$$(13) \qquad u_q = \int G(p, q) v_p \, d f_p,$$

und wenn u eine gegebene Funktion ist, so haben wir hier eine Integralgleichung erster Art für v, die durch (11) gelöst wird.

§ 121.

Integralgleichungen erster Art.

Wir betrachten jetzt zwei Funktionen zweier Punkte $G_1(p, q_1)$, $G_2(p, q_2)$, die als Funktionen von p am Rande von S verschwinden, von denen wir voraussetzen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} G_1(p, q_1) &= -\frac{1}{2\pi} \log r_1 + \text{funct. cont} \\ G_2(p, q_2) &= -\frac{1}{2\pi} \log r_2 + \text{funct. cont}, \end{aligned}$$

wenn $r_1 = (p, q_1)$, $r_2 = (p, q_2)$ wie in § 120 (2) die Entfernung der Punkte pq_1 und pq_2 bedeuten. Setzen wir diese Funktionen in § 120 (1) für w und u, so ergibt sich wie dort, indem wir jetzt die beiden Punkte q_1, q_2 mit kreisförmigen Hüllen umgeben:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\int (G_1 \Delta G_2 - G_2 \Delta G_1) \, d f_p \\ &= -\int G_1(p, q_1) \frac{\partial G_2}{\partial r} d s_2 + \int G_2(p, q_2) \frac{\partial G_1}{\partial r} d s_1. \end{aligned}$$

Hierin ist, wenn ϱ_1, ϱ_2 die Radien der Hüllen sind,

$$d s_1 = \varrho_1 \, d\varphi, \quad d s_2 = \varrho_2 \, d\varphi$$

zu setzen und nach $d\varphi$ von 0 bis 2π zu integrieren.

Nach (1) ist ferner zu setzen:

$$\frac{\partial G_1}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi \varrho_1}, \quad \frac{\partial G_2}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi \varrho_2},$$

und man findet, wenn man ϱ_1, ϱ_2 unendlich klein werden läßt:

$$(3) \quad \int (G_1 \Delta G_2 - G_2 \Delta G_1)\, d f_p = G_1(q_2, q_1) - G_2(q_1, q_2).$$

Nimmt man ferner an, es sei

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta G_1 + k_1^2 G_1 &= 0 \\ \Delta G_2 + k_2^2 G_2 &= 0, \end{aligned}$$

so sind G_1, G_2 Greensche Funktionen des Gebietes S für diese Differentialgleichungen, und es ergibt sich aus (3):

$$(5) \quad (k_1^2 - k_2^2) \int G_1(p, q_1)\, G_2(p, q_2)\, d f_p = G_1(q_2, q_1) - G_2(q_1, q_2).$$

Hieraus folgt zunächst, indem man $k_1 = k_2 = k$ setzt, daß die Greensche Funktion $G(p, q)$ eine symmetrische Funktion der beiden Punkte p, q ist.

Es ist also für jede Greensche Funktion $G(p, q)$

$$(6) \quad G(p, q) = G(q, p).$$

Setzen wir in (5) zur Abkürzung

$$k_1^2 - k_2^2 = \lambda,$$

so folgt:

$$(7) \quad \lambda \int G_1(p, q_1)\, G_2(p, q_2)\, d f_p = G_1(q_1, q_2) - G_2(q_1, q_2),$$

und wenn wir nun eine Integralgleichung zweiter Art zu lösen haben:

$$(8) \quad u_p = v_p + \lambda \int G_1(p, q)\, v_q\, d f_q,$$

in der u die gegebene, v die gesuchte Funktion ist, so multiplizieren wir, indem wir mit r einen dritten Punkt bezeichnen, mit $G_2(p, r)\, d f_p$, und integrieren über die ganze Fläche S. Dann ergibt sich:

$$\int u_p G_2(p, r)\, d f_p = \int v_p G_2(p, r)\, d f_p + \lambda \int\!\!\int G_1(p, q)\, G_2(p, r)\, v_q\, d f_p\, d f_q,$$

und durch Vertauschung der Integrationen nach $d f_p$, $d f_q$ wegen (7), indem statt r wieder q geschrieben wird:

$$(9) \quad \int u_q G_2(p, q)\, d f_q = \int v_q G_1(p, q)\, d f_q.$$

Also ergibt sich die Lösung der Integralgleichung (8):

$$(10) \quad v_p = u_p - \lambda \int G_2(p, q)\, u_q\, d f_q.$$

Fassen wir zusammen, was in den letzten Paragraphen bewiesen ist, so ergeben sich folgende Theoreme:

Wir nehmen für die Differentialgleichung

$$\Delta w + k^2 w = 0 \tag{11}$$

bei beliebigem k eine zu dem Gebiet S gehörige Greensche Funktion $G(p, q)$ als Kern von Integralgleichungen.

1. Es seien λ_ν die Eigenwerte und u_ν die Eigenfunktionen, die zu dem Kern gehören, d. h. die Werte λ für die die Gleichung
$$u_q = \lambda \int G(p, q)\, u_p\, d f_p$$
nicht verschwindende Lösungen u_ν hat. Dann sind diese Funktionen die harmonischen Funktionen des Gebietes S, die der Differentialgleichung
$$\Delta u + (k^2 - \lambda_\nu) u = 0$$
genügen.

2. Eine Integralgleichung erster Art
$$u_q = \int G(p, q)\, v_p\, d f_p$$
wird gelöst durch den Ausdruck
$$v = \Delta u + k^2 u.$$

3. Sind $G_1(p, q)$, $G_2(p, q)$ zwei zu dem Werte k_1 und k_2 von k gehörige Greensche Funktionen für das Gebiet S und $\lambda = k_1^2 - k_2^2$, so wird die Integralgleichung zweiter Art
$$u_p = v_p + \lambda \int G_1(p, q)\, v_q\, d f_q$$
gelöst durch
$$v_p = u_p - \lambda \int G_2(p, q)\, u_q\, d f_q.$$

§ 122.

Erzwungene Schwingungen der Membran.

Die Theorie der Membranschwingungen und die Anwendung der Integralgleichungen läßt eine Verallgemeinerung zu. Denken wir uns, daß an jeder Stelle der Membran eine gegebene, von Ort und Zeit abhängige Kraft wirkt, die wir mit $F(x, y, t)$ bezeichnen, die auch an einem Teil der Membran gleich Null sein kann, so werden die Schwingungen von dieser Kraft abhängig sein, und werden sich von den freien Schwingungen der Membran unterscheiden.

Man kann auch durch einen Grenzübergang erreichen, daß diese Kraft nur in einzelnen Punkten oder Linien von Null verschieden sei, muß dann aber die Größe der Kraft, wenn sie überhaupt einen Einfluß haben soll, mit verschwindendem Flächeninhalt ihrer Angriffsstelle unendlich groß werden lassen.

An Stelle der Differentialgleichung (6) § 97 tritt jetzt:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + F(x, y, t). \tag{1}$$

Wir nehmen an, die Funktion F habe einen periodischen Charakter, so daß sie sich durch eine Summe

$$F = \sum^{k} c^2 F_\lambda e^{i\lambda c t} \tag{2}$$

darstellen lasse, worin die λ irgend eine Reihe von Zahlenwerten durchläuft und die F_λ von t unabhängig, also gegebene Funktionen von x, y sind. Setzen wir, um (1) zu integrieren,

$$w = \sum w_\lambda e^{i\lambda c t},$$

und nehmen an, daß auch w_λ von t unabhängig sei, so ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial y^2} + \lambda^2 w_\lambda + F_\lambda = 0 \tag{3}$$

oder:

$$\Delta w_\lambda + \lambda^2 w_\lambda + F_\lambda = 0. \tag{4}$$

Wir setzen also die Schwingung w aus einer Reihe einfacher Schwingungen von der Schwingungsdauer $P = 2\pi/\lambda$ zusammen. Ist, wie wir hier annehmen wollen, die Membran am Rande von S festgeklemmt, so haben wir die Randbedingung

$$\overline{w} = 0. \tag{5}$$

Der erste Weg, um zu einer Lösung der Differentialgleichung (3) zu gelangen, geht von folgendem Gedanken aus:

Man entwickelt die Funktionen F_λ und w_λ nach § 118 nach den harmonischen Funktionen u_k des Gebietes S in der Form:

$$(6)\qquad w_\lambda = \sum^k a_k u_k$$

$$(7)\qquad F_\lambda = \sum^k b_k u_k,$$

wenn die b_k als gegeben, a_k als gesucht zu betrachten sind. Die u_k genügen den Differentialgleichungen

$$(8)\qquad \Delta u_k + k^2 u_k = 0,$$

und demnach ergibt sich:

$$(9)\qquad \Delta w_\lambda + \lambda^2 w_\lambda = \sum (\lambda^2 - k^2)\, a_k u_k,$$

und die Vergleichung mit (7) ergibt nach (4):

$$(10)\qquad a_k = \frac{-b_k}{\lambda^2 - k^2}.$$

Diese Formel ist nicht anwendbar, wenn λ gleich einem der Eigenwerte k wird, ohne daß b_k verschwindet, weil dann a_k unendlich würde. Dieser Fall entspricht der Erregung der Membran durch eine Schwingung, die zu einem der Eigentöne harmonisch ist.

Ein anderer Weg zur Lösung des Problems durch die Greensche Funktion ist in den Formeln § 120 enthalten. Danach ist, wenn u eine stetige Funktion in S und w eine Funktion bedeutet, die in einem Punkt q die durch die Formel § 120 (2) ausgedrückte Unstetigkeit besitzt, nach § 120 (3):

$$(11)\qquad u_q = \int (w \Delta u - u \Delta w)\, d f_p + \int \left(w \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) d s.$$

Nehmen wir weiter an, daß u und w den Differentialgleichungen

$$(12)\qquad \Delta w + \lambda^2 w = 0,$$

$$(13)\qquad \Delta u + \lambda^2 u = v,$$

genügen, worin v eine gegebene Ortsfunktion in S ist, und w am Rande verschwindet, so ist w die Greensche Funktion

$$(14)\qquad w = G(p, q),$$

und aus (12) und (13) ergibt sich:

$$w \Delta u - u \Delta w = v w,$$

also nach (11):

$$u_q = \int v w \, d f_p - \int u \frac{\partial w}{\partial n} \, d s_p$$

oder:

$$(15) \qquad u_q = \int v_p\, G(p, q)\, d f_p - \int u_p \frac{\partial G(p, q)}{\partial n}\, d s_p.$$

Ist also die Greensche Funktion G bekannt und v_p in der Fläche S und u_p am Rande von S gegeben, so ist hierdurch eine der Bedingung (13) genügende stetige Funktion u_p bestimmt. Dies aber ist, wenn wir $v = -F_\lambda$ und u am Rande $= 0$ setzen, die Differentialgleichung (3) der erzwungenen Schwingungen[1]).

[1]) Arthur Korn: Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig und Berlin 1910.

A. Sommerfeld: Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung für ein beliebiges Gebiet. Vortrag in der mathematischen Sektion der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte. Königsberg 1910.

VIERTES BUCH

ELEKTRISCHE SCHWINGUNGEN

Fünfzehnter Abschnitt.

Elektrische Wellen.

§ 123.

Die Maxwellschen Gleichungen.

Die **Maxwell**schen elektromagnetischen Grundgleichungen, die wir im achtzehnten Abschnitt des ersten Bandes besprochen haben, erheben den Anspruch, daß aus ihnen alle Erscheinungen nicht nur aus dem Gebiete der Elektrizität und des Magnetismus, sondern auch die Lichterscheinungen abgeleitet werden können, und das durch die berühmten **Hertz**schen Versuche eröffnete Gebiet der elektrischen Schwingungen stellt auch erfahrungsmäßig eine Verbindung zwischen diesen beiden Erscheinungsgebieten her. Ohne die allgemeinen Grundlagen dieser großen Theorie anzugreifen, muß aber doch hervorgehoben werden, daß manche von den Voraussetzungen im einzelnen hypothetisch oder tatsächlich unrichtig und nur Annäherungen sind, und daß manches auch, namentlich in bezug auf die Grenzbedingungen, noch dunkel ist. Bei der großen Bedeutung, die diese Gleichungen für unsere ganze physische Weltanschauung haben, ist es eine Hauptaufgabe der mathematischen Physik, ihre Integration möglichst zu fördern, und die Gesetze der Erscheinungen daraus abzuleiten. Einige dieser Probleme sollen im folgenden besprochen werden.

Wir haben im § 163 des ersten Bandes das elektromagnetische Grundgesetz durch zwei Vektorgleichungen ausgedrückt:

$$\text{I.} \qquad c \operatorname{curl} \mathfrak{M} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda\mathfrak{E},$$

$$\text{II.} \qquad c \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -\mu \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}.$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{E}$ den elektrischen, $\mathfrak{M}$ den magnetischen Kraftvektor, c die Lichtgeschwindigkeit, λ die Leitfähigkeit, ε die Dielektrizitätskonstante, μ die Permeabilität. Die Größen $c, \lambda, \varepsilon, \mu$ sehen wir jetzt als konstant an.

Aus I. folgt [Bd. I, § 169 (1)]

$$\varepsilon \frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{E}}{\partial t} + 4 \pi \lambda \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0,$$

und daraus ergibt sich, daß die Gleichung

$$\text{III.} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$$

für alle Zeit befriedigt ist, wenn wir sie, wie wir jetzt tun wollen, am Anfang als erfüllt voraussetzen. Diese Bedingung besagt, daß nirgends im Felde Elektrizität mit räumlicher Dichtigkeit vorhanden ist.

Ebenso besteht nach II. im ganzen Felde die Gleichung

$$\text{IV.} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{M} = 0.$$

Aus I. und II. können wir nun leicht den Vektor $\mathfrak{M}$ eliminieren, wenn wir I. nach t differentiieren, und dann II. benutzen. So erhalten wir:

$$(1) \qquad -c^2 \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + 4 \pi \lambda \mu \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Um hieraus explizite Gleichungen herzuleiten, bilden wir die x-Komponente von curl curl $\mathfrak{E}$. Diese ist (Bd. I, § 93):

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right),$$

und wenn wir hierzu $\partial^2 E_x / \partial x^2$ addieren und subtrahieren, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathfrak{E} - \Delta E_x.$$

Wir erhalten also aus (1) mit Rücksicht auf III. die drei Gleichungen:

$$(2) \qquad c^2 \Delta E_x = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 4 \pi \lambda \mu \frac{\partial E_x}{\partial t},$$

$$(3) \qquad c^2 \Delta E_y = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} + 4 \pi \lambda \mu \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

$$(4) \qquad c^2 \Delta E_z = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + 4 \pi \lambda \mu \frac{\partial E}{\partial t},$$

wozu noch aus III. kommt:

$$(5) \qquad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

Hat man aus diesen Gleichungen den Vektor $\mathfrak{E}$ ermittelt, so erhält man aus II. die Komponenten von $\mathfrak{M}$ durch Quadraturen in bezug auf die Zeit, und die Integrationskonstanten, die Funktionen des Ortes sind, werden durch die Anfangswerte von M_x, M_y, M_z bestimmt. Sind die Anfangswerte von E_x, E_y, E_z, M_x, M_y, M_z gegeben, so erhalten wir aus I. die Anfangswerte von $\partial E_x/\partial t$, $\partial E_y/\partial t$, $\partial E_z/\partial t$, und aus Bd. I, § 167 folgt, daß die Lösungen von (2), (3), (4) eindeutig bestimmt sind, wenn die Anfangswerte im ganzen Raume gegeben sind. Erfüllen diese Anfangswerte die Bedingung (5) und die durch Differentiation nach t daraus hervorgegangene Gleichung, so bleibt diese Gleichung für alle Zeit erfüllt, und braucht nicht weiter berücksichtigt zu werden. Hiernach erfordert die Lösung des Problems die Integration der Differentialgleichung

$$(6) \qquad c^2 \Delta U = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial U}{\partial t}$$

mit den Nebenbedingungen, daß U und $\partial U/\partial t$ für $t = 0$ in gegebene Funktionen des Ortes übergehen.

In dem besonderen Falle, daß U nur von einer Koordinate x abhängt, nimmt die Gleichung (6) die einfachere Gestalt an:

$$(7) \qquad c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu \frac{\partial U}{\partial t},$$

und stellt die Fortpflanzung einer ebenen Welle in einem absorbierenden Medium dar. Das in diesen Gleichungen auftretende Glied $4\pi\lambda\mu\,\partial U/\partial t$ bedingt, wenn λ von Null verschieden ist, einen Energieverlust und stellt eine Absorption oder Dämpfung dar.

§ 124.

Die Wellengleichung.

Wir betrachten jetzt den Vorgang im freien Äther, und setzen demnach $\varepsilon = \mu = 1$, $\lambda = 0$. Dann nimmt die Gleichung (6) des vorigen Paragraphen die einfachere Gestalt an:

$$(1) \qquad c^2 \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

U soll mit seinen ersten Differentialquotienten stetig sein, und es sind noch die Nebenbedingungen zu erfüllen:

$$
\left.\begin{aligned}
&(2) \qquad U = f(x, y, z) \\
&(3) \qquad \frac{\partial U}{\partial t} = F(x, y, z)
\end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0;
$$

wir nehmen f und F als im ganzen Raume gegebene Funktionen des Ortes an, suchen also die Ausbreitung einer ursprünglichen Gleichgewichtsstörung, die sich möglicherweise auch auf einen endlichen Raumteil beschränken kann, ohne Berücksichtigung von sonstigen Grenzbedingungen.

Die Lösung dieser Aufgabe läßt sich allgemein in folgender Weise durchführen:

Wir nehmen irgend einen Punkt p mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 im Raume und führen um diesen Punkt als Mittelpunkt Polarkoordinaten ein, indem wir

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
x - x_1 &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\
y - y_1 &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\
z - z_1 &= r \cos\vartheta
\end{aligned}
$$

setzen. Dann erhalten wir nach Band I, § 42 (11):

$$
(5) \qquad \Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 r U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.
$$

Wenn wir diesen Ausdruck mit dem Oberflächenelement einer Kugel vom Radius r

$$
do = r^2 d\omega = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi
$$

multiplizieren, über die ganze Kugel integrieren und

$$
(6) \qquad \Omega(r) = \frac{r}{4\pi}\int U d\omega
$$

setzen, so ergibt sich, da

$$
\int_0^\pi \frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} d\varphi = 0
$$

ist:

$$
\begin{aligned}
\frac{r^2}{4\pi}\int \Delta U d\omega &= r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2}, \\
\frac{r^2}{4\pi}\int \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} d\omega &= r\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2},
\end{aligned}
$$

und folglich aus (1):

$$
(7) \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2},
$$

eine Gleichung, die der Form nach mit der der schwingenden Saite übereinstimmt.

Setzen wir noch

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{r}{4\pi}\int f(x,y,z)\,d\omega &= \varphi(r), \\ \frac{r}{4\pi}\int F(x,y,z)\,d\omega &= \Phi(r), \end{aligned}$$

so sind $\varphi(r)$, $\Phi(r)$ Funktionen von r, die zugleich mit f und F gegeben sind, aber nur für positive Werte von r, und wir erhalten nach (2) und (3) für Ω die Nebenbedingungen:

$$(9)\qquad \Omega = \varphi(r), \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \Phi(r) \quad \text{für } t = 0, \quad r > 0.$$

Dazu kommt noch aus (6) die Bedingung

$$(10)\qquad \Omega = 0 \qquad \text{für } r = 0.$$

Die Bedingungen für die Funktion Ω hängen aber auch noch von den Koordinaten x_1, y_1, z_1 ab, und wenn man Ω als bekannt annimmt, so erhält man aus (6):

$$(11)\qquad U(x_1, y_1, z_1) = \operatorname*{Lim}_{r=0} \frac{\Omega(r)}{r}.$$

Die Integration der Differentialgleichung (7) mit den Nebenbedingungen (9), (10) haben wir im § 86 allgemein durchgeführt. Es ergibt sich nach der dort angewandten Methode, wenn $\varphi(r)$ und $\Phi(r)$ für negative Argumentwerte durch die Gleichungen

$$(12)\qquad \varphi(-r) = -\varphi(r), \qquad \Phi(-r) = -\Phi(r)$$

definiert werden,

$$(13)\qquad \Omega = \tfrac{1}{2}[\varphi(r+ct) + \varphi(r-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct} \Phi(r)\,dr,$$

und die Anwendung von (11) ergibt mit Rücksicht auf (12):

$$(14)\qquad U(x_1, y_1, z_1) = \varphi'(ct) + \frac{1}{c}\Phi(ct),$$

wenn $\varphi'(r)$ den Differentialquotienten von $\varphi(r)$ bedeutet[1]). Ausführlicher dargestellt ist nach (4) und (8)

[1]) Die Wellengleichung tritt auch in der Theorie der Luftschwingungen von unendlich kleiner Amplitude auf. Die Lösung des Problems, wie sie in (14) enthalten ist, wurde zuerst von Poisson gegeben (Mém. de l'institut, Bd. III; „Mém. sur la théorie du son", Journ. de l'École Polytechn. VII, 1807). Auf anderem Wege ist sie von Riemann in den „Vorlesungen" (3. Aufl., S. 300), von Kirchhoff [Vorlesungen über Mechanik, S. 317 (1876)] und von Liouville (Journ. de Math. 1856) abgeleitet.

$$(15) \qquad \frac{1}{c}\Phi(ct) =$$

$$\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, F(x_1 + ct\sin\vartheta\cos\varphi, y_1 + ct\sin\vartheta\sin\varphi, z_1 + ct\cos\vartheta),$$

$$(16) \qquad 4\pi\varphi'(ct) =$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[t\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, f(x_1 + ct\sin\vartheta\cos\varphi, y_1 + ct\sin\vartheta\sin\varphi, z_1 + ct\cos\vartheta)\right].$$

Der Ausdruck (14) für U setzt sich hiernach aus zwei Teilen zusammen, die durch (15) und (16) dargestellt sind. Bezeichnen wir zur besseren Übersicht mit ξ, η, ζ die Kosinus der Winkel, die eine vom Punkt p auslaufende variable Richtung mit den Achsen einschließt und lassen bei der Bezeichnung der Koordinaten des Punktes p den Index 1, der jetzt nicht mehr nötig ist, wieder weg, so können wir die beiden Bestandteile von U so darstellen:

$$(17) \qquad U_1 = \frac{t}{4\pi}\int F(x + ct\xi,\ y + ct\eta,\ z + ct\zeta)\, d\omega$$

$$(18) \qquad U_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[t\int f(x + ct\xi,\ y + ct\eta,\ z + ct\zeta)\right] d\omega,$$

worin dann $d\omega$ das Flächenelement der Einheitskugel bedeutet, und die Integration über die ganze Einheitskugel zu erstrecken ist.

> Es ist also der Zustand U im Punkte p in einem Augenblicke t nur abhängig von dem Mittelwert, den die Funktionen F, f und die Differentialquotienten von f auf einer um p mit dem Radius ct beschriebenen Kugelfläche haben.

Nehmen wir z. B. an, es haben die Funktionen f, F nur in einem endlichen Gebiete, das wir das Erschütterungsgebiet nennen wollen, von Null verschiedene Werte und bezeichnen mit r' und r'' die kleinste und größte Entfernung des Punktes p, den wir außerhalb des Erschütterungsgebietes annehmen wollen, von diesem Gebiete, so ist U nur solange von Null verschieden, als

$$r' < ct < r''$$

ist; es ist also dieser Punkt nur in dem Zeitraum von $t' = r'/c$ bis $t'' = r''/c$ im Gleichgewicht gestört, und man kann sich also vorstellen, daß über den Punkt p in der Zeit t' bis t'' eine Welle hinweggeht, und nach dieser Zeit befindet sich der Punkt p wieder in seinem ursprünglichen Zustande.

Gehört der Punkt p dem ursprünglichen Erschütterungsgebiet an, und ist r'' die größte Entfernung von p von der Grenze des Erschütterungsgebietes, so wird er in der Zeit $t'' = r''/c$ in die Ruhelage zurückgekehrt sein. Ist also das anfängliche Erschütterungsgebiet ein einfach zusammenhängender Raum, so wird sich nach Verlauf einer gewissen Zeit eine schalenförmige Welle bilden, die sich mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Den Punkt, in dem zuerst wieder Ruhe eintritt, und den Zeitpunkt, wann dies geschieht, erhält man, wenn man den Punkt aufsucht, in dem die größte Entfernung r'' von der Grenze des Erschütterungsgebietes einen möglichst kleinen Wert hat. Ist z. B. das ursprüngliche Erschütterungsgebiet eine Kugel mit dem Radius a, so wird die vordere Grenze der Erschütterung mit der Geschwindigkeit c fortschreiten. Die schalenförmige Welle wird im Mittelpunkt beginnen und zwar zu der Zeit $t = a/c$. Die Dicke der Schale ist konstant $= 2a$.

Um in allgemeineren Fällen die Grenze des Erschütterungsgebietes in einem bestimmten Augenblicke t zu finden, hat man zu der Grenze des ursprünglichen Gebietes Parallelflächen zu konstruiren, indem man auf der Normale nach beiden Seiten die Strecke ct aufträgt.

§ 125.

Die Differentialgleichung für die gedämpfte Welle.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Integration der allgemeineren Gleichung (6), § 123, die wir so darstellen:

$$c^2 \Delta U = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{1}$$

Sie geht in jene Form über, wenn wir $\alpha^2 = \varepsilon\mu$, $\beta = 2\pi\lambda\mu$ setzen; wir wollen c^2, α^2, β hier als positive Konstanten betrachten, und wenn wir daran festhalten, daß c eine Geschwindigkeit sei, so ist α eine Zahl, β eine reziproke Zeit. Diese Gleichung wäre für die Fortpflanzung des Lichtes in einem absorbierenden Medium anzuwenden, in dem die Absorption durch den Koeffizienten β gemessen wird. Auch die Elektrizitätsbewegung in Leitern wird durch diese Gleichung bestimmt. Setzt man $\alpha = 1$, $\beta = 0$, so erhält man die Wellengleichung, die wir im vorigen Paragraphen behandelt haben. Für $\alpha = 0$ erhalten wir die Gleichung für die Wärmeleitung (§ 33).

Wir betrachten zunächst den speziellen Fall [§ 123 (7)], daß die Funktion U nur von einer räumlichen Koordinate x abhängig ist, die Gleichung (1) also die Form annimmt:

$$c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{2}$$

Diese Gleichung gilt für die Fortpflanzung ebener Wellen in einem unbegrenzten Medium. Sie gilt auch, wie wir später noch genauer begründen werden, unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen für die Bewegung der Elektrizität in Drähten und wird aus diesem Grunde auch die Telegraphengleichung genannt.

Die Gleichung (2) wird auf eine etwas einfachere Form gebracht durch die Substitution

$$U = e^{-\frac{\beta t}{\alpha^2}} u. \tag{3}$$

Es ist dann

$$\frac{\partial U}{\partial t} = e^{-\frac{\beta t}{\alpha^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\beta}{\alpha^2} u \right),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = e^{-\frac{\beta t}{\alpha^2}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2\beta}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\beta^2}{\alpha^4} u \right),$$

und wir erhalten aus (2):

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2} u, \tag{4}$$

oder wenn man

$$\frac{\alpha c}{\beta} x \text{ für } x, \qquad \frac{\alpha^2}{\beta} y \text{ für } t \tag{5}$$

setzt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung läßt sich in ähnlicher Weise wie die Differentialgleichung der schwingenden Saite durch Anwendung der Riemannschen Methode integrieren.

Die einfachste Annahme über die Nebenbedingungen wäre die, daß U und $\partial U / \partial t$ für $t = 0$ in Funktionen von x übergehen, die für alle Werte der Variablen gegeben sind. Dasselbe gilt dann auch für u und $\partial u / \partial y$ für $y = 0$. Es können aber auch, ähnlich wie bei der schwingenden Saite, noch Grenzbedingungen dazu kommen. Wir wollen zunächst, wie in § 90, die Annahme machen, daß an einer nicht geschlossenen Linie c der xy-Ebene die Funktion u und ihr nach der Normale von c genommener Differentialquotient $\partial u/\partial n$ gegeben sei. Es sind damit zugleich die beiden partiellen Ableitungen $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ an der Kurve c gegeben. Wenn wir eine partikulare Lösung v der Gleichung (6) annehmen, also

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v = 0 \tag{7}$$

setzen, so ergibt sich:

$$v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) =$$

$$\frac{\partial\left(v\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - u\,\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(v\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - u\,\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} = 0$$

und daraus durch Anwendung des Gaußschen Satzes:

$$\int\left[\left(v\,\frac{\partial u}{\partial x} - u\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \left(v\,\frac{\partial u}{\partial y} - u\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\right] = 0, \tag{8}$$

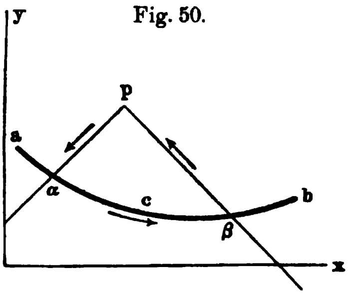
über die Begrenzung eines Gebietes, in dem u, v stetige Funktionen mit stetigen Derivierten sind.

Um ein passendes Gebiet abzugrenzen, nehmen wir, wie im § 90, den Punkt p mit den Koordinaten x_1, y_1, für den die Funktion u bestimmt werden soll, und ziehen von ihm aus die Geraden

$$\begin{aligned} x - y &= x_1 - y_1, \\ x + y &= x_1 + y_1 \end{aligned} \tag{9}$$

bis zum Schnitt α, β, mit der Kurve c. Auf die Begrenzung des dreieckigen Gebietes (α, β, p) (Fig. 50) wenden wir die Integralformel (8) an.

Fig. 50.



Nun ist $dx = dy$ auf der Linie (α, p) und $dx = -dy$ auf der Linie (β, p), und das Integral (8) zerfällt also in drei Teile, von denen der erste über die Kurve c erstreckt ist:

$$
(10) \quad \begin{aligned}
&\int\limits_c \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\right] \\
&- \int\limits_\alpha^p (v\,du - u\,dv) - \int\limits_\beta^p (v\,du - u\,dv) = 0.
\end{aligned}
$$

Wenn es gelingt, die partikulare Lösung v so zu bestimmen, daß an den Linien (9) $v = 1$ ist, so ist an diesen Linien $dv = 0$ und aus (10) folgt:

$$
(11) \quad \begin{aligned}
&2u_p = u_\alpha + u_\beta \\
&+ \int\limits_c \left[\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy + \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\right],
\end{aligned}
$$

wodurch u_p, d. h. der Wert der Funktion u in dem Punkte x_1, y_1 durch bekannte Größen ausgedrückt ist.

§ 126.

Bestimmung der partikularen Lösung v.

Die Anwendung der Formel (11) des vorigen Paragraphen setzt die Kenntnis einer Funktion v voraus, die den Bedingungen genügt:

$$
(1) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v = 0,
$$

die an den beiden Geraden

$$
(2) \quad (x - x_1) - (y - y_1) = 0, \quad (x - x_1) + (y - y_1) = 0
$$

den konstanten Wert 1 hat, und in dem zwischen diesen Geraden enthaltenen Winkelraum ($\alpha p \beta$) (Fig. 50) mit den ersten Derivierten endlich und stetig ist. Diese Bedingungen sind wesentlich einfacher als die für die Funktion u, da sie nichts mehr von der Kurve c und nichts von den an dieser Kurve willkürlich gegebenen Bedingungen für u enthalten.

Um die Funktion v zu bestimmen, bemerken wir, daß die Funktion

$$
(3) \qquad z = \sqrt{(y - y_1)^2 - (x - x_1)^2}
$$

an beiden Linien (2) verschwindet, und in dem Gebiete, in dem v zu bestimmen ist, reelle Werte hat, weil hier

$$
(y - y_1) - (x - x_1) \text{ und } (y - y_1) + (x - x_1)
$$

beide negativ sind. Wir wollen versuchen, die Gleichung (1) unter der Voraussetzung zu integrieren, daß v eine Funktion von z allein sei. Es ergibt sich bei dieser Annahme:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{dv}{dz}\frac{x - x_1}{z}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dv}{dz}\frac{y - y_1}{z},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}}{dz}\frac{(x - x_1)^2}{z} - \frac{1}{z}\frac{dv}{dz},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{d\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}}{dz}\frac{(y - y_1)^2}{z} + \frac{1}{z}\frac{dv}{dz},$$

und hiernach geht (1) in die Differentialgleichung mit der einen unabhängigen Variablen z über:

$$-z\frac{d\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}}{dz} - \frac{2}{z}\frac{dv}{dz} + v = 0,$$

oder

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} - v = 0, \tag{4}$$

und dies ist die Differentialgleichung für die Besselsche Funktion der Ordnung 0 und vom rein imaginären Argument iz [Bd. I, § 71 (4), § 72 (13)]:

$$v = J(iz) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2.4^2} + \frac{z^6}{2^2.4^2.6^2} + \cdots, \tag{5}$$

die, wie von der Funktion v verlangt wurde, für $z = 0$ in den Wert 1 übergeht.

§ 127.

Gegebener Anfangszustand im unbegrenzten Mittel.

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, daß der Anfangszustand für alle Werte von x gegeben sei; dann haben wir an Stelle der Kurve c die x-Achse zu setzen, und es ist also

$$u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = F(x) \quad \text{für } y = 0, \tag{1}$$

worin $f(x)$ und $F(x)$ gegebene Funktionen von x sind.

Die Abszissen der Punkte α, β in § 125 (11) sind dann $x_1 - y_1$, $x_1 + y_1$ und es ist in dem Integral $dy = 0$ zu setzen.

Es wird für $y = 0$

$$(2) \qquad z = \sqrt{y_1^2 - (x - x_1)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{y_1}{z}\frac{dv}{dz},$$

und folglich nach § 125 (11)

$$(3) \qquad 2u(x_1, y_1) = f(x_1 - y_1) + f(x_1 + y_1) + \int_{x_1 - y_1}^{x_1 + y_1} v F(x)\, dx$$
$$+ y_1 \int_{x_1 - y_1}^{x_1 + y_1} \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} f(x)\, dx,$$

worin

$$(4) \qquad \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} = \frac{1}{2} + \frac{z^2}{2^2 . 4} + \frac{z^4}{2^2 . 4^2 . 6} + \cdots$$

für $z = 0$ endlich bleibt.

Um von der Bedeutung dieses Resultates eine Anschauung zu bekommen, wollen wir annehmen, die anfängliche Gleichgewichtsstörung sei auf ein endliches Gebiet beschränkt. Es seien also

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0, \quad \text{wenn } x < h_1 \text{ oder } x > h_2,$$

worin h_1 und h_2 die Abszissen gegebener Punkte sind. Wir nehmen nun einen bestimmten positiven Wert y_1 von y, d. h einen bestimmten Zeitpunkt. Dann zeigt die Formel (3), daß $u(x_1, y_1) = 0$ ist, wenn

$$(5) \qquad x_1 < h_1 - y_1 \text{ oder } x_1 > h_2 + y_1.$$

Es pflanzen sich also die beiden Enden der Welle mit konstanter Geschwindigkeit c/α [§ 126 (5)] nach vorwärts und nach rückwärts fort. Dies ist ebenso wie bei der Differentialgleichung der schwingenden Saite oder bei der gedämpften Welle. Anders aber verhalten sich die zwischenliegenden Teile des Mediums.

Nehmen wir an, es sei y_1 bereits größer als $\frac{1}{2}(h_2 - h_1)$ geworden, und betrachten einen Wert von x_1, für den

$$h_2 - y_1 < x_1 < h_1 + y_1,$$

also $x_1 - y_1 < h_1$ und $x_1 + y_1 > h_2$, so sind $f(x_1 - y_1)$ und $f(x_1 + y_1)$ gleich Null und es ergibt sich aus (3):

$$(6) \qquad 2u_1 = \int_{h_1}^{h_2} v F(x)\, dx + y_1 \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} f(x)\, dx.$$

Es tritt also hier zwischen den beiden Enden der Welle nicht wie bei der schwingenden Saite eine Region der Ruhe ein, sondern u behält auch zwischen beiden Enden einen mit der Zeit veränderlichen Wert.

Es haben also die beiden fortschreitenden Wellen kein hinteres Ende, sondern in den von ihnen überschrittenen Gebieten stellt sich erst nach unendlich langer Zeit der Gleichgewichtszustand wieder her. Hierin unterscheidet sich also das Problem der gedämpften Welle wesentlich von dem der ungedämpften, und nähert sich dem der Wärmeleitung, von dem es sich wieder durch die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit des vorderen Endes der Welle unterscheidet.

Wenn wir in der Formel (3) die Annahme machen

$$f(x) = -f(-x), \qquad F(x) = -F(-x), \tag{7}$$

so ergibt sich $u_1 = 0$ für $x_1 = 0$ und jedes beliebige y_1. Die Formel (3) entspricht dann, wenn $f(x)$ und $F(x)$ für positive Werte beliebig gegeben sind, z. B. so, daß sie nur in einem endlichen Bereich von Null verschieden sind, einer Reflexion oder Spiegelung der Welle an der Ebene $x = 0$.

Bei der elektromagnetischen Lichttheorie würden diese Annahmen zutreffen, wenn in dem reflektierenden Medium der Koeffizient λ (§ 123) einen sehr großen Wert hat, im Vergleich zu dem Werte, den er in den angrenzenden Medien hat. Dann hat man die elektrischen Kräfte in dem spiegelnden Medium wenigstens nahezu als verschwindend anzunehmen. Dies trifft bei der Reflexion an Metallflächen zu.

§ 128.

Willkürlicher Anfangszustand im Raume.

Die allgemeine Differentialgleichung für die gedämpfte Welle [§ 125 (1)], in der wir $\alpha = 1$ setzen:

$$c^2 \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial U}{\partial t}, \tag{1}$$

läßt sich auf den speziellen Fall, den wir im vorigen Paragraphen behandelt haben, zurückführen, nach derselben Methode, die wir im § 124 zur Integration der Differentialgleichung für die ungedämpfte Welle angewandt haben. Wir nehmen einen willkürlichen Punkt p mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 an und bezeichnen mit r den Abstand dieses Punktes von einem variablen Punkte, ferner mit $d\omega$ das Oberflächenelement der um p beschriebenen Einheitskugel. Ist dann

$$\Omega(r) = \frac{r}{4\pi}\int U\,d\omega, \tag{2}$$

so genügt Ω der aus (1) abzuleitenden Gleichung (§ 125)

$$c^2\frac{\partial^2\Omega}{\partial r^2} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial\Omega}{\partial t}, \tag{3}$$

und hierzu kommen die Bedingungen für den Anfangszustand:

$$\text{für } t = 0,\quad r > 0: \Omega = \frac{r}{4\pi}\int f(x,y,z)\,d\omega = \varphi(r),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \frac{r}{4\pi}\int F(x,y,z)\,d\omega = \Phi(r),$$

wenn $f(x,y,z)$ und $F(x,y,z)$ die Anfangswerte von U und $\partial U/\partial t$ sind, und für $r = 0$

$$\Omega = 0.$$

Demnach setzen wir

$$\varphi(-r) = -\varphi(r), \qquad \Phi(-r) = -\Phi(r), \tag{4}$$

und können dann unmittelbar die Formel § 127 (3) anwenden, in der die Funktionen φ und Φ/c an Stelle von f und F treten. Wir erhalten mit Rücksicht auf § 125 (3), (5):

$$\begin{aligned} 2\Omega e^{\beta t} &= \varphi(r+ct) + \varphi(r-ct) \\ &+ \frac{1}{c}\int_{r-ct}^{r+ct} v\,\Phi(x)\,dx + \frac{\beta^2 t}{c}\int_{r-ct}^{r+ct}\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}\,\varphi(x)\,dx, \end{aligned} \tag{5}$$

worin v die in § 126 (5) bestimmte Funktion von z ist, und z die Bedeutung § 127 (2) hat:

$$z = \frac{\beta}{c}\sqrt{c^2t^2 - (x-r)^2}. \tag{6}$$

Um den Wert von U im Punkte x_1, y_1, z_1 zu erhalten, hat man hieraus den Grenzwert von Ω/r für $r = 0$ zu bilden, für den man unter Berücksichtigung von (4), (6) und § 127 (4) den Ausdruck erhält:

$$
(7) \qquad U = e^{-\beta t}\left[\varphi'(ct) + \frac{1}{c}\,\Phi(ct) + \frac{\beta^2 t}{2c}\,\varphi(ct) + \right.
$$

$$
\left. \frac{\beta^2}{c^3}\int_0^{ct} \frac{1}{z}\frac{dv}{dz}\,x\Phi(x)\,dx + \frac{\beta^4 t}{c^3}\int_0^{ct}\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\frac{dv}{dz}\right)x\varphi(x)\,dx\right],
$$

worin

$$
z = \frac{\beta}{c}\sqrt{c^2t^2 - x^2}.
$$

Von einem ursprünglichen endlichen Erschütterungsgebiete geht also auch hier eine nach allen Seiten fortschreitende Welle aus, die eine bestimmte vordere Grenze hat. Diese Welle ist aber nicht schalenförmig, sondern das einmal erschütterte Gebiet geht erst allmählich, und in endlicher Zeit nicht vollkommen, in den ungestörten Zustand zurück[1]).

---

[1]) Die Integration der Differentialgleichung für die gedämpfte Welle ist auf verschiedenen Wegen behandelt von **Poincaré**, Compt. rend. der Pariser Akademie **117** (1893); **Picard**, ebend. **118** (1894); **Birkeland**, ebend. **120** (1895) und Archive de Genève, T. 34 (1895).

Sechzehnter Abschnitt.

Lineare elektrische Ströme.

§ 129.

Transformation der Maxwellschen Gleichungen auf krummlinige Koordinaten.

Um auf speziellere Anwendungen einzugehen, ist es notwendig, die Maxwellschen Gleichungen auf ein anderes (krummliniges) Koordinatensystem zu transformieren, wozu die Hilfsmittel in § 96 des ersten Bandes gegeben sind.

Es seien also wie dort p, q, r die Parameter von drei orthogonalen Flächenscharen, und die Variablen seien so gewählt, daß die Richtungen der wachsenden p, q, r ein Rechtssystem bilden. Es sei ferner das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 = e\,dp^2 + e'\,dq^2 + e''\,dr^2. \tag{1}$$

Wenn wir mit E_p, E_q, E_r, M_p, M_q, M_r die Komponenten der elektrischen und magnetischen Kraft in den Richtungen p, q, r bezeichnen, so erhalten wir auf Grund von Band I, § 96 (5) aus den Formeln I, II, § 124 dieses Bandes:

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{\sqrt{e'e''}}\left(\frac{\partial\sqrt{e''}\,M_r}{\partial q} - \frac{\partial\sqrt{e'}\,M_q}{\partial r}\right) = \varepsilon\frac{\partial E_p}{\partial t} + 4\pi\lambda E_p,\\
&\frac{c}{\sqrt{e''e}}\left(\frac{\partial\sqrt{e}\,M_p}{\partial r} - \frac{\partial\sqrt{e''}\,M_r}{\partial p}\right) = \varepsilon\frac{\partial E_q}{\partial t} + 4\pi\lambda E_q,\\
&\frac{c}{\sqrt{ee'}}\left(\frac{\partial\sqrt{e'}\,M_p}{\partial p} - \frac{\partial\sqrt{e}\,M_p}{\partial q}\right) = \varepsilon\frac{\partial E_r}{\partial t} + 4\pi\lambda E_r,
\end{aligned}\tag{2}$$

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
\frac{c}{\sqrt{e'e''}}\left(\frac{\partial\sqrt{e''}\,E_r}{\partial q}-\frac{\partial\sqrt{e'}\,E_q}{\partial r}\right) &= -\,\mu\frac{\partial M_p}{\partial t},\\
\frac{c}{\sqrt{e''e}}\left(\frac{\partial\sqrt{e}\,E_p}{\partial r}-\frac{\partial\sqrt{e''}\,E_r}{\partial p}\right) &= -\,\mu\frac{\partial M_q}{\partial t},\\
\frac{c}{\sqrt{e\,e'}}\left(\frac{\partial\sqrt{e'}\,E_q}{\partial p}-\frac{\partial\sqrt{e}\,E_p}{\partial q}\right) &= -\,\mu\frac{\partial M_r}{\partial t}.
\end{aligned}
$$

Ebenso erhält man nach Bd. I, § 96, (4):

$$
(4) \qquad \sqrt{e e' e''}\,\operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial\sqrt{e'e''}\,E_p}{\partial p}+\frac{\partial\sqrt{e''e}\,E_q}{\partial q}+\frac{\partial\sqrt{e\,e'}\,E_r}{\partial r}
$$

und also aus § 123, III, IV:

$$
(5) \qquad \frac{\partial\sqrt{e'e''}\,E_p}{\partial p}+\frac{\partial\sqrt{e''e}\,E_q}{\partial q}+\frac{\partial\sqrt{e\,e'}\,E_r}{\partial r}=0,
$$

$$
(6) \qquad \frac{\partial\sqrt{e'e''}\,M_p}{\partial p}+\frac{\partial\sqrt{e''e}\,M_q}{\partial q}+\frac{\partial\sqrt{e\,e'}\,M_r}{\partial r}=0.
$$

§ 130.

Axial symmetrisches Feld.

Wir wollen diese Formeln auf den Fall anwenden, daß das Feld um die x-Achse symmetrisch ist, daß also, wenn wir Zylinderkoordinaten einführen und demnach

$$
(1) \qquad y = r\cos\vartheta \qquad z = r\sin\vartheta
$$

setzen, der Zustand unabhängig von ϑ werde.

Es ist dann

$$
ds^2 = dx^2 + r^2 d\vartheta^2 + dr^2,
$$

und demnach ist in den Formeln (2) bis (6) § 129

$$
p,\ q,\ r,\qquad e,\ e',\ e''
$$

durch

$$
x,\ \vartheta,\ r,\qquad 1,\ r^2,\ 1
$$

zu ersetzen. Die sechs Gleichungen (2), (3) § 129 reduzieren sich auf drei, wenn wir

$$
E_\vartheta = 0,\quad M_r = 0,\quad M_x = 0
$$

setzen, und E_x, E_r, $M_\vartheta = M$ von ϑ unabhängig annehmen:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
-\frac{c}{r}\frac{\partial r M}{\partial r} &= \varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} + 4\pi\lambda E_x,\\
\frac{c}{r}\frac{\partial r M}{\partial x} &= \varepsilon\frac{\partial E_r}{\partial t} + 4\pi\lambda E_r,
\end{aligned}
$$

$$
(3)\qquad c\left(\frac{\partial E_x}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial x}\right) = -\mu\frac{\partial M}{\partial t},
$$

und aus (5) § 129 ergibt sich:

$$
(4)\qquad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial r E_r}{\partial r} = 0,
$$

während (6) wieder identisch befriedigt ist.

Man kann hieraus eine einzige Differentialgleichung für M herleiten, wenn man die erste Gleichung (2) nach r, die zweite nach x differentiiert, beide voneinander subtrahiert und (3) benutzt:

$$
(5)\qquad c^2\left[r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r M}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 r M}{\partial x^2}\right] = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 r M}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu\frac{\partial r M}{\partial t}.
$$

Hat man M gefunden, so kann man E_x, E_r aus den Gleichungen (2) durch Quadraturen in bezug auf t finden, wenn die Anfangswerte gegeben sind.

Ebenso kann man die Differentialgleichungen für die übrigen Komponenten ableiten, von denen wir noch die für E_x anführen:

$$
(6)\qquad c^2\left(\frac{\partial r\frac{\partial E_x}{\partial r}}{r\,\partial r} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}\right) = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu\frac{\partial E_x}{\partial t}.
$$

Diese Gleichung ist keine andere als die Gleichung § 123 (2).

Die Gleichung (5) erhält die gleiche Form:

$$
(7)\qquad c^2\Delta U = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 4\pi\lambda\mu\frac{\partial U}{\partial t},
$$

wenn man sie nach r differentiiert und dann

$$
(8)\qquad \frac{\partial r M}{\partial r} = r U
$$

setzt.

§ 131.

Elektrische Strömung in einem Draht.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß das Feld aus einem unbegrenzten leitenden Zylinder mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius R besteht, der in einem sonst unbegrenzten Dielektrikum liegt. Die Achse dieses Zylinders ist die x-Achse. Es hat dann λ einen konstanten positiven Wert, solange $r < R$ ist, und es ist $\lambda = 0$ für $r > R$.

Wir führen eine sich unmittelbar bietende partikulare Lösung an, indem wir E_x, E_r, M von x und von t unabhängig annehmen. Dann sind die Gleichungen (3), (4) und die zweite Gleichung (2) (§ 130) befriedigt, wenn wir

$$(1) \qquad E_x = \text{const.} \qquad E_r = 0$$

setzen, und die Gleichung (2) ergibt:

$$(2) \qquad \begin{aligned} M &= \frac{-2\pi\lambda E_x r}{c}, \qquad r < R, \\ M &= \frac{-2\pi\lambda E_x R^2}{cr}, \qquad r > R, \end{aligned}$$

wonach M an der Oberfläche des Zylinders stetig bleibt.

Es entspricht diese Lösung einer **stationären elektrischen Strömung** in einem unbegrenzten, gerade ausgespannten Draht.

Die Annahme (1) entspricht der Voraussetzung, daß E_r bei dem Übergang aus dem Draht ins Dielektrikum stetig sei; E_r ist aber unstetig, wenn eine elektrische Flächenbelegung auf der Drahtoberfläche angenommen wird. Dann würde man E_r außerhalb des Dielektrikums nicht $= 0$, sondern $= \text{const.}/r$ anzunehmen haben, wobei sich die Konstante aus der Flächendichtigkeit der Elektrizität bestimmt.

Nach Bd. I, § 162 ist λE_x die Dichte des Leitungsstromes, und

$$(3) \qquad j = \int \lambda E_x dq = 2\pi\lambda \int_0^R r E_x dr$$

die **Intensität oder Stromstärke des Leitungsstromes**. Bezeichnen wir mit w den **Leitungswiderstand der Längeneinheit**, mit q den Querschnitt des Drahtes, so ist [Bd. I, § 176 (8)]

$$(4) \qquad w = \frac{1}{\lambda q},$$

$$(5) \qquad wj = \frac{1}{q}\int E_x dq = \frac{2}{R^2}\int_0^R r E_x dr,$$

und in (1) ist also die Konstante bestimmt durch

$$(6) \qquad E_x = wj.$$

Die Formeln (3) und (5) gelten aber auch in dem Falle, wo E_x und mithin auch j nicht konstant ist, und dienen dann als Definition von j. Durch j wird aber nach Bd. I, § 162 hauptsächlich die durch den elektrischen Strom übertragene Energie gemessen, die als Joulesche Wärme oder in anderer Form auftritt und Verwendung findet; wj^2 ist die in der Längeneinheit des Drahtes entwickelte Joulesche Wärme (falls von dem Energieverlust der quer verlaufenden Ströme abgesehen wird) und es kommt daher vor allem auf die Kenntnis von j an. Nach der Definition (5) ist j eine Funktion von nur zwei Variablen t und x. In aller Strenge läßt sich aber die Bestimmung von j nicht trennen von der Bestimmung der Kraftkomponenten für das ganze Feld, die von drei Variablen t, x und r abhängen. Angenähert ist dies aber unter gewissen Voraussetzungen möglich, wie wir jetzt zeigen wollen.

§ 132.
Selbstinduktion.

Wir multiplizieren die Gleichung (6), § 130 mit $r\,dr$ und integrieren von 0 bis R. Dadurch erhalten wir, mit Rücksicht auf § 131 (3):

$$(1) \qquad c^2 R \left(\frac{\partial E_x}{\partial r}\right)_{r=R} + \frac{c^2}{2\pi\lambda}\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \frac{\mu\varepsilon}{2\pi\lambda}\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + 2\mu\frac{\partial j}{\partial t},$$

und unsere Annahme besteht nun darin, daß wir in dieser Gleichung das erste Glied

$$(2) \qquad c^2 R \left(\frac{\partial E_x}{\partial r}\right)_{r=R}$$

vernachlässigen dürfen. Dann ergibt sich für j die Gleichung

$$(3) \qquad c^2 \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + 4\pi\mu\lambda\frac{\partial j}{\partial t},$$

also dieselbe Gleichung, mit deren Integration wir uns in § 125 beschäftigt haben, und für die wir bereits dort den Namen der Telegraphengleichung gebraucht haben. Sie enthält nur noch die eine unbekannte Funktion j und die beiden unabhängigen Variablen x, t[1]).

---

[1]) Nach der vor-Maxwellschen Theorie der elektrischen Ströme erhält man diese Gleichung auf folgendem Wege (Heaviside, On the extra current. Electrical Papers, Vol. I, p. 93):

Es sei Q die Elektrizitätsmenge, die vom Anfangspunkt der Zeit bis zur Zeit t durch einen Querschnitt des Drahtes mit der Abszisse x geflossen

Wir wollen versuchen, uns eine Vorstellung davon zu bilden, inwiefern wir berechtigt sind, das Glied (2) in der Gleichung (1) wegzulassen. Es genügt dazu nicht, daß dieses Glied an sich klein sei, sondern es muß klein sein im Vergleich zu einem Wert, den wenigstens eines der anderen Glieder der Gleichung (1) annehmen kann, wenn die Gleichung (3) nach der Vernachlässigung kleiner Glieder noch irgend einen Inhalt haben soll. Bei den nicht-magnetischen Metallen können wir dabei μ nahezu gleich 1 annehmen. Wir denken uns jetzt den Radius des Drahtes sehr klein, jedoch so, daß die Stromintensität j und der Widerstand w endliche Werte behalten. Es müssen dann die

---

ist. Dann ist $\partial Q/\partial t$ die auf die Zeiteinheit bezogene, in dem Zeitelement dt durch diesen Querschnitt geflossene Elektrizitätsmenge, d. h. nach der älteren Theorie, die Intensität j des im Drahte fließenden Stromes. Also ist

$$j = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Wenn nun C die auf die Längeneinheit bezogene **Kapazität** des Drahtes ist, so ist $C dx$ die Elektrizitätsmenge, die erforderlich ist, um in dem Element dx das Potential v um die Einheit zu erhöhen. Es ist hiernach

a) $$-\frac{\partial Q}{\partial x} = Cv, \qquad -\frac{\partial j}{\partial x} = C\frac{\partial v}{\partial t}.$$

Die in dem Element dx tätige elektromotorische Kraft entspringt zum Teil aus der Spannungsdifferenz, die dazu den Beitrag $(-\partial v/\partial x)dx$ gibt und der elektromotorischen Kraft der **Selbstinduktion** $-s(\partial j/\partial t)dx$, wenn s der auf die Längeneinheit bezogene **Selbstinduktionskoeffizient** ist; und wenn w, wie oben, der Widerstand der Längeneinheit des Drahtes ist, so ergibt sich nach dem Ohmschen Gesetz:

b) $$-\frac{\partial v}{\partial x} - s\frac{\partial j}{\partial t} = wj.$$

Eliminiert man v aus a) und b), so folgt:

c) $$\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = Cs\frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + Cw\frac{\partial j}{\partial t}.$$

Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung (3) überein, wenn wir setzen:

d) $$\mu\varepsilon = c^2 Cs, \qquad 4\pi\mu\lambda = c^2 Cw.$$

Hierbei ist c die Lichtgeschwindigkeit; C, s, w sind die Kapazität, der Selbstinduktionskoeffizient, der Widerstand der Längeneinheit.

Hier ist λ in elektrostatischem Maß ausgedrückt. In den Produkten Cs, Cw ist die Maßeinheit gleichgültig. Wenn man aber λ in elektromagnetischem Maß ausdrückt, so wird einfacher:

e) $$4\pi\mu\lambda = Cw.$$

Der bedenklichste Punkt in dieser Theorie ist der, daß das Potential v nicht allein von der in dx enthaltenen Elektrizitätsmenge, sondern von der ganzen elektrischen Verteilung abhängt, und daß also auch die Kapazität nicht konstant, sondern von dieser Verteilung abhängig ist.

Schwankungen von E_x innerhalb eines Querschnittes hinlänglich klein sein, wenn die Vernachlässigung von (2) gestattet sein soll. Um dies etwas genauer auszudrücken, bezeichnen wir mit $(\partial j/\partial t)$ einen mittleren Wert des Differentialquotienten $\partial j/\partial t$ in dem Bereich der Variablen x, t, in dem die Differentialgleichung (1) angewandt werden soll, dann ist die Gleichung (3) zulässig, wenn der Quotient

$$\frac{c^2 r \dfrac{\partial E_x}{\partial r}}{\left(\dfrac{\partial j}{\partial t}\right)} \tag{4}$$

für $r = R$ eine gegen 1 zu vernachlässigende Zahl ist.

Hierin können wir nun nach § 131 (6)

$$\left(\frac{\partial j}{\partial t}\right) = \frac{1}{w}\left(\frac{\partial E_x}{\partial t}\right)$$

setzen, worin $(\partial E_x/\partial t)$ einen mittleren Wert von $\partial E_x/\partial t$ im Bereich der Variablen x, t und $r < R$ bedeutet. Wenn wir

$$w_m = c^2 w \tag{5}$$

setzen, so ist w_m der Widerstand der Längeneinheit des Drahtes, in elektromagnetischem Maß ausgedrückt, und die Zahl, die klein sein muß, ist also:

$$\left[\frac{w_m r \dfrac{\partial E_x}{\partial r}}{\left(\dfrac{\partial E_x}{\partial t}\right)}\right]_{r=R}. \tag{6}$$

Nehmen wir beispielsweise an, es sei E_x in bezug auf t und r periodisch mit den Perioden T und L (ohne damit sagen zu wollen, daß diese Annahme mit der Differentialgleichung verträglich sei), setzen wir also

$$E_x = A \cos\frac{2\pi t}{T}\cos\frac{2\pi r}{L},$$

worin A von r und t unabhängig ist, so ergibt sich, daß

$$\frac{w_m R T}{L}$$

eine kleine Zahl sein müßte. Hierin ist $w_m R$ der elektromagnetisch gemessene Widerstand eines Drahtstückes von der Länge R, der durch eine Geschwindigkeit gemessen wird, und dieser Widerstand muß also klein sein im Vergleich zu L/T, was wir als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der angenommenen Wellenbewegung bezeichnen können.

§ 133.

Integration der Telegraphengleichung durch die Methode der Partikularlösungen.

Im § 125 haben wir die Gleichung (3) des vorigen Paragraphen nach der Riemannschen Methode behandelt und unter gewissen Voraussetzungen über die Nebenbedingungen integriert. Es bietet aber die Behandlung nach der Fourierschen Methode neue Gesichtspunkte und soll hier daher noch kurz besprochen werden. Wir suchen also zunächst partikulare Lösungen der Differentialgleichung

$$c^2 \frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} + 4 \pi \mu \lambda \frac{\partial j}{\partial t}, \tag{1}$$

indem wir setzen

$$j = A e^{i(\alpha x + \beta t)}, \tag{2}$$

worin A, α, β reelle oder imaginäre Konstanten sind. Um diesen und allen daraus abgeleiteten Ausdrücken eine physikalische Bedeutung zu geben, braucht man nur den reellen Teil beizubehalten.

Die Differentialgleichung (1) wird durch den Ausdruck (2) befriedigt, wenn die Konstanten α, β der Bedingung genügen:

$$\mu \varepsilon \beta^2 - 4 \pi \mu \lambda i \beta - \alpha^2 c^2 = 0. \tag{3}$$

Wir wollen zunächst α reell annehmen. Dann ist die durch (2) dargestellte Funktion j in bezug auf x periodisch. Die Periode $2\pi/\alpha$ heißt die Wellenlänge; β wird aus der quadratischen Gleichung (3) bestimmt, aus der sich

$$\beta = \frac{2 \pi i \lambda}{\varepsilon} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha^2 c^2 \varepsilon}{4 \pi^2 \lambda^2 \mu}}\right) \tag{4}$$

ergibt.

Man erhält also zwei Werte β_1, β_2 für β, und die beiden Werte $i\beta_1$, $i\beta_2$ sind entweder konjugiert imaginär, wenn

$$\alpha^2 > \frac{4 \pi^2 \lambda^2 \mu}{c^2 \varepsilon} \tag{5}$$

oder reell, wenn

$$\alpha^2 < \frac{4 \pi^2 \lambda^2 \mu}{c^2 \varepsilon}, \tag{6}$$

immer aber sind die reellen Teile von $i\beta_1$, $i\beta_2$ **negativ**. Es findet also eine **zeitliche Dämpfung** des anfangs vorhandenen periodischen Zustandes statt, im ersten Fall, (5), unter immer schwächer werdenden zeitlichen Oszillationen, im zweiten Falle, (6), ohne Oszillationen.

Wenn ein beliebig gegebener Anfangszustand durch die partikulare Lösung (2) dargestellt werden soll, so können wir α alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen lassen und dann den Fourierschen Lehrsatz anwenden. Wir haben dann die Bedingung zu erfüllen, daß j und $\partial j/\partial t$ für $t = 0$ in gegebene Funktionen von x übergehen, die wir mit $j_0(x)$, $j_0'(x)$ bezeichnen. Wir setzen nach (2), indem wir mit A_1, A_2 Funktionen von α bezeichnen:

$$j = \int_{-\infty}^{+\infty} (A_1 e^{i\beta_1 t} + A_2 e^{i\beta_2 t}) e^{i\alpha x}\, d\alpha, \tag{7}$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} = i \int_{-\infty}^{+\infty} (\beta_1 A_1 e^{i\beta_1 t} + \beta_2 A_2 e^{i\beta_2 t}) e^{i\alpha x}\, d\alpha, \tag{8}$$

und wenn wir den Fourierschen Lehrsatz in der Form anwenden [Bd. I, § 21, (3)]:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{i\alpha(x-\xi)}\, d\xi, \tag{9}$$

so ergeben sich zur Bestimmung der Funktionen A_1, A_2 die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j_0(\xi) e^{-i\alpha\xi}\, d\xi \\ \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j_0'(\xi) e^{-i\alpha\xi}\, d\xi. \end{aligned} \tag{10}$$

Die zweite Annahme, die wir machen, wenn nicht der Anfangszustand, sondern eine bestimmte Form der Abhängigkeit von der Zeit gegeben ist, besteht darin, daß β reell, also die partikulare Lösung (2) in bezug auf die Zeit periodisch ist. Die Periode $2\pi/\beta$ heißt dann die Schwingungsdauer. Aus (3) ergibt sich:

$$c\alpha = \sqrt{\mu\varepsilon\beta^2 - 4\pi\mu\lambda i\beta}. \tag{11}$$

Es ist also α weder reell noch rein imaginär (außer für $\beta = 0$). Wählen wir das Vorzeichen der Quadratwurzel in (11) so, daß der reelle Teil von $i\alpha$ negativ wird, so verschwindet der Ausdruck (2) für j für unendlich große positive x und wird unendlich für unendlich große negative x.

Zur Erhaltung dieses Zustandes ist eine fortwährende Zufuhr von Energie, eine Erregung notwendig, die wir uns auf der Seite der negativen x im Unendlichen denken, und die wir, damit ihr Einfluß im Endlichen noch merklich sei, unendlich groß annehmen müssen.

Einen allgemeinen, dieser Vorstellung entsprechenden Ausdruck erhalten wir, wenn wir A als eine willkürliche Funktion von β annehmen, und das Integral bilden:

$$(12) \qquad j = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{i(\alpha x + \beta t)} d\beta,$$

und nun kann man die Funktion A etwa so bestimmen, daß j für $x = 0$ eine gegebene Funktion von t wird.

§ 134.

Bestimmung des elektromagnetischen Feldes.

Ist j durch Integration der Gleichung (3), § 132 als Funktion von x und t bekannt, so bleibt noch übrig, den Zustand des ganzen elektromagnetischen Feldes zu ermitteln. Dazu genügt die Kenntnis der magnetischen Kraft M, die als Funktion von r, x und t zu bestimmen ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$(1) \qquad rM = P,$$

so ergeben die Gleichungen § 130 (2), (5):

$$(2) \qquad c\frac{\partial P}{\partial r} = -\varepsilon\frac{\partial r E_x}{\partial t} - 4\pi\lambda r E_x,$$

und für den Raum des Dielektrikums, wo $\lambda = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$ ist:

$$(3) \qquad c^2\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}.$$

Die Gleichung (2) wollen wir zwischen den Grenzen 0 und R integrieren und erhalten, da P für $r = 0$ verschwindet, wenn wir mit P_0 den Wert von P für $r = R$ bezeichnen, mit Rücksicht auf § 131 (3):

$$(4) \qquad c P_0 = -\frac{\varepsilon}{2\pi\lambda}\frac{\partial j}{\partial t} - 2j,$$

worin sich ε und λ auf den Draht beziehen. Denken wir uns j als Funktion von x und t bekannt, so ist die Gleichung (4) eine Grenzbedingung, die sich auf $r = R$ bezieht. Wenn wir aber R als unendlich klein annehmen, so können wir unter P_0 auch den Wert von P für $r = 0$ verstehen, und wir werden, wenn wir die Gleichung (3) mit dieser Grenzbedingung integrieren, eine Lösung erhalten, die für Werte von r, die im Vergleich zu R groß sind, eine brauchbare Annäherung gibt.

Außerdem wollen wir noch die Bedingung hinzunehmen, die wir im Falle des stationären Zustandes bewährt gefunden haben, daß P für $r = \infty$ nicht unendlich werden soll.

Um die Differentialgleichung (3) zu integrieren, suchen wir partikulare Integrale. Wir setzen

$$(5) \qquad P = e^{i(\alpha x + \beta t)} Q,$$

worin α, β Konstanten sind, und Q eine Funktion von r allein sein soll. Dadurch ergibt sich, wenn

$$(6) \qquad \gamma^2 = \alpha^2 - \frac{\beta^2}{c^2}$$

gesetzt wird, für Q die Differentialgleichung

$$(7) \qquad r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dQ}{dr} - \gamma^2 Q = 0.$$

Wenn wir hierin

$$(8) \qquad Q = r\frac{d\Psi}{dr}$$

setzen, so erhalten wir durch Integration nach r, wobei die additive Konstante Null gesetzt werden kann, für Ψ die Differentialgleichung:

$$(9) \qquad \frac{1}{r}\frac{d r \frac{d\Psi}{dr}}{dr} - \gamma^2\Psi = 0$$

oder

$$(10) \qquad \frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{dr} - \gamma^2\Psi = 0.$$

Dies ist aber die Besselsche Differentialgleichung mit den beiden partikularen Integralen $J(i\gamma r)$, $K(i\gamma r)$, und nach Bd. I,

§ 76 (5), (6) hat diese Gleichung also auch ein partikulares Integral der Form

$$\Psi = e^{-\gamma r}\sqrt{\frac{\pi}{2\gamma r}}\,S(2\gamma r). \tag{11}$$

Ein zweites partikulares Integral erhält man daraus, wenn man γ in $-\gamma$ verwandelt. Da aber Ψ für ein unendlich großes r nicht unendlich werden darf, so können wir, solange wenigstens γ nicht rein imaginär ist, nur das eine dieser beiden Integrale beibehalten, nämlich das, in dem γ einen positiven reellen Teil hat. Dann verschwindet Ψ für ein unendliches r. Denn $S(z)$ hat für ein unendliches z, wie im § 78 des ersten Bandes nachgewiesen ist, einen endlichen Wert.

Im Bd. I, § 77 haben wir die Entwickelung gefunden:

$$e^{-\frac{z}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{z}}\,S(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu - \log z}{\Pi(\nu)^2}\left(\frac{z}{4}\right)^{2\nu},$$

und hieraus ergibt sich durch Differentiation:

$$-z\frac{d}{dz}e^{-\frac{z}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{z}}\,S(z) = \tag{12}$$

$$1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu\log z + 1 - 2\nu c_\nu}{\Pi(\nu)^2}\left(\frac{z}{4}\right)^{2\nu},$$

und wenn man hierin $z = 2\gamma r$ setzt, so erhält man einen Ausdruck, der in (5) für Q gesetzt werden kann. Der Wert von Q wird also $= 1$ für $z = 0$. Diese Funktion Q kann dann noch mit einem Faktor multipliziert werden, der eine willkürliche Funktion von α, β ist.

Nehmen wir als einfachstes Beispiel für j einen der Ausdrücke aus § 133:

$$j = A\,c^{i(\alpha x + \beta t)} \tag{13}$$

mit der Bedingung:

$$\mu\varepsilon\beta^2 - 4\pi\mu\lambda i\beta - \alpha^2 c^2 = 0, \tag{14}$$

so ergibt sich aus (4):

$$cP_0 = -2A\left(1 + \frac{\varepsilon i\beta}{4\pi\lambda}\right)e^{i(\alpha x + \beta t)}, \tag{15}$$

und folglich, wenn $Q(z)$ die durch (12) definierte Bedeutung hat:

$$cP = -2A\left(1 + \frac{\varepsilon i\beta}{4\pi\lambda}\right)e^{i(\alpha x + \beta t)}\,Q(2\gamma r), \tag{16}$$

worin $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2/c^2$ zu setzen und γ mit positivem reellen Teil zu nehmen ist. A kann dann auch eine komplexe Konstante sein, und um einen Ausdruck mit realer Bedeutung zu erhalten, hat man für P den reellen Teil des Ausdruckes (16) zu nehmen. Diese Ausdrücke kann man dann wie im § 133 summieren, und kann so z. B. einen willkürlich gegebenen Anfangszustand im Drahte berücksichtigen. Soll auch noch ein gegebener Anfangszustand im Felde befriedigt werden, so muß man eine Lösung der Gleichung (3) hinzufügen, die für $r = 0$ verschwindet und gegebenen Anfangswerten von M und $\partial M/\partial t$ entspricht. Man setzt, um die Methode von § 124 anwenden zu können, im § 130 (7):

$$P = \int_0^r r\,U dr,$$

oder, was dasselbe ist:

$$U = \frac{\partial r M}{r \partial r},$$

und hat dann gegebene Anfangswerte von U und $\partial U/\partial t$. Diese Lösung läßt sich auch durch Besselsche Funktionen mit reellem Argument darstellen.

Wollen wir die elektrische Komponente E_x an irgend einer Stelle des Feldes bestimmen, so führt dazu die erste Gleichung (2), § 130, die hier so lautet:

$$(17) \qquad -\frac{c}{r}\frac{\partial r M}{\partial r} = \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Setzen wir hierin nach (5):

$$(18) \qquad r M = P = e^{i(\alpha x + \beta t)}\,Q,$$

so folgt durch Integration in bezug auf t:

$$(19) \qquad E_x = -\frac{c}{i\beta r}\frac{dQ}{dr}\,e^{i(\alpha x + \beta t)},$$

und nach (7) und (8) ist

$$\frac{dQ}{dr} = \gamma^2 r\,\Psi;$$

also erhalten wir:

$$(20) \qquad E_x = -\frac{c\gamma^2}{i\beta}\,e^{i(\alpha x + \beta t)}\,\Psi.$$

Diese Kraft ist es, die in einem etwa an der Stelle x, r angebrachten, zu dem ersten parallelen Draht eine induzierende

Wirkung hat, und die Formel (11) zeigt, nach welchem Gesetz diese Induktion mit wachsender Entfernung r der beiden Drähte abnimmt.

§ 135.

Nachweis der Übereinstimmung der beiden Lösungen der Telegraphengleichung.

Die Lösung der Telegraphengleichung bei gegebenem Anfangszustand, die wir im § 133 (7), (10) gefunden haben, hat eine ganz andere Form, wie die durch die Riemannsche Methode (§ 127) erhaltene, obwohl die Grenzbedingungen ganz dieselben sind. Es ist nun von Interesse, diese beiden Resultate miteinander zu vergleichen und aufeinander zurückzuführen.

Zu diesem Zweck stellen wir zunächst die beiden Formen zusammen. Es handelt sich, wenn wir die geeigneten Variablen einführen, um die Integration der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0 \tag{1}$$

unter der Bedingung, daß

$$\text{für } y = 0: \quad u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = F(x) \tag{2}$$

sei, wo $f(x)$ und $F(x)$ gegebene Funktionen von x sind.

Der Lösung, die wir im § 127 (3) erhalten haben, geben wir die folgende Form, indem wir x_1, y_1 durch x, y und die Integrationsvariable x durch ξ ersetzen:

$$\begin{aligned} 2u &= f(x-y) + f(x+y) \\ &\quad + y \int_{x-y}^{x+y} \frac{1}{z} \frac{dv}{dz} f(\xi)\, d\xi + \int_{x-y}^{x+y} vF(\xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{3}$$

worin

$$z = \sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}, \tag{4}$$

$$v = J(iz) \cdot \text{(Besselsche Funktion)}, \tag{5}$$

und hierfür können wir auch setzen:

$$2u = \int_{x-y}^{x+y} vF(\xi)\, d\xi + \frac{\partial}{\partial y} \int_{x-y}^{x+y} vf(\xi)\, d\xi. \tag{6}$$

Die Gleichung § 133 (1) geht aber in (1) über, wenn wir

$$c = 1, \quad \mu = 1, \quad \varepsilon = 1, \quad 2\pi\lambda = 1, \quad j = e^{-t} u$$

setzen und dann y für t schreiben. Die Gleichung § 133 (3) wird jetzt

$$\beta^2 - 2i\beta - \alpha^2 = 0$$

und ergibt:

$$i\beta = -1 \pm i\sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Hiernach erhalten wir aus § 133 (7), wenn wir

$$A = A_1 + A_2, \quad B = i(A_1 - A_2)$$

setzen:

$$(7) \qquad u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [A \cos y\sqrt{\alpha^2 - 1} + B \sin y\sqrt{\alpha^2 - 1}]\, e^{i\alpha x}\, d\alpha,$$

und für die Funktionen A, B von α erhält man aus § 133 (10) oder aus dem Fourierschen Lehrsatz:

$$(8) \qquad \begin{aligned} A &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{-i\alpha\xi}\, d\xi, \\ B &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha^2 - 1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\xi)\, e^{-i\alpha\xi}\, d\xi, \end{aligned}$$

also:

$$(9) \qquad 2u = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, e^{i\alpha(x-\xi)} \left[f(\xi) \cos y\sqrt{\alpha^2 - 1} + \frac{F(\xi)}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} \sin y\sqrt{\alpha^2 - 1} \right].$$

Dies können wir endlich auch so darstellen:

$$(10) \qquad \begin{aligned} 2u = &\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \frac{F(\xi) \sin y\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\, e^{i\alpha(x-\xi)} \\ &+ \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, \frac{f(\xi) \sin y\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\, e^{i\alpha(x-\xi)}. \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Übereinstimmung von (6) und (10) genügt es also, wenn für eine willkürliche Funktion $f(\xi)$ die Richtigkeit der Relation

$$(11) \qquad \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi)\, \frac{\sin y\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\, e^{i\alpha(x-\xi)} = \int\limits_{x-y}^{x+y} v\, f(\xi)\, d\xi$$

bewiesen werden kann, in der v durch (4) und (5) bestimmt ist.

Der Beweis dieser Formel läßt sich mit Hilfe eines bestimmten Integrals aus der Theorie der Besselschen Funktionen führen.

Wir haben nach Bd. I, § 71, (6):

$$J(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ix\cos\omega}\, d\omega \tag{12}$$

und daraus, wenn r, φ gegebene Größen sind:

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi J(r\sin\varphi\sin\vartheta)\, e^{ir\cos\varphi\cos\vartheta}\sin\vartheta\, d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ir(\cos\varphi\cos\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\cos\omega)}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega.\end{aligned} \tag{13}$$

Wir wollen nun φ, ϑ als Seiten, ω als den von ihnen eingeschlossenen Winkel in einem sphärischen Dreieck (abc) (Fig. 51) betrachten, so daß, wenn Θ die dem Winkel ω gegenüberliegende Seite bedeutet,

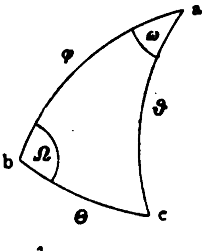
$$\cos\Theta = \cos\varphi\cos\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\cos\omega \tag{14}$$

ist, während $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega = do$ ein Flächenelement bei c auf der Einheitskugel ist. Demnach ergibt das Integral (13):

$$\int_0^\pi J(r\sin\varphi\sin\vartheta)\, e^{ir\cos\varphi\cos\vartheta}\sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int e^{ir\cos\Theta}\, do,$$

worin die Integration nach do über die ganze Kugelfläche auszudehnen ist.

Fig. 51.



Nehmen wir aber den Punkt b als Pol, so können wir dafür setzen, wenn Ω den der Seite ϑ gegenüberliegenden Winkel bedeutet:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\int_{-\pi}^{+\pi} e^{ir\cos\Theta}\sin\Theta\, d\Theta\, d\Omega = \frac{e^{ir} - e^{-ir}}{ir}, \tag{15}$$

und wir haben also, wenn wir

$$r\cos\varphi = m, \quad r\sin\varphi = n, \quad \cos\vartheta = \lambda$$

setzen, nach (13) die Integralformel:

$$\int_{-1}^{+1} J\left(n\sqrt{1-\lambda^2}\right) e^{im\lambda}\, d\lambda = \frac{2\sin\sqrt{m^2+n^2}}{\sqrt{m^2+n^2}}. \tag{16}$$

Diese Formel ist zunächst für reelle m, n bewiesen; da aber auf beiden Seiten durchaus eindeutige, endliche und stetige Funktionen, auch für komplexe m, n stehen, so muß diese Gleichung eine Identität sein, und wir können darin also auch m, n irgendwie komplex annehmen. Setzen wir also $m = -\alpha y$, $n = iy$, und dann noch λ für $y\lambda$, so folgt:

$$(17)\qquad \frac{\sin y\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} = \frac{1}{2}\int_{-y}^{+y} J(i\sqrt{y^2 - \lambda^2})\, e^{-i\alpha\lambda}\, d\lambda.$$

Dies wenden wir an zur Umformung des Ausdruckes

$$(18)\qquad U = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, f(\xi)\, \frac{\sin y\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}\, e^{i\alpha(x-\xi)}.$$

Wenn wir darin die Integrationsfolge vertauschen, und für den sinus den Ausdruck aus (17) einsetzen, so folgt:

$$(19)\qquad U = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-y}^{+y} d\lambda\, J(i\sqrt{y^2 - \lambda^2})\, e^{i\alpha[(x-\xi)-\lambda]},$$

und nach dem Fourierschen Lehrsatz [§ 133 (9)] ist

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-y}^{+y} d\lambda\, J(i\sqrt{y^2 - \lambda^2})\, e^{i\alpha[(x-\xi)-\lambda]} \\ &= J[i\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}] \quad \text{wenn } (x-\xi)^2 < y^2, \\ &= 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{wenn } (x-\xi)^2 > y^2. \end{aligned}$$

Demnach folgt aus (19):

$$(21)\qquad U = \int_{x-y}^{x+y} f(\xi)\, J[i\sqrt{y^2 - (x-\xi)^2}]\, d\xi,$$

wodurch die Formel (11) bewiesen ist.

Siebenzehnter Abschnitt.

Reflexion elektrischer Schwingungen.

---

§ 136.

Reflexion ebener elektromagnetischer Wellen.

Die elektromagnetischen Grundgleichungen haben sich am besten bewährt bei der Anwendung auf die Theorie der Versuche, die Hertz über die Fortpflanzung elektrischer Wellen angestellt und durch die er alle wesentlichen Eigenschaften der Lichterscheinungen auch an elektrischen Wellen nachgewiesen hat. Um einen Ausgangspunkt für die Theorie dieser Erscheinungen zu gewinnen, betrachten wir zunächst einen ganz einfachen Fall.

In einem unbegrenzten Felde bestehe ein elektromagnetischer Zustand, der nur von einer räumlichen Koordinate x und von der Zeit t abhängt. Von den sechs Komponenten der elektrischen und magnetischen Kraft seien

$$\begin{array}{lll} E_x = 0, & E_y = E, & E_z = 0, \\ M_x = 0, & M_y = 0, & M_z = M, \end{array}$$

und E und M seien Funktionen von x und t.

Die Maxwellschen Gleichungen [Bd. I, § 163 (4), (5)] reduzieren sich bei dieser Annahme auf zwei:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + 4 \pi \lambda E &= - c \frac{\partial M}{\partial x}, \\ c \frac{\partial E}{\partial x} &= - \mu \frac{\partial M}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wir nehmen ferner an, daß ein von der yz-Ebene begrenzter, sonst aber unbegrenzter Leiter mit der Luft oder dem leeren Raum in Berührung stehe. Dann sind:

$$(2) \qquad \begin{array}{ll} \text{für } x > 0, & \varepsilon = \mu = 1, \quad \lambda = 0, \\ \text{für } x < 0, & \varepsilon, \mu, \lambda, \text{ positive Konstanten.} \end{array}$$

Bezeichnen wir mit E, M die Werte dieser Funktionen auf der Seite der positiven x, also im Dielektrikum, mit E', M' dieselben Funktionen für negative x, also im Leiter, so erhalten wir noch als Grenzbedingung [Bd. I, § 167, (1)]:

(3) $$\text{für } x = 0 \text{ ist } E = E', \quad M = M'.$$

Zur vollständigen Bestimmung von E und M wäre noch die Kenntnis des Anfangszustandes erforderlich. Statt dessen suchen wir partikulare Lösungen, wie sie aus der Annahme einfacher Sinusschwingungen hervorgehen. Wir setzen also:

(4) $$\begin{aligned} E &= U e^{i\alpha t}, & E' &= U' e^{i\alpha t}, \\ M &= V e^{i\alpha t}, & M' &= V' e^{i\alpha t}, \end{aligned}$$

worin U, V, U', V' Funktionen von x allein sind; α ist eine reelle Konstante, die mit der Schwingungsdauer der Oszillation, T, durch die Gleichung zusammenhängt:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}.$$

Die Ausdrücke (4) ergeben sich dann in imaginärer Form, von der im Endresultat nur der reelle Teil beizubehalten ist.

Zur Bestimmung der Funktionen U, V, U', V', die gleichfalls imaginär sein können, erhalten wir nun aus (1) die folgenden Differentialgleichungen:

(5) $$\begin{aligned} i\alpha U &= -c\frac{dV}{dx}, \\ i\alpha V &= -c\frac{dU}{dx}, \end{aligned} \qquad x > 0$$

(6) $$\begin{aligned} (i\alpha\varepsilon + 4\pi\lambda)\, U' &= -c\frac{dV'}{dx}, \\ i\alpha\mu\, V' &= -c\frac{dU'}{dx}, \end{aligned} \qquad x < 0$$

und durch Integration von (5) erhält man:

(7) $$\begin{aligned} U &= a_1 e^{\frac{i\alpha}{c}x} + a_2 e^{-\frac{i\alpha}{c}x}, \\ V &= -a_1 e^{\frac{i\alpha}{c}x} + a_2 e^{-\frac{i\alpha}{c}x}, \end{aligned} \qquad x > 0,$$

worin a_1, a_2 Konstanten sind, die gleichfalls imaginär sein können. Um (6) zu integrieren, haben wir zwei partikulare Integrale:

(8) $$U' = a' e^{\alpha\frac{(\varrho + i\sigma)x}{c}}, \quad V' = a'' e^{\alpha\frac{(\varrho + i\sigma)x}{c}}, \quad x < 0$$

zu bilden, und erhalten zunächst durch Elimination von a', b' für $\varrho + i\sigma$ die quadratische Gleichung:

$$(9) \qquad (\varrho + i\sigma)^2 = i\mu\left(i\varepsilon + \frac{4\pi\lambda}{\alpha}\right) = -\mu\varepsilon + 2i\mu T\lambda.$$

Wenn λ nicht verschwindet, so ist der Ausdruck auf der rechten Seite nicht negativ reell, und folglich kann ϱ nicht gleich Null sein. Wir setzen also:

$$(10) \qquad \varrho + i\sigma = \sqrt{-\mu\varepsilon + 2i\mu T\lambda},$$

und behalten von den beiden Werten der Wurzel nur den einen bei, in dem der reelle Teil ϱ einen positiven Wert hat. Denn bei negativem ϱ würden die Ausdrücke (8) für ein unendlich großes negatives x unendlich groß werden, was unmöglich ist. Zwischen a' und a'' ergibt sich aus (6) noch die Beziehung:

$$(11) \qquad a'' = -a'\,\frac{\varrho + i\sigma}{i\mu},$$

und a' ist eine Konstante, die ebenfalls imaginär sein kann.

Um nun das Ergebnis in reelle Form zu bringen, ersetzen wir a_1, a_2, a' durch $a_1 + ib_1$, $a_2 + ib_2$, $a' + ib'$, und verstehen unter a_1, b_1, a_2, b_2, a', b' reelle Konstanten. Dann ergibt sich aus (7), (4):

$$E = (a_1 + ib_1)e^{i\alpha\left(t+\frac{x}{c}\right)} + (a_2 + ib_2)e^{i\alpha\left(t-\frac{x}{c}\right)},$$

und wenn wir nur den reellen Teil beibehalten für $x > 0$:

$$(12) \qquad \begin{aligned} E = {} & a_1\cos\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + a_2\cos\alpha\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ & - b_1\sin\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) - b_2\sin\alpha\left(t - \frac{x}{c}\right), \end{aligned}$$

und ebenso:

$$(13) \qquad \begin{aligned} M = {} & -a_1\cos\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + a_2\cos\alpha\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ & + b_1\sin\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) - b_2\sin\alpha\left(t - \frac{x}{c}\right). \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind auch in bezug auf x periodisch, und ihre Periode L, die die Wellenlänge genannt wird, hängt mit der Schwingungsdauer T durch die Gleichung zusammen:

$$(14) \qquad L = \frac{2\pi c}{\alpha} = cT,$$

wonach das Verhältnis zwischen der Wellenlänge und Schwingungsdauer (im leeren Raume und in der Luft) gleich der Lichtgeschwindigkeit ist.

Setzen wir noch, indem wir mit A_1, A_2, α_1, α_2 neue Konstanten bezeichnen:

$$
(15)\qquad \begin{aligned} a_1 &= A_1 \cos\alpha_1, & b_1 &= A_1 \sin\alpha_1, \\ a_2 &= A_2 \cos\alpha_2, & b_2 &= A_2 \sin\alpha_2, \end{aligned}
$$

so erhalten wir:

$$
(16)\qquad \begin{aligned} E &= A_1 \cos\left[\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + \alpha_1\right] + A_2 \cos\left[\alpha\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha_2\right], \\ M &= -A_1 \cos\left[\alpha\left(t + \frac{x}{c}\right) + \alpha_1\right] + A_2 \cos\left[\alpha\left(t - \frac{x}{c}\right) + \alpha_2\right], \end{aligned}
$$

wofür wir auch abgekürzt setzen:

$$
(17)\qquad \begin{aligned} E &= A_1 \cos\Theta_1 + A_2 \cos\Theta_2, \\ M &= -A_1 \cos\Theta_1 + A_2 \cos\Theta_2. \end{aligned}
$$

Der erste Teil in diesen beiden Ausdrücken, der von Θ_1 abhängt, bleibt ungeändert, wenn die Zeit t um ebensoviel wächst, als x/c abnimmt, und stellt daher eine in der Richtung der negativen x-Achse laufende Welle dar. Ebenso stellt der zweite eine in der Richtung der positiven x laufende Welle dar. Betrachten wir die Ebene $x = 0$ als spiegelnde Fläche, so können wir die erste die einfallende, die zweite die reflektierte Welle nennen.

Unter der Phase einer Welle, die durch einen einfachen Cosinus dargestellt ist, versteht man den Überschuß des unter dem Cosinuszeichen stehenden Winkels über das nächst kleinere Vielfache von 2π. Es haben daher nach (16) die elektrischen und magnetischen Wellen die gleiche Phase. Dagegen wird bei der einfallenden und der reflektierten Welle im allgemeinen ein Phasenunterschied stattfinden.

Die absoluten Werte der Koeffizienten A_1, A_2 heißen die Amplituden der beiden Wellen. Nach Bd. I, § 164, (6) ergibt sich für die einfallende Welle der Energiestrom in der Richtung der negativen x-Achse $A_1^2 \cos^2\Theta_1$ und für die reflektierte Welle in der Richtung der positiven x-Achse $A_2^2 \cos^2\Theta_2$. Die Quadrate der Amplituden A_1^2, A_2^2 heißen die Intensitäten der beiden Wellen. Um aber die Beziehung zwischen den Phasen und Amplituden der beiden Wellen zu finden, müssen wir auf den Vorgang im Leiter, also auf die Ausdrücke E' und M' und die Grenzbedingungen (3) eingehen.

§ 137.

Eindringen der Welle in den Leiter.

Für die in den Leiter eindringende Welle, also für $x < 0$, erhalten wir, wenn wir $a' + ib'$ für a' in (8) einsetzen, nach (4) und (11) (§ 136):

$$(1) \quad \begin{aligned} E' &= \quad (a' + ib') e^{\frac{2\pi\varrho x}{Tc}} e^{i\alpha\left(t + \frac{\sigma x}{c}\right)}, \\ \mu M' &= -(a' + ib')(\sigma - i\varrho) e^{\frac{2\pi\varrho x}{Tc}} e^{i\alpha\left(t + \frac{\sigma x}{c}\right)}, \end{aligned}$$

oder wenn wir setzen:

$$(2) \qquad a' + ib' = A' e^{i\alpha'}, \qquad \sigma - i\varrho = R e^{ir}$$

und den reellen Teil beibehalten:

$$(3) \quad \begin{aligned} E' &= \quad A' e^{\frac{2\pi\varrho x}{Tc}} \cos\left[\alpha\left(t + \frac{\sigma x}{c}\right) + \alpha'\right], \\ \mu M' &= -R A' e^{\frac{2\pi\varrho x}{Tc}} \cos\left[\alpha\left(t + \frac{\sigma x}{c}\right) + \alpha' + r\right]. \end{aligned}$$

Es dringt also nur eine Welle in das Innere des Leiters vor, und zwar mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c' = \frac{c}{\sigma}.$$

Die Schwingungsdauer ist dieselbe wie im Dielektrikum, aber die Wellenlänge ist

$$L' = \frac{L}{\sigma}.$$

Es findet außerdem eine Phasendifferenz zwischen der elektrischen und magnetischen Welle statt, die durch die Größe r ausgedrückt ist.

Beide Komponenten E' und M' haben den Faktor

$$(4) \qquad D = e^{\frac{2\pi\varrho x}{Tc}} = e^{\frac{2\pi\varrho x}{L}},$$

der um so kleiner wird, je größer $-x$ wird, der also eine Dämpfung der Welle beim Fortschreiten bedeutet.

Um nun die Beziehung zwischen der einfallenden, der reflektierten und der eindringenden Welle zu erhalten, müssen wir auf die Grenzbedingungen § 136 (3) zurückgehen.

Wir erhalten für $x = 0$ aus (3) und § 136 (16):

$$(5)\qquad \begin{aligned} E &= A_1 \cos(\alpha t + \alpha_1) + A_2 \cos(\alpha t + \alpha_2), \\ M &= -A_1 \cos(\alpha t + \alpha_1) + A_2 \cos(\alpha t + \alpha_2); \end{aligned}$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} E' &= A' \cos(\alpha t + \alpha'), \\ \mu M' &= -R A' \cos(\alpha t + \alpha' + r), \end{aligned}$$

und da für $x = 0$ und für alle Zeit $E = E'$, $M = M'$ sein soll, so folgt:

$$(7)\qquad \begin{aligned} A' \cos\alpha' &= A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2, \\ A' \sin\alpha' &= A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2; \end{aligned}$$

$$(8)\qquad \begin{aligned} R A' \cos(\alpha' + r) &= \mu(A_1 \cos\alpha_1 - A_2 \cos\alpha_2), \\ R A' \sin(\alpha' + r) &= \mu(A_1 \sin\alpha_1 - A_2 \sin\alpha_2). \end{aligned}$$

Hierin sind R, r, μ als gegebene Konstanten zu betrachten, die von der Natur des Mittels und von der Schwingungsdauer des einfallenden Lichtes abhängen [§ 136 (10)], und man hat also in (7) und (8) vier lineare Gleichungen, aus denen $A_2 \cos\alpha_2$, $A_2 \sin\alpha_2$, $A' \cos\alpha'$, $A' \sin\alpha'$ bestimmt werden können, wenn $A_1 \cos\alpha_1$, $A_1 \sin\alpha_1$, d. h. Amplitude und Phase der einfallenden Welle gegeben sind. Der Phasenunterschied $\alpha_1 - \alpha_2$ ist außer von den Konstanten des reflektierenden Mediums von der Schwingungsdauer T abhängig.

Der dämpfende Faktor D hängt, wie man aus (4) sieht, vom Leitvermögen λ und von der Wellenlänge L oder der Schwingungsdauer T ab. Nehmen wir das Produkt $T\lambda$, was eine reine Zahl ist, im Vergleich zu $\varepsilon\mu$ als sehr groß an, so ergibt sich aus § 136 (10) (wegen $\sqrt{2i} = 1 + i$) der genäherte Wert

$$\varrho = \sqrt{T\lambda\mu},$$

also

$$(9)\qquad \frac{\varrho}{T} = \sqrt{\frac{\lambda\mu}{T}}.$$

Je größer dieser Wert ist, um so weniger tief wird die Welle in den Körper merklich eindringen, und bei genügend großem Werte wird man das Eindringen gänzlich vernachlässigen können. Solche Körper, bei denen dies gestattet ist, bei denen also von dem Eindringen elektromagnetischer Wellen gänzlich abgesehen werden kann, heißen nach Hertz vollkommene Leiter[1]), und die Metalle können erfahrungsmäßig zu diesen gerechnet werden.

Ob aber ein Körper als vollkommener Leiter zu betrachten ist oder nicht, wird außer von seinem Leitvermögen auch noch von der Wellenlänge oder der Schwingungsdauer der einfallenden Welle abhängen und wird bei schnelleren Oszillationen eher gestattet sein als bei langsamen.

Wenn man einen vollkommenen Leiter annehmen darf, so hat man sich nur noch mit der einfallenden und reflektierten Welle zu befassen, und die Grenzbedingung reduziert sich einfach darauf, daß an der Grenze des Leiters

$$E = 0$$

sein muß.

Die erste Gleichung (5) ergibt dann für diesen Fall

$$A_2 = -A_1, \qquad \alpha_2 = \alpha_1.$$

Die magnetische Komponente wird an der Grenze nicht gleich Null, und es muß, was auch der Faktor R in den Formeln (3) anzeigt, noch ein gewisses Eindringen der magnetischen Welle in den Leiter angenommen werden.

§ 138.

Kugelförmige Leiter.

Wir betrachten nun die elektromagnetischen Wellen, die sich bilden können, wenn ein vollkommener Leiter, wie wir ihn im vorigen Paragraphen definiert haben, von zunächst noch beliebiger Gestalt von einem unbegrenzten Dielektrikum umgeben ist. An der Grenze des Leiters sind dann die Tangentialkompo-

---

1) Bei den schnellsten von Hertz angewandten Schwingungen ist $T = 22 . 10^{-10}$ und für ein Metall von hohem Leitvermögen, etwa wie Silber, ist das hier im elektrostatischen Maße zu messende λ abgerundet gleich $\frac{9}{16} \cdot 10^{15}$, folglich ist

$$\frac{\lambda}{T} = \frac{9 . 10^{25}}{16 . 22}$$

oder ungefähr $26 . 10^{22}$. Für Lichtschwingungen von der Farbe der Natriumlinie ist

$$T = \frac{589}{3}\, 10^{-17}$$

und folglich $\frac{\lambda}{T}$ ungefähr $3 . 10^{29}$.

nenten der elektrischen Kraft gleich Null anzunehmen, und hierdurch und durch den Anfangszustand und durch das Verhalten im Unendlichen ist nach Bd. I, § 167 die Lösung des Problems vollständig bestimmt.

Um einen einfachen Fall zu betrachten, wollen wir einen kugelförmigen Leiter annehmen, dessen Radius wir mit a bezeichnen. Wir führen dann naturgemäß Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein, und erhalten die Gleichungen aus § 129 (2), (3). Es ist dann

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2,$$

und wir haben in den erwähnten Gleichungen

$$p, \quad q, \quad r, \qquad e, \quad e', \quad e''$$

durch

$$r, \quad \vartheta, \quad \varphi, \qquad 1, \quad r^2, \quad r^2 \sin^2\vartheta$$

zu ersetzen, weil dr, $d\vartheta$, $d\varphi$ ein Rechtssystem bilden [Bd. I, § 44].

Es ergibt sich dann nach § 129 (2), (3) für das Dielektrikum das folgende System von Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{c}{r^2 \sin\vartheta}\left(\frac{\partial r \sin\vartheta\, M_\varphi}{\partial\vartheta} - \frac{\partial r M_\vartheta}{\partial\varphi}\right) &= \frac{\partial E_r}{\partial t}, \\ \frac{c}{r \sin\vartheta}\left(\frac{\partial M_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial r \sin\vartheta\, M_\varphi}{\partial r}\right) &= \frac{\partial E_\vartheta}{\partial t}, \\ \frac{c}{r}\left(\frac{\partial r M_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial M_r}{\partial\vartheta}\right) &= \frac{\partial E_\varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{c}{r^2 \sin\vartheta}\left(\frac{\partial r \sin\vartheta\, E_\varphi}{\partial\vartheta} - \frac{\partial r E_\vartheta}{\partial\varphi}\right) &= -\frac{\partial M_r}{\partial t}, \\ \frac{c}{r \sin\vartheta}\left(\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial r \sin\vartheta\, E_\varphi}{\partial r}\right) &= -\frac{\partial M_\vartheta}{\partial t}, \\ \frac{c}{r}\left(\frac{\partial r E_\vartheta}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right) &= -\frac{\partial M_\varphi}{\partial t}. \end{aligned}$$

Für die Oberfläche der Kugel, deren Radius wir mit a bezeichnen, haben wir die Grenzbedingung:

$$(3) \qquad E_\vartheta = 0, \qquad E_\varphi = 0 \qquad \text{für } r = a.$$

Hierzu kommen noch die beiden Gleichungen (5), (6), § 129:

$$(4) \qquad \frac{\partial r^2 \sin\vartheta\, E_r}{\partial r} + \frac{\partial r \sin\vartheta\, E_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\partial r E_\varphi}{\partial\varphi} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial r^2 \sin\vartheta\, M_r}{\partial r} + \frac{\partial r \sin\vartheta\, M_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\partial r M_\varphi}{\partial\varphi} = 0.$$

Wenn man die erste Gleichung (1) nach t differentiiert und dann für $\partial M_\varphi / \partial t$, $\partial M_\vartheta / \partial t$ die Werte aus (2) setzt, so ergibt sich mit Benutzung von (4) eine Differentialgleichung für E_r:

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 E_r}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 r^2 E_r}{r^2 \partial r^2} + \frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta}}{r^2 \sin\vartheta \, \partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 E_r}{\partial \varphi^2} \right],$$

und aus (3) und (4) ergibt sich für E_r die Grenzbedingung

$$(7) \qquad \frac{\partial r^2 E_r}{\partial r} = 0 \qquad \text{für } r = a.$$

Mit Benutzung der Umformung des Ausdruckes ΔU auf Polarkoordinaten [Bd. I, § 44 (11)] können wir die Gleichung (6) auch in der Form der Wellengleichung darstellen:

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 r E_r}{\partial t^2} = c^2 \Delta (r E_r).$$

Es kommt außerdem noch eine Bedingung im Unendlichen hinzu, die von der besonderen Natur der Aufgabe abhängt.

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir annehmen, daß ein in der Richtung der positiven z-Achse fortschreitender ebener Wellenzug auf die Kugel trifft. Im Unendlichen ist dann der Einfluß der Kugel nicht mehr merklich, und die Bewegung geschieht so, als wenn die Kugel nicht vorhanden wäre. Wir wollen annehmen, daß bei der ebenen Welle die elektrische Kraft parallel der x-Achse sei. Dann können wir, wenn wir mit C die Amplitude bezeichnen, nach § 136 den elektrischen Vektor so darstellen:

$$(9) \qquad E_x = C e^{ik(ct - z)},$$

worin k eine Konstante ist, die bei einer rein periodischen Bewegung reell ist, bei einer gedämpften Bewegung einen imaginären Bestandteil hat. Wäre die Kugel also nicht vorhanden, so wäre

$$E_r = E_x \cos(r, x) = E_x \sin\vartheta \cos\varphi,$$

wenn wir das Azimut φ von der xz-Ebene aus rechnen.

Wir erhalten also für unendlich große Werte von r die Bedingung

$$(10) \qquad E_r = C e^{ik(ct - r\cos\vartheta)} \sin\vartheta \cos\varphi.$$

Wir wollen diese Bedingung etwas allgemeiner fassen und annehmen, es sei Φ irgend eine gegebene Funktion, die im ganzen Felde der Bedingung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Phi \tag{11}$$

genügt, der sich die Funktion $r E_r$ im Unendlichen asymptotisch anschließt. Setzen wir dann

$$r E_r - \Phi = W, \tag{12}$$

so hat W nach (8) und (11) den Bedingungen zu genügen:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = c^2 \Delta W, \tag{13}$$

im ganzen Felde außerhalb der Kugel,

$$W = 0 \quad \text{im Unendlichen,} \tag{14}$$

$$\frac{\partial r W}{\partial r} + \frac{\partial r \Phi}{\partial r} = 0 \quad \text{für } r = a \text{ [nach (7)].} \tag{15}$$

Hierdurch sind die Bedingungen für die Komponente E_r vollständig von den übrigen getrennt, und man kann diese Komponente für sich bestimmen. Wenn aber diese Bestimmung auch gelungen ist, so können damit die übrigen Komponenten doch noch nicht ohne neue Integration bestimmt werden. Man muß etwa noch die Funktion M_r ermitteln, für die man dieselbe Differentialgleichung erhält wie für E_r, nämlich:

$$\frac{\partial^2 r M_r}{\partial t^2} = c^2 \Delta (r M_r), \tag{16}$$

und aus der ersten Gleichung (2) erhält man als Grenzbedingung die, daß M_r für $r = a$ von der Zeit unabhängig sein soll.

Wenn man M_r und E_r als bekannt ansieht, so erhält man aus (2) und (4) Differentialgleichungen für E_φ und E_ϑ, in denen nach der Variablen r nicht mehr differentiiert ist.

Wir wollen im folgenden noch einiges über die Integration der Differentialgleichung (16) ausführen, unter der Voraussetzung, daß M_r an der Oberfläche der Kugel gleich Null oder gleich einer gegebenen Funktion vom Ort und von der Zeit sein soll. Ähnliche Betrachtungen lassen sich über E_r machen, nur daß da nach (7) nicht die Funktion E_r selbst, sondern $\partial r^2 E_r / \partial r$ an der Oberfläche gegeben ist.

§ 139.

Partikulare Integrale.

Die Differentialgleichung § 138 (16) nimmt, wenn $r M = U$ gesetzt wird, auf Polarkoordinaten bezogen, die Gestalt an:

$$(1)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 r U}{r \partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right),$$

und es ist leicht, partikulare Integrale von ihr zu finden. Wir setzen

$$(2)\qquad U = e^{ikt} R Z_n$$

und verstehen unter k eine Konstante, die reell oder komplex sein kann, unter Z_n eine allgemeine Kugelfunktion $n$ter Ordnung, d. h. eine Lösung der Differentialgleichung:

$$(3)\quad \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial Z_n}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2 Z_n}{\partial \varphi^2} + n(n+1) Z_n = 0.$$

Soll dann Z_n auf der ganzen Kugelfläche endlich und stetig sein, so muß, wie im § 122 des ersten Bandes gezeigt ist, n eine ganze Zahl sein, die wir $\gtrless 0$ annehmen können. Die Funktion Z_n enthält [Bd. I, § 121 (12)] $2n + 1$ unbestimmte konstante Koeffizienten, die hier auch komplex angenommen werden können.

Von R nehmen wir an, daß es eine Funktion von r allein sei, und erhalten daraus nach (1) eine Differentialgleichung für R:

$$(4)\qquad \frac{d^2 r R}{r\, d r^2} + \left(\frac{k^2}{c^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R = 0.$$

Auf diese Differentialgleichung sind wir bereits bei der Theorie der Wärmeleitung in der Kugel gekommen und haben dort dafür die Integrale gefunden [§ 56 (8), § 57 (5)]:

$$(5)\quad \begin{aligned} R_1 &= e^{+\frac{ikr}{c}} \sum_{\nu=0}^{n} \left(-\frac{2ikr}{c}\right)^{-\nu-1} \frac{\Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(\nu)}, \\ R_2 &= e^{-\frac{ikr}{c}} \sum_{\nu=0}^{n} \left(+\frac{2ikr}{c}\right)^{-\nu-1} \frac{\Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(\nu)}. \end{aligned}$$

Für R kann eine lineare Kombination $A_1 R_1 + A_2 R_2$ dieser beiden partikularen Lösungen gesetzt werden, worin A_1 und A_2 auch komplex sein können, und man erhält so aus (2) einen komplexen Ausdruck, von dem im Endresultat nur der reelle Teil beizubehalten ist.

§ 140.

Anfangszustand.

Wenn U an der Kugeloberfläche, also für $r = a$ verschwinden soll, so kann man das Verhältnis der Konstanten A_1, A_2 in

$A_1 R_1 + A_2 R_2$ so bestimmen, daß R für $r = a$ verschwindet. Man setze etwa:

(1) $$iR = R_2(a) R_1(r) - R_1(a) R_2(r),$$

so daß R reell wird. Dann ergibt sich aus (2), § 139:

(2) $$U = e^{ikt} R(X_n + i Y_n),$$

wenn $Z_n = X_n + i Y_n$ gesetzt ist und X_n, Y_n reelle Kugelfunktionen bedeuten. In reeller Form ergibt sich:

(3) $$U = R(X_n \cos kt - Y_n \sin kt).$$

Für k ergibt sich hier nun keine weitere Bedingung, und wir können dem k alle reellen positiven Werte beilegen. Die Konstanten der Kugelfunktionen X_n, Y_n können willkürliche Funktionen von k sein, und man kann eine Summe solcher Ausdrücke U nehmen. Es ergibt sich dann:

(4) $$U = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} R(X_n \cos kt - Y_n \sin kt)\, dk,$$

und es müßten also, wenn $U = f$, $\partial U/\partial t = F$ für $t = 0$ gegebene Ortsfunktionen sind, diese willkürlichen Funktionen so bestimmt werden, daß

(5) $$f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} R X_n\, dk, \qquad F = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} R Y_n k\, dk.$$

Wenn man die Funktionen f, F für ein unbestimmtes r nach Kugelfunktionen entwickelt, so erhält man aus (5) die Aufgabe, eine gegebene Funktion $\psi(r)$ von r durch Bestimmung der Funktion $\varphi(k)$ durch ein Integral der Form

(6) $$\psi(r) = \int_0^{\infty} R \varphi(k)\, dk$$

darzustellen. Eine solche Darstellung wäre analog dem Fourierschen Lehrsatze.

Anders verhält sich die Sache, wenn wir eine von zwei konzentrischen Kugelflächen begrenzte Schale betrachten, und annehmen, daß an beiden Kugelflächen $U = 0$ sein soll. Dann ergibt sich, wenn a und b die beiden Kugelradien sind, aus (1) die Gleichung

$$R_2(a) R_1(b) - R_1(a) R_2(b) = 0, \tag{7}$$

was eine transzendente Gleichung für k ist, von der sich nachweisen läßt, daß sie nur reelle Wurzeln hat. Während also im vorigen Falle alle Werte von k vorkamen, bleiben hier nur gewisse diskrete Werte, die den Eigenschwingungen der Kugelschale entsprechen. Es ergibt sich dann anstatt der Gleichung (4):

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k R(X_n \cos kt - Y_n \sin kt), \tag{8}$$

worin sich die Summation in bezug auf k auf alle Wurzeln der transzendenten Gleichung (7) bezieht, und die Bestimmung der Koeffizienten aus dem Anfangszustande fordert dann die Darstellung einer gegebenen Funktion $\psi(r)$ durch eine Reihe von der Form:

$$\psi(r) = \sum_k A_k R_k, \tag{9}$$

worin die A_k Konstanten sind, wenn mit R_k die Funktion R für ein bestimmtes k bezeichnet wird.

Setzen wir aber in der Differentialgleichung § 139 (4) für k zwei verschiedene Werte k_1, k_2, so ergibt sich:

$$\frac{d^2 r R_{k_1}}{dr^2} = \left(\frac{n(n+1)}{r^2} - \frac{k_1^2}{c^2}\right) r R_{k_1},$$

$$\frac{d^2 r R_{k_2}}{dr^2} = \left(\frac{n(n+1)}{r^2} - \frac{k_2^2}{c^2}\right) r R_{k_2},$$

und wenn man die erste dieser Gleichungen mit $r R_{k_2}$, die zweite mit $r R_{k_1}$ multipliziert und subtrahiert, so folgt:

$$\frac{d}{dr}\left(r R_{k_2} \frac{d r R_{k_1}}{dr} - r R_{k_1} \frac{d r R_{k_2}}{dr}\right) = \frac{k_2^2 - k_1^2}{c^2} r^2 R_{k_1} R_{k_2},$$

und folglich durch Integration zwischen den Grenzen a und b, wenn k_1^2 und k_2^2 voneinander verschieden sind, da R_{k_1}, R_{k_2} an beiden Grenzen verschwinden:

$$\int_a^b R_{k_1} R_{k_2} r^2 dr = 0, \tag{10}$$

und hierdurch lassen sich in der Entwickelung (9) die Koeffizienten A_k nach der Fourierschen Methode bestimmen. Hieraus würde sich wohl auch durch den Grenzübergang zu $b \doteq \infty$ die Integraldarstellung (6) ableiten lassen.

§ 141.

Periodische Lösungen.

Wenn die Funktion U an der Kugeloberfläche gleich einer gegebenen Funktion Φ der Zeit sein soll, so ist dadurch die Funktion nicht völlig bestimmt, sondern man kann eine beliebige Lösung hinzufügen, die an der Oberfläche verschwindet, wie wir sie im vorigen Paragraphen betrachtet haben, d. h. man kann noch einen beliebigen Anfangszustand hinzufügen. Andererseits kann man, wenn irgend eine partikulare Lösung U gefunden ist, die an der Oberfläche in Φ übergeht, daraus jede andere Lösung herleiten, indem man einen geeigneten Anfangszustand annimmt.

Wir wollen hier die partikulare Lösung § 139 (2):

$$U = e^{ikt} R Z_n \tag{1}$$

betrachten, worin wir unter k eine irgendwie gegebene Konstante verstehen. Ist k reell, so ist durch (1) ein in bezug auf die Zeit periodischer Zustand, eine Wellenbewegung, dargestellt.

Um die Bedeutung dieses Ausdruckes etwas näher zu diskutieren, setzen wir, um in den Funktionen § 139 (5) das Reelle vom Imaginären zu trennen:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{2ikr}{c}\right)^{-\nu-1} \frac{\Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(\nu)} = i(S_1 + iS_2) = iSe^{ik\varrho}, \tag{2}$$

also

$$S_1 = S\cos k\varrho, \qquad S_2 = S\sin k\varrho$$

und erhalten, wenn wir die Entwickelung (2) in R_2 [§ 139, (5)] einsetzen und i mit $-i$ vertauschen:

$$\begin{aligned} R_1 &= -\,iSe^{ik\left(\frac{r}{c}-\varrho\right)}, \\ R_2 &= \quad iSe^{-ik\left(\frac{r}{c}-\varrho\right)}, \end{aligned} \tag{3}$$

und hierin sind S und ϱ reelle Funktionen von r. Die Funktion

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}$$

verschwindet mit unendlich wachsendem r. Die Reihe S_1 beginnt mit der (-1)ten, S_2 mit der (-2)ten Potenz von r; also verschwindet $S_2/S_1 = \operatorname{tang} k\varrho$ für ein unendlich wachsendes r, und folglich nähert sich ϱ der Grenze Null.

Ebenso setzen wir

$$iZ_n = iX_n - Y_n = Pe^{ik\Theta}, \tag{4}$$

worin P und Θ reelle Funktionen auf der Einheitskugel sind, die überall endliche Werte haben, und die noch $4n+2$ willkürliche reelle Konstanten enthalten. Einen willkürlichen komplexen konstanten Faktor des ganzen Ausdruckes brauchen wir dann nicht mehr zu berücksichtigen.

Wir erhalten demnach aus (1), (3) und (4) die beiden partikularen Lösungen:

$$U_1 = -PSe^{ik\left(t+\frac{r}{c}-\varrho+\Theta\right)},$$

$$U_2 = \quad PSe^{ik\left(t-\frac{r}{c}+\varrho+\Theta\right)},$$

oder in reeller Form:

$$U_1 = -PS\cos k\left(t+\frac{r}{c}-\varrho+\Theta\right),$$

$$U_2 = \quad PS\cos k\left(t-\frac{r}{c}+\varrho+\Theta\right),$$

von denen die erste eine aus dem Unendlichen mit der Geschwindigkeit c hereinlaufende, die zweite eine mit derselben Geschwindigkeit ins Unendliche hinauslaufende Welle darstellt.

§ 142.

Zusammenziehung der Maxwellschen Gleichungen.

Die Integration, die wir im § 139 durchgeführt haben, lieferte uns zunächst nur die eine Komponente E_r oder M_r, und es ist darum ein Verfahren wünschenswert, das uns die sämtlichen Komponenten mit einem Schlage liefert, oder wenigstens partikulare Werte, aus denen man durch willkürliche Konstanten die allgemeinen Ausdrücke zusammensetzen kann, mit denen man noch gegebenen Grenz- und Anfangsbedingungen genügen kann.

Für den Fall der Polarkoordinaten ist diese Aufgabe dadurch kompliziert, daß die in den einzelnen Komponenten auftretenden Kugelfunktionen nicht dieselben Konstanten enthalten. Trotzdem läßt sich auf dem folgenden Wege eine allgemeine Lösung finden.

Für die Schwingungen im Dielektrikum ($\mu = \varepsilon = 1$, $\lambda = 0$) haben wir die beiden Maxwellschen Vektorgleichungen (§ 123, I., II.):

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} c \operatorname{curl} \mathfrak{M} &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \\ c \operatorname{curl} \mathfrak{E} &= -\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \end{aligned}$$

und diese beiden Gleichungen lassen sich zu einer vereinigen, wenn wir die erste mit i multiplizieren und zur zweiten addieren:

$$\text{(2)} \qquad c \operatorname{curl} (\mathfrak{E} + i\mathfrak{M}) = i \frac{\partial (\mathfrak{E} + i\mathfrak{M})}{c t}.$$

Eine ähnliche Reduktion läßt sich aber mit geringen Modifikationen auch anwenden, wenn Leiter im Felde sind, vorausgesetzt, daß ε, μ, λ Konstanten sind, die übrigens in verschiedenen Teilen des Feldes verschiedene Werte haben können. Es gelten dann die allgemeinen Gleichungen:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} c \operatorname{curl} \mathfrak{M} &= \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda \mathfrak{E}, \\ c \operatorname{curl} \mathfrak{E} &= -\mu \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Wir machen, um partikulare Integrale zu ermitteln, zunächst, ähnlich wie im § 139, die Annahme:

$$\text{(4)} \qquad \mathfrak{E} = e^{ikt} \mathfrak{E}_1, \qquad \mathfrak{M} = e^{ikt} \mathfrak{M}_1,$$

worin $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{M}_1$ Vektoren bedeuten, die von t unabhängig sind. Ist k reell, so stellen die Ausdrücke (4) einen zeitlich periodischen Vorgang dar. Hat k einen positiv imaginären Bestandteil, so findet eine zeitliche Dämpfung statt.

Für $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{M}_1$ erhalten wir aus (3) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} c \operatorname{curl} \mathfrak{M}_1 &= (\varepsilon i k + 4\pi\lambda) \mathfrak{E}_1, \\ c \operatorname{curl} \mathfrak{E}_1 &= -\mu i k \mathfrak{M}_1, \end{aligned}$$

und wenn man die erste von diesen Gleichungen mit einem unbestimmten konstanten Koeffizienten σ multipliziert, und beide addiert:

$$\text{(5)} \qquad c \operatorname{curl} (\mathfrak{E}_1 + \sigma \mathfrak{M}_1) = (\varepsilon i k + 4\pi\lambda) \sigma \mathfrak{E}_1 - \mu i k \mathfrak{M}_1.$$

Wir bestimmen nun σ so, daß

$$-\mu i k = (\varepsilon i k + 4\pi\lambda) \sigma^2$$

wird, also

$$\text{(6)} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{-\mu i k}{\varepsilon i k + 4\pi\lambda}}$$

und setzen noch

$$\text{(7)} \qquad c h = (\varepsilon i k + 4\pi\lambda) \sigma = \sqrt{-\mu i k (\varepsilon i k + 4\pi\lambda)},$$

$$(8) \qquad \mathfrak{E}_1 + \sigma \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{A}.$$

Dann ergibt sich aus (5) für den Vektor $\mathfrak{A}$ die Gleichung:

$$(9) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{A} = h \mathfrak{A},$$

aus der nun die Komponenten von $\mathfrak{A}$ zu bestimmen sind. Der Faktor σ, der für den besonderen Fall $\lambda = 0$, $\mu = \varepsilon = 1$ in $\pm i$ übergeht, ist durch (6) wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel auf zwei Arten bestimmt. Entsprechend ergeben sich aus (7) zwei Werte von ch, die für den eben erwähnten speziellen Fall in $\mp k$ übergehen. Demnach sind, wenn $\mathfrak{A}$ für beide Zeichen von σ bestimmt ist, aus (8) $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{M}_1$ zu berechnen.

Man erhält natürlich $\mathfrak{A}$ und folglich $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{M}_1$ in komplexer Form, und kann in den Endformeln (4) noch i in $-i$ verwandeln.

§ 143.

Der Vektor $\mathfrak{A}$ in rechtwinkligen und in Polarkoordinaten.

Die Vektorgleichung (9) § 142 liefert in rechtwinkligen Koordinaten die drei Gleichungen für die Komponenten A_x, A_y, A_z:

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} &= h A_x, \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} &= h A_y, \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} &= h A_z. \end{aligned}$$

Versteht man unter a, b, c, α, β, γ Konstanten, und setzt

$$(2) \qquad \begin{aligned} A_x &= a e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \\ A_y &= b e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \\ A_z &= c e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}, \end{aligned}$$

so ergibt sich aus (1):

$$(3) \qquad \begin{aligned} b\gamma - c\beta &= iha, \\ c\alpha - a\gamma &= ihb, \\ a\beta - b\alpha &= ihc. \end{aligned}$$

Die Elimination von a, b, c aus diesen Gleichungen ergibt:

$$(4) \qquad h^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

und dann sind aus (3) die Verhältnisse $a : b : c$ zu bestimmen.

Führen wir aber in (9) § 142 Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein, so ergeben sich, wie in § 138 aus Bd. I, § 96 (5) die Gleichungen:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\left(\frac{\partial r\sin\vartheta A_\varphi}{\partial\vartheta}-\frac{\partial r A_\vartheta}{\partial\varphi}\right)&=hA_r,\\
\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial r\sin\vartheta A_\varphi}{\partial r}\right)&=hA_\vartheta,\\
\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r A_\vartheta}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)&=hA_\varphi.
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen vereinfachen wir weiter, indem wir

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
A_r &= B_r e^{im\varphi},\\
A_\vartheta &= B_\vartheta e^{im\varphi},\\
A_\varphi &= B_\varphi e^{im\varphi}
\end{aligned}
$$

setzen, worin die B_r, B_ϑ, B_φ von φ unabhängig sein sollen. Unter m wollen wir eine ganze Zahl verstehen, damit der Vektor $\mathfrak{A}$ in bezug auf φ periodisch mit der Periode 2π werde. Ist m von Null verschieden, so bekommen wir aus (6) je zwei Lösungen, die zwei gleichen und entgegengesetzten Werten von m entsprechen.

Nach dieser Annahme ergeben sich aus (5) für die B die folgenden Gleichungen:

$$(7)\qquad \frac{\partial r\sin\vartheta B_\varphi}{\partial\vartheta}=hr^2\sin\vartheta B_r+imrB_\vartheta,$$

$$(8)\qquad \frac{\partial r\sin\vartheta B_\varphi}{\partial r}=-hr\sin\vartheta B_\vartheta+imB_r,$$

$$(9)\qquad \frac{\partial rB_\vartheta}{\partial r}-\frac{\partial B_r}{\partial\vartheta}=hrB_\varphi.$$

Hieraus leitet man zuerst durch Elimination von B_ϑ, B_φ eine partielle Differentialgleichung für B_r ab. Wir erhalten zunächst, wenn wir die Gleichung (7) nach r, die Gleichung (8) nach ϑ differentiieren und dann subtrahieren, mit Benutzung der Gleichung (9):

$$(10)\qquad \sin\vartheta\frac{\partial r^2B_r}{\partial r}+r\frac{\partial\sin\vartheta B_\vartheta}{\partial\vartheta}=-imrB_\varphi.$$

Eliminiert man ferner B_ϑ aus den Gleichungen (7) und (8), indem man die erste mit h, die zweite mit $im/\sin\vartheta$ multipliziert, und dann beide addiert, so folgt:

$$(11)\quad h\frac{\partial r\sin\vartheta B_\varphi}{\partial\vartheta}+im\frac{\partial rB_\varphi}{\partial r}=\sin\vartheta\left(h^2r^2-\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)B_r.$$

Endlich eliminiert man noch B_ϑ aus (9) und (10). Dazu multipliziert man (9) mit $\sin\vartheta$ und differentiiert nach ϑ; die Gleichung (10) differentiiert man nach r und subtrahiert dann die erste von der zweiten; so folgt:

$$(12)\quad \sin\vartheta\,\frac{\partial^2 r^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{\partial \sin\vartheta\,\frac{\partial B_r}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} = -h\,\frac{\partial r \sin\vartheta\, B_\varphi}{\partial\vartheta} - im\,\frac{\partial r B_\varphi}{\partial r},$$

und wenn man hierin (11) benutzt, so folgt:

$$(13)\quad \frac{\partial^2 r^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{\partial \sin\vartheta\,\frac{\partial B_r}{\partial\vartheta}}{\sin\vartheta\,\partial\vartheta} + \left(h^2 r^2 - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right) B_r = 0,$$

und dies ist die gesuchte Gleichung für B_r.

§ 144.

Partikulare Integrale für B_r.

Wir haben jetzt zunächst partikulare Integrale der Differentialgleichung (13) § 143 zu suchen. Dazu setzen wir

$$(1)\quad r B_r = R\,\Theta$$

und nehmen an, daß R nur von r, Θ nur von ϑ abhängig sei. Substituieren wir dies, so ergibt sich nach Division mit $R\Theta$:

$$(2)\quad r\,\frac{d^2 rR}{R\,dr^2} + h^2 r^2 = -\frac{d\sin\vartheta\,\frac{d\Theta}{d\vartheta}}{\Theta\sin\vartheta\,d\vartheta} + \frac{m^2}{\sin^2\vartheta},$$

und da hierin die linke Seite nicht von ϑ, die rechte nicht von r abhängt, so folgt, daß beide Seiten einer Konstanten, die wir mit $n(n+1)$ bezeichnen, gleich sein müssen. Wir erhalten so die beiden Differentialgleichungen:

$$(3)\quad \frac{d\sin\vartheta\,\frac{d\Theta}{d\vartheta}}{\sin\vartheta\,d\vartheta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]\Theta = 0,$$

$$(4)\quad \frac{d^2 r R}{dr^2} + \left[h^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right] rR = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen führt auf die Kugelfunktionen, und aus den Sätzen von Bd. I, § 122 folgt, daß, wenn es sich um Funktionen handelt, die für alle Werte von ϑ, φ endlich und stetig sind, n eine ganze Zahl sein muß, die $\gtreqless m$ ist. Zu diesem Ergebnisse gelangen wir auch auf folgendem Wege:

Setzen wir $x = \cos\vartheta$, so wird die Gleichung (3)

$$(5)\quad (1-x^2)^2 \frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx} + [n(n+1)(1-x^2) - m^2]\,\Theta = 0,$$

und hieraus ergibt sich, daß Θ eine P-Funktion ist mit den singulären Punkten $x = +1$, $x = -1$, $x = \infty$. Wenn man die Anfänge der Entwickelungen nach Potenzen von $1-x$, $1+x$, $1/x$ sucht, so ergibt sich (§ 16):

$$(6)\qquad \Theta = P\begin{pmatrix} 1, & \infty, & -1 & \\ \frac{m}{2}, & -n, & \frac{m}{2} & x \\ -\frac{m}{2}, & n+1, & -\frac{m}{2} & \end{pmatrix}.$$

Es ist aber $1 - x = 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$, und daher können wir nach § 17 (2), (3) dafür auch setzen:

$$(7)\qquad \Theta = P\begin{pmatrix} \frac{m}{2} & -n, & \frac{m}{2} & \\ & & & \sin^2\frac{\vartheta}{2} \\ -\frac{m}{2} & 1+n, & -\frac{m}{2} & \end{pmatrix}.$$

Um die Schwierigkeit zu vermeiden, daß die Differenz eines Exponentenpaares eine ganze Zahl sei, wollen wir m und n zunächst noch unbestimmt lassen. Dann hat die P-Funktion (7) nur einen Zweig, der für $\vartheta = 0$ endlich und stetig bleibt, und für diesen erhält man nach der ersten Formel § 20 (1) den Ausdruck durch eine hypergeometrische Reihe

$$(8)\qquad \Theta = \left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)^m F\left(-n,\ n+1,\ m+1,\ \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

oder wenn wir

$$\sin^2\frac{\vartheta}{2} = z$$

setzen:

$$(9)\qquad \Theta = z^{\frac{m}{2}}(1-z)^{-\frac{m}{2}} F(-n,\ n+1,\ m+1,\ z),$$

und diese Funktion wird dann auch in dem zunächst ausgeschlossenen Fall, wenn m oder n oder beide ganze Zahlen sind, der Differentialgleichung (3) genügen. Ist m positiv oder Null, so ist der Ausdruck (9) für $z = 0$ endlich, während das andere partikulare Integral bei $z = 0$ nicht endlich ist. Wir nehmen also jetzt wieder m als ganze Zahl, $\gtrless 0$ an. Nun muß aber Θ auch für $\vartheta = \pi$, also für $z = 1$ endlich bleiben. Es ist aber nach dem Gaußschen Satze (am Schluß von § 13)

$$(10)\quad F(-n, n+1, m+1, 1) = \frac{\Pi(m)\,\Pi(m-1)}{\Pi(m+n)\,\Pi(m-n-1)},$$

und dies ist endlich und von Null verschieden, und folglich Θ für $z = 1$ unendlich, außer wenn $m+n$ oder $m-n-1$ eine negative ganze Zahl ist (§ 12). Es muß also einer dieser beiden Fälle eintreten, und da die Vertauschung von n mit $-n-1$ in der Differentialgleichung (3) nichts ändert, so beschränken wir die Allgemeinheit nicht weiter, wenn wir annehmen, daß $m-n-1$ eine negative ganze Zahl, also n eine ganze Zahl und

$$(11)\quad n \gtrless m$$

sein soll.

Daß Θ für $z = 1$ in der Tat endlich bleibt, ersieht man aus der anderen Darstellung (§ 7, L, 3):

$$(12)\quad \Theta = z^{\frac{m}{2}}(1-z)^{\frac{m}{2}} F(m-n, m+n+1, m+1, z),$$

in der die F-Funktion eine ganze rationale Funktion von z und folglich für $z = 1$ endlich ist.

Diese Funktionen Θ sind dieselben, die wir schon in Bd. I, § 121 betrachtet haben, und man erhält, wenn $P_n(x)$ die einfache Kugelfunktion $n$ter Ordnung bedeutet:

$$(13)\quad \Theta = (\sin\vartheta)^m \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}.$$

Nachdem Θ bestimmt ist, ergibt sich R aus der Differentialgleichung (4). Diese Gleichung haben wir schon im § 139 integriert und haben dort die beiden Integrale gefunden:

$$(14)\quad R = e^{\pm ihr} \sum_{\nu=0}^{n} (\mp 2ihr)^{-\nu-1} \frac{\Pi(n+\nu)}{\Pi(n-\nu)\,\Pi(\nu)},$$

und die Bestimmung von B_r, die wir hier durchgeführt haben, ist überhaupt nicht wesentlich verschieden von der Bestimmung von E_r oder M_r nach § 138, 139. Die Zerlegung der Kugelfunktion Z_n in ihre Bestandteile $e^{im\varphi}\Theta$ ist aber notwendig für die Bestimmung der anderen Komponenten.

§ 145.

Bestimmung von B_φ und B_ϑ.

Aus dem gefundenen Ausdruck für B_r lassen sich in völlig eindeutiger Weise, ohne neue Integration, die zugehörigen Ausdrücke von B_φ, B_ϑ bestimmen, die den drei Gleichungen § 143 (7), (8), (9) genügen müssen. Diese Gleichungen sind

$$\frac{\partial r \sin\vartheta\, B_\varphi}{\partial \vartheta} = h r^2 \sin\vartheta\, B_r + i m r B_\vartheta, \tag{1}$$

$$\frac{\partial r B_\varphi}{\partial r} = - h r B_\vartheta + \frac{i m}{\sin\vartheta} B_r, \tag{2}$$

$$\frac{\partial r B_\vartheta}{\partial r} = h r B_\varphi + \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta}. \tag{3}$$

Hierin setzen wir nach § 144 (1):

$$r B_r = R \Theta \tag{4}$$

und denken uns für Θ, R je ein Integral der Differentialgleichungen § 144 (3), (4) gesetzt.

Wenn wir die Gleichung (3) mit $\pm i$ multiplizieren und zu (2) addieren, so erhalten wir, wenn zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= r(B_\varphi + i B_\vartheta), \\ \Omega_2 &= r(B_\varphi - i B_\vartheta) \end{aligned} \tag{5}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_1}{\partial r} - h i \Omega_1 &= i\left(\frac{m}{\sin\vartheta} B_r + \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta}\right), \\ \frac{\partial \Omega_2}{\partial r} + h i \Omega_2 &= i\left(\frac{m}{\sin\vartheta} B_r - \frac{\partial B_r}{\partial \vartheta}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Wenn Ω_1, Ω_2 bekannt sind, so sind aus (5) auch sofort B_φ, B_ϑ bestimmt, nämlich

$$2 r B_\varphi = \Omega_1 + \Omega_2, \qquad 2 i r B_\vartheta = \Omega_1 - \Omega_2, \tag{7}$$

und wenn die beiden Gleichungen (6) befriedigt sind, so sind auch (2), (3) befriedigt, und umgekehrt. Um diesen Gleichungen zu genügen, setzen wir

$$\Omega_1 = R_1 \Theta_1, \qquad \Omega_2 = R_2 \Theta_2 \tag{8}$$

und nehmen an, daß R_1, R_2 Funktionen von r allein, Θ_1, Θ_2 Funktionen von ϑ allein seien. Wenn man dies und den Ausdruck (4) für B_r in (6) substituiert, so folgt:

$$
(9)\quad \begin{aligned}
\Theta_1\left(\frac{dR_1}{dr} - hiR_1\right) &= \frac{iR}{r}\left(\frac{m\Theta}{\sin\vartheta} + \frac{d\Theta}{d\vartheta}\right),\\
\Theta_2\left(\frac{dR_2}{dr} + hiR_2\right) &= \frac{iR}{r}\left(\frac{m\Theta}{\sin\vartheta} - \frac{d\Theta}{d\vartheta}\right),
\end{aligned}
$$

oder:

$$
(10)\quad \begin{aligned}
\frac{r}{iR}\left(\frac{dR_1}{dr} - hiR_1\right) &= \frac{1}{\Theta_1}\left(\frac{m\Theta}{\sin\vartheta} + \frac{d\Theta}{d\vartheta}\right),\\
\frac{r}{iR}\left(\frac{dR_2}{dr} + hiR_2\right) &= \frac{1}{\Theta_2}\left(\frac{m\Theta}{\sin\vartheta} - \frac{d\Theta}{d\vartheta}\right).
\end{aligned}
$$

Da in den beiden Gleichungen die linken Seiten nicht von ϑ, die rechten nicht von r abhängen, so müssen beide Seiten Konstanten gleich sein, und wir beschränken die Allgemeinheit nicht, wenn wir diese Konstante $= 1$ annehmen, weil die Ausdrücke (8) ungeändert bleiben, wenn R_1, Θ_1, R_2 Θ_2 durch aR_1, $a^{-1}\Theta_1$, bR_2, $b^{-1}\Theta_2$ ersetzt werden, worin a, b willkürliche Konstanten sind. Hiernach erhält man aus (10) die folgenden Gleichungen:

$$
(11)\quad \begin{aligned}
\Theta_1 &= \frac{m\Theta}{\sin\vartheta} + \frac{d\Theta}{d\vartheta},\\
\Theta_2 &= \frac{m\Theta}{\sin\vartheta} - \frac{d\Theta}{d\vartheta},
\end{aligned}
$$

$$
(12)\quad \begin{aligned}
\frac{dR_1}{dr} - hiR_1 &= \frac{iR}{r},\\
\frac{dR_2}{dr} + hiR_2 &= \frac{iR}{r}.
\end{aligned}
$$

Θ_1 und Θ_2 sind also durch (11) unmittelbar gegeben, und man könnte R_1, R_2 durch Integration von (12) bestimmen. Dabei würden aber noch unbestimmte Konstanten eingeführt, die nachträglich noch bestimmt werden müßten. Es ist darum von Wichtigkeit, daß sich auch R_1, R_2 ohne Integration ableiten lassen, und zwar haben wir hierzu die Gleichung (1), die ja auch noch befriedigt werden muß. Diese Gleichung gibt, wenn wir für rB_φ, rB_ϑ, rB_r die Ausdrücke (4), (7), (8) einführen:

$$
(13)\quad R_1\left(\frac{d\sin\vartheta\,\Theta_1}{d\vartheta} - m\Theta_1\right) + R_2\left(\frac{d\sin\vartheta\,\Theta_2}{d\vartheta} + m\Theta_2\right) = 2hr\sin\vartheta\,.\,\Theta R.
$$

Aus (11) aber ergibt sich:

$$\frac{d \sin\vartheta\, \Theta_1}{d\vartheta} - m\Theta_1 = \frac{d \sin\vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta}}{d\vartheta} - \frac{m^2}{\sin\vartheta}\,\Theta,$$

$$\frac{d \sin\vartheta\, \Theta_2}{d\vartheta} + m\Theta_2 = -\frac{d \sin\vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta}}{d\vartheta} + \frac{m^2}{\sin\vartheta}\,\Theta,$$

und daher mit Benutzung der Differentialgleichung für Θ [§ 144 (3)]:

$$\frac{d \sin\vartheta\, \Theta_1}{d\vartheta} - m\Theta_1 = -\,n(n+1)\sin\vartheta \,.\, \Theta,$$

$$\frac{d \sin\vartheta\, \Theta_2}{d\vartheta} + m\Theta_2 = \quad n(n+1)\sin\vartheta \,.\, \Theta,$$

woraus sich nach (13) ergibt:

$$n(n+1)(R_1 - R_2) = -2hrR. \tag{14}$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen (12), so folgt:

$$\frac{d(R_1 - R_2)}{dr} = hi(R_1 + R_2)$$

und folglich mit Benutzung von (14):

$$n(n+1)(R_1 + R_2) = 2i\,\frac{d r R}{dr} \tag{15}$$

und aus (14) und (15):

$$\begin{aligned} n(n+1) R_1 &= -\,hrR + i\,\frac{drR}{dr}, \\ n(n+1) R_2 &= \quad hrR + i\,\frac{drR}{dr}, \end{aligned} \tag{16}$$

und hierdurch sind also R_1 und R_2 durch R ausgedrückt in einer ganz ähnlichen Form, wie Θ_1 und Θ_2 durch Θ [nach (11)].

Wenn man diese Ausdrücke für R_1, R_2 in (12) substituiert, so ergibt sich aus beiden die Differentialgleichung § 144 (4), die durch R erfüllt ist, und es sind also durch (11) und (16) alle Bedingungen wirklich befriedigt.

Hierdurch ist ein System der Partikularlösungen gefunden, in denen die sechs Komponenten der elektrischen und der magnetischen Kraft vollständig bis auf einen unbestimmten (auch komplexen), gemeinschaftlichen, konstanten Koeffizienten dargestellt sind. Es ist dabei nicht ausgeschlossen, daß die Leitfähigkeit und die Konstanten ε, μ in verschiedenen konzentrischen Kugelschalen verschiedene konstante Werte haben. Es enthalten die Ausdrücke noch die willkürliche Konstante k (von der h abhängt) und die willkürlichen ganzen Zahlen m, n. Indem man diesen willkürlichen Elementen unendlich viele verschiedene Werte beilegt und die Summen bildet, erhält man die Möglichkeit, den Grenzbedingungen zu genügen, wie sie die große Mannigfaltigkeit der hierher gehörigen elektromagnetischen oder optischen Probleme bieten.

§ 146 [1]).
Elektronentheorie.

In neuerer Zeit hat sich, besonders durch die Arbeiten von H. A. Lorentz [2]) eine Erweiterung der Maxwellschen Theorie entwickelt, die von der Annahme ausgeht, daß im freien Äther die Maxwellschen Gleichungen völlige Gültigkeit besitzen, daß aber in der Materie kleine elektrisch geladene Teilchen, sogenannte Elektronen, durch ihr Vorhandensein und ihre Bewegung das elektromagnetische Feld, wie es im leeren Raume herrschen würde, modifizieren.

Was in der Maxwellschen Theorie als Leitungsstrom angesehen wurde, das ist in der Elektronentheorie der Konvektionsstrom bewegter Elektronen, ganz ähnlich, wie man das in den älteren vor-Maxwellschen Theorien anzusehen gewohnt war. Die Leitfähigkeit eines Materials ist also jetzt kein Grundbegriff mehr, sondern ergibt sich aus dem speziellen Mechanismus, den man für die Bewegung der Elektronen und die derselben entgegenstehenden Kräfte annimmt. Ebenso sind auch die Dielektrizitätskonstante und die Permeabilität aus den Grundbegriffen der Elektronentheorie ausgeschaltet, auch sie ergeben sich als verhältnismäßig komplizierte Mittelwerte unter der Voraussetzung ganz bestimmter Mechanismen.

Da wir uns im folgenden aber nur mit den Grundlagen der Elektronentheorie beschäftigen wollen, so lassen wir die Erscheinungen in der ponderablen Materie ganz beiseite und setzen voraus, daß sich im Äther einzelne elektrisch geladene Körper befinden, die sich bewegen können. Es ist also die Ladungs-

[1]) Die §§ 146 bis 148 sind von R. Gans bearbeitet.

[2]) Lorentz, „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern". Leiden 1895; 2. Aufl., Leipzig 1906. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. V, Art. 13, 14.

dichte ϱ eine Funktion von x, y, z, t, wenn x, y, z die orthogonalen Koordinaten in einem mit dem ruhenden Äther fest verbundenen Koordinatensystem bedeuten. Wo kein Elektron vorhanden ist, ist $\varrho = 0$. ϱ wird also eine unstetige Funktion der Koordinaten und der Zeit sein; wir können und wollen aber die unstetigen Änderungen von ϱ als sehr schnelle stetige Änderungen auffassen.

Ferner müssen wir jedem Punkte eines Elektrons eine Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zuschreiben; $\mathfrak{v}$ ist somit ein Vektor, dessen Komponenten v_x, v_y, v_z auch Funktionen von x, y, z, t sind.

Die Existenz von magnetischen Mengen lehnt die Elektronentheorie ab.

Die Grundgleichungen lassen sich nun leicht aufstellen, es sind die **Maxwellschen** Gleichungen (Bd. I, § 163), wenn in ihnen $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\lambda = 0$ gesetzt und der Konvektionsstrom bewegter Elektronen noch berücksichtigt wird. Auch das mußten wir bereits früher tun, als wir die **Maxwellsche** Theorie auf Elektrolyte anwendeten.

Im ersten Bande § 172 (5) haben wir gesehen, daß im Falle bewegter Elektrizitätsmengen zu dem Verschiebungsstrom $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ noch ein Glied hinzukam, und zwar bedeutete in diesem Zusatzgliede $a\mathfrak{P}$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ einer Elektrizitätsmenge, η war ihre Ladung, α die Zahl der in der Volumeneinheit befindlichen Teilchen, d. h. $\eta\alpha$ die Elektrizitätsmenge der Volumeneinheit. Damals war das Volumenelement so groß gewählt, daß sehr viele Ionen einer Sorte sich in demselben befanden. Wir wählen es jetzt so klein, daß es unendlich klein gegen das Volumen eines Elektrons ist.

Anstatt $\eta\alpha . a\mathfrak{P}$ müssen wir dann folgerichtig $\varrho\mathfrak{v}$ setzen, so daß also der elektrische Strom

$$\mathfrak{S}_e = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \varrho\mathfrak{v} \tag{1}$$

wird.

Somit lauten die Gleichungen der Elektronentheorie (vgl. Bd. I, § 163):

$$c \operatorname{curl} \mathfrak{M} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\varrho\mathfrak{v} \tag{2}$$

$$-c \operatorname{curl} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}. \tag{3}$$

Ferner ist [Bd. I, § 134 (5), 155 (2)]

$$\text{div}\,\mathfrak{E} = 4\pi\varrho \tag{4}$$

$$\text{div}\,\mathfrak{M} = 0. \tag{5}$$

ϱ und $\mathfrak{v}$ sind hier nicht völlig unabhängig voneinander. Bildet man nämlich die Divergenz der Gleichung (2), so ist mit Beachtung des am Schluß von Bd. I, § 93 ausgesprochenen Satzes, daß die Divergenz eines curls verschwindet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\,\mathfrak{E} + 4\pi\,\text{div}(\varrho\,\mathfrak{v}) = 0$$

oder mit Berücksichtigung von (4):

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \text{div}\,(\varrho\,\mathfrak{v}) = 0. \tag{6}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $d\tau$ und integrieren über einen beliebigen Raum τ, dessen Oberfläche O die innere Normale n hat, so folgt unter Anwendung des Gaußschen Satzes auf das zweite Glied die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\varrho\,d\tau - \int\varrho\,v_n\,do = 0. \tag{6'}$$

Sie sagt aus (vgl. Bd. I, § 171), daß der in der Zeiteinheit erfolgte Zuwachs an Elektrizität im Raume τ nur eine Folge des Einströmens durch die Oberfläche des Raumes ist. Elektrizität kann also weder entstehen noch vergehen; deshalb heißt (6) die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität.

Es handelt sich nun darum, die Gleichungen (2) bis (5) zu integrieren, wenn ϱ und $\mathfrak{v}$ willkürlich gegebene Funktionen des Ortes und der Zeit sind, die nur der Gleichung (6) zu genügen haben.

Aus Gleichung (5) folgt, da nach Bd. 1, § 100 ein Vektor mit verschwindender Divergenz stets der curl eines anderen Vektors ist:

$$\mathfrak{M} = \text{curl}\,\mathfrak{A}. \tag{7}$$

Setzen wir (7) in (3) ein, so ergibt sich:

$$\text{curl}\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}\right) = 0; \tag{8}$$

also ist $\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t}$ ein Potentialvektor, den wir $-\text{grad}\,\Phi$ nennen wollen, so daß

$$\mathfrak{E} = -\,\text{grad}\,\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} \tag{9}$$

wird.

Sind Φ und $\mathfrak{A}$ bekannt, so ergeben sich $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ aus (7) und (9). Es kommt also alles darauf an, das Skalar Φ und den Vektor $\mathfrak{A}$ zu berechnen.

Zu dem Zweck substituieren wir (9) in (4) und erhalten mit Berücksichtigung von Bd. I, § 94 (10)

$$\varDelta\Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{A} = -4\pi\varrho$$

oder, indem wir $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$ addieren und subtrahieren,

$$\varDelta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -4\pi\varrho \tag{10}$$

und durch Substitution von (7) und (9) in (2):

$$c \operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathfrak{A} =$$

$$c(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{A} - \varDelta\mathfrak{A}) = -\operatorname{grad}\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} + 4\pi\varrho\mathfrak{v}$$

oder in anderer Anordnung:

$$\varDelta\mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi\varrho\mathfrak{v}}{c}. \tag{11}$$

Der in Gleichung (7) auftretende Vektor $\mathfrak{A}$ ist (vgl. Bd. I, § 100) natürlich nur bis auf einen Potentialvektor und Φ nach (9) nur bis auf eine beliebige additive Funktion von t bestimmt. Diesen Potentialvektor wählen wir so, daß (10) und (11) besonders einfache Formen annehmen. Das ist aber der Fall, wenn

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0, \tag{12}$$

denn dann werden die Gleichungen (10) und (11) bzw.

$$\varDelta\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \varDelta A_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\varrho v_x}{c}, \\ \varDelta A_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\varrho v_y}{c}, \\ \varDelta A_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\varrho v_z}{c}. \end{aligned} \tag{14}$$

Wir haben durch diese Bestimmung also aus (10) und (11) vier Gleichungen gewonnen, deren jede nur **eine** abhängige Variable enthält.

Daß die Wahl von $\mathfrak{A}$ und Φ immer so möglich ist, daß Gleichung (12) befriedigt wird, ist folgendermaßen einzusehen: Seien $\mathfrak{A}_0$ und Φ_0 spezielle Werte der Funktionen $\mathfrak{A}$ und Φ, welche den Gleichungen (7), (9) bei gegebenem $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{E}$ genügen, so ist auch

$$(15) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 - \operatorname{grad} \chi,$$

$$(16) \qquad \Phi = \Phi_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

ein Wertepaar, welches die Gleichungen (7) und (9) befriedigt, und (12) erfüllt, wenn χ so bestimmt wird, daß es eine Lösung der Gleichung

$$(17) \qquad \Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathfrak{A}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}$$

ist, und das läßt sich immer bewerkstelligen.

Mit der Gleichung (17) werden wir uns im nächsten Paragraphen noch eingehend zu beschäftigen haben, da sie ja dieselbe Form hat wie die Gleichungen (13) und (14), deren Integration unsere Aufgabe ist.

Φ heißt das skalare, $\mathfrak{A}$ das vektorielle elektromagnetische Potential.

§ 147.

Die retardierten Potentiale.

Es handelte sich im vorigen Paragraphen um die Integration der Gleichungen (13) und (14) unter Berücksichtigung von (12). Wir werden zunächst, unbekümmert um (12), die Gleichungen (13) und (14) integrieren, die wir in die gemeinsame Form

$$(1) \qquad \Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = - f(x, y, z, t)$$

zusammenfassen können. Hier ist f eine gegebene Funktion der vier Variablen x, y, z, t.

Bevor wir an die Integration dieser Gleichung gehen, müssen einige Hilfssätze über die Gleichung

$$(2) \qquad \Delta W + k^2 W = 0$$

abgeleitet werden.

1. Schreiben wir (2), um ein partikulares Integral zu finden, in räumlichen Polarkoordinaten, und nehmen wir an, daß W nur von r, aber nicht von ϑ und φ abhänge, so ergibt sich nach Bd. I, § 44 (11):

(3)
$$\frac{d^2 r W}{d r^2} + k^2 r W = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt ohne weiteres, daß

(4)
$$W = \frac{e^{-ikr}}{r}$$

ein partikulares Integral von (2) ist.

2. Seien V, W zwei im Raume τ mit der Oberfläche O endliche, stetige Funktionen, mit überall endlichen ersten und zweiten Differentialquotienten, so gilt nach dem Greenschen Satze [Bd. I, § 101 (5)]:

(5)
$$\int (V \Delta W - W \Delta V) d\tau = -\int \left(V \frac{\partial W}{\partial n} - W \frac{\partial V}{\partial n}\right) do.$$

Wollen wir für W den Wert aus Gleichung (4) einsetzen, wo r die Entfernung eines variablen Punktes $q(\xi, \eta, \zeta)$ von einem festen Punkte $p(x, y, z)$ bedeutet, und liegt p innerhalb von τ, so würde $1/r$ und damit W als Funktion des Punktes q in p unendlich, wir müssen also (vgl. Bd. I, § 102; II, § 111) den Punkt p etwa durch eine mit dem willkürlichen Radius a um p beschriebene Kugel von τ ausschließen. Dann ist diese Kugeloberfläche K natürlich mit zu der Oberfläche des neuen Raumes, den wir τ^* nennen wollen, zu rechnen, und aus (5) wird mit Berücksichtigung der Gleichung (2):

(6)
$$-\int \frac{e^{-ikr}}{r} (\Delta V + k^2 V) d\tau^* = -\int\limits_O \left\{ V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right\} do$$
$$-\int\limits_K \left\{ V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right\} do.$$

Auf K fällt nun die Normale n mit dem wachsenden Radius a der Kugel zusammen, und do läßt sich in der Form $do = a^2 d\omega$ schreiben, wenn $d\omega$ ein Element der Einheitskugel bedeutet.

So wird

$$-\int\limits_K \left\{ V \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) - \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right\} do$$
$$= \int\limits_K \left\{ V \left(\frac{1}{a^2} + \frac{ik}{a} \right) e^{-ika} + \frac{e^{-ika}}{a} \frac{\partial V}{\partial a} \right\} a^2 d\omega,$$

und lassen wir nun a kleiner und kleiner werden, so wird, da wir angenommen haben, daß V und seine ersten und zweiten Differentialquotienten in p endlich sind, aus der rechten Seite dieser Gleichung

$$\int V d\omega = 4\pi V_p,$$

also lautet dann (6):

$$4\pi V_p = -\int \frac{e^{-ikr}}{r}(\varDelta V + k^2 V) d\tau + \iint\limits_O \left\{ V \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right) - \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial V}{\partial n}\right\} do.$$

Rückt O ins Unendliche und verschwindet V dort stärker als $1/r$, so gibt die Integration über O keinen endlichen Beitrag, und wir können einfacher

$$(7) \qquad 4\pi V_p = -\int \frac{e^{-ikr}}{r}(\varDelta V + k^2 V) d\tau$$

schreiben.

Genügt V der Differentialgleichung

$$(8) \qquad \varDelta V + k^2 V = -f(x, y, z),$$

so wird nach (7)

$$(9) \qquad V_p = \frac{1}{4\pi}\int \frac{e^{-ikr}}{r} f(\xi, \eta, \zeta) d\tau$$

ein Integral von (8).

Hier bedeutet $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, und $d\tau$ ist ein Volumenelement des unendlichen Raumes am Orte $q(\xi, \eta, \zeta)$.

Läßt man k auf Null abnehmen, so wird (8) die Poissonsche Gleichung und (9) das aus der Potentialtheorie bekannte Integral derselben.

Jetzt sind wir vorbereitet, um die Gleichung (1) ohne weiteres integrieren zu können.

Wir denken uns $f(x, y, z, t)$ als Funktion von t nach dem Fourierschen Theorem entwickelbar, also in der Form

$$(10) \qquad f(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z, \lambda) e^{i\alpha(t-\lambda)} d\lambda$$

darstellbar [vgl. Bd. I, § 21 (3)], und ebenso nehmen wir an, daß auch U als Funktion von t nach dem Fourierschen Theorem darstellbar sei, daß also

$$(11)\qquad U(x,y,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}U(x,y,z,\lambda)\,e^{i\alpha(t-\lambda)}\,d\lambda$$

gilt.

Dann wird wegen (1), wenn wir auf der rechten Seite von (11) unter den Integralzeichen differentiieren,

$$(12)\qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big\{\Delta U(x,y,z,\lambda)+\frac{\alpha^2}{c^2}\,U(x,y,z,\lambda)$$
$$+f(x,y,z,\lambda)\Big\}\,e^{i\alpha(t-\lambda)}\,d\lambda=0.$$

Diese Gleichung ist aber befriedigt, wenn der Integrand verschwindet, also wenn

$$(13)\qquad \Delta U(x,y,z,\lambda)+\frac{\alpha^2}{c^2}\,U(x,y,z,\lambda)=-f(x,y,z,\lambda)$$

ist.

Die Gleichung (13) hat nun die Form von (8), also ist nach (9):

$$(14)\qquad U(x,y,z,\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{e^{-i\frac{\alpha}{c}r}}{r}\,f(\xi,\eta,\zeta,\lambda)\,d\tau$$

ein Integral von (13).

Setzen wir diesen Wert in (11) ein, so ergibt sich, unter Vertauschung der Integrationsfolge:

$$(15)\qquad U(x,y,z,t)=\int\frac{d\tau}{4\pi r}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\eta,\zeta,\lambda)\,e^{i\alpha\left(t-\frac{r}{c}-\lambda\right)}\,d\lambda.$$

Wegen (10) ist dies aber:

$$(16)\qquad U(x,y,z,t)=\int\frac{d\tau}{4\pi r}\,f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{c}\right).$$

Wir hätten anstatt des partikularen Integrals $\frac{e^{-ikr}}{r}$ in (4) auch $\frac{e^{+ikr}}{r}$ wählen können, dann hätten wir in (16) $t+\frac{r}{c}$ anstatt $t-\frac{r}{c}$ als Argument bekommen. Da aber U zur Zeit t nicht von den Werten abhängen kann, die f zu späteren Zeiten annimmt, so hätte dieses Integral keinen physikalischen Sinn gehabt.

Die Gleichungen (13) und (14) des § 146 haben also die Lösungen:

$$\Phi(x,y,z,t) = \int \frac{d\tau}{r}\, \varrho\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right), \tag{17}$$

$$A_x(x,y,z,t) = \int \frac{d\tau}{r}\, \frac{\varrho v_x}{c}\left(\xi,\eta,\zeta,t - \frac{r}{c}\right) \tag{18}$$

und entsprechend für die anderen beiden Komponenten A_y und A_z.

Da für die Werte der gesuchten Funktionen zur Zeit t die Werte von ϱ und $\varrho\mathfrak{v}$ zu den früheren Zeiten $t - r/c$ maßgebend sind, so heißen die in (17) und (18) angegebenen Lösungen auch die retardierten Potentiale, und zwar ist r/c gerade die Zeit, welche das Licht braucht, um vom Orte der Ladungsdichte ϱ bzw. des Konvektionsstromes $\varrho\mathfrak{v}$ bis zum Punkte $p(x, y, z)$ zu gelangen. Die Lösungen (17) und (18) tragen also der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit c elektromagnetischer Störungen Rechnung.

Damit (17) und (18) als Lösungen angesehen werden können, die, in (7) und (9) des § 146 eingesetzt, Werte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ ergeben, welche den Feldgleichungen genügen, muß noch nachgewiesen werden, daß Φ und $\mathfrak{A}$ die Gleichung (12) des § 146 erfüllen.

Wir schreiben (17) und (18) in der Form:

$$\Phi = \int \frac{\bar{\varrho}\, d\tau}{r}, \tag{17'}$$

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\overline{\varrho\mathfrak{v}}\, d\tau}{rc}; \tag{18'}$$

hier soll der Strich über einer Funktion bedeuten, daß anstatt t als Argument $t - r/c$ eingesetzt werden soll.

Dann wird durch Substitution von (17′) und (18′):

$$P = c \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int d\tau \left\{ \operatorname{div}_p \frac{\overline{\varrho\mathfrak{v}}}{r} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{\varrho}}{r} \right\}. \tag{19}$$

Wir haben unter dem Integralzeichen an das div-Zeichen den Index p gesetzt, um darauf hinzuweisen, daß die Differentiationen nach den Koordinaten x, y, z des Punktes p, und nicht nach den ξ, η, ζ des Punktes q auszuführen sind, und zwar kommen die x, y, z erstens in dem explizit dastehenden r der Nenner und zweitens in den r der Argumente $t - r/c$ vor, dagegen sind die ersten drei Argumente von $\bar{\varrho}$ und $\overline{\varrho\mathfrak{v}}$ ξ, η, ζ und nicht x, y, z.

Im folgenden ist $\frac{\partial \overline{U}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \overline{U}}{\partial x}$ wohl zu unterscheiden von $\overline{\frac{\partial U}{\partial t}}$ und $\overline{\frac{\partial U}{\partial x}}$, wo U eine beliebige skalare oder vektorielle Funktion von x, y, z, t ist. Ersteres bedeutet, daß man in der Funktion U zuerst t durch $t - r/c$ ersetzen und dann nach t bzw. x differentiieren soll, letzteres dagegen, daß man erst nach der Ausführung der Differentiation anstatt t das Argument $t - r/c$ einzuführen hat.

Zwischen diesen verschiedenen Differentiationen bestehen nun Relationen.

Erstens ist:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial U}{\partial t}}, \tag{20}$$

da x, y, z bei der Differentiation nach t konstant bleiben.

Dagegen ist:

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial U}{\partial x}} - \frac{1}{c}\overline{\frac{\partial U}{\partial t}}\frac{\partial r}{\partial x} = \overline{\frac{\partial U}{\partial x}} - \frac{1}{c}\overline{\frac{\partial U}{\partial t}}\frac{x-\xi}{r} \tag{21}$$

oder in Vektorschreibweise, wenn wir $\mathfrak{r}$ als Vektor mit den Komponenten $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ ansehen,

$$\operatorname{grad}_p \overline{U} = \overline{\operatorname{grad}_p U} - \frac{1}{c}\overline{\frac{\partial U}{\partial t}}\frac{\mathfrak{r}}{r}. \tag{21'}$$

Ist aber U eine Funktion von ξ, η, ζ, t, so ist

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial \xi} = \overline{\frac{\partial U}{\partial \xi}} + \frac{1}{c}\overline{\frac{\partial U}{\partial t}}\frac{x-\xi}{r} \tag{22}$$

oder

$$\operatorname{grad}_q \overline{U} = \overline{\operatorname{grad}_q U} + \frac{1}{c}\overline{\frac{\partial U}{\partial t}}\frac{\mathfrak{r}}{r}. \tag{22'}$$

Da nun

$$\operatorname{div}_p \frac{\overline{\varrho\mathfrak{v}}}{r} = \left(\overline{\varrho\mathfrak{v}}\operatorname{grad}_p \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{c}\left(\overline{\frac{\partial \varrho\mathfrak{v}}{\partial t}}\frac{\mathfrak{r}}{r^2}\right)$$

ist, so schreibt sich (19):

$$P = \int d\tau \left\{\left(\overline{\varrho\mathfrak{v}}\operatorname{grad}_p \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{c}\left(\overline{\frac{\partial \varrho\mathfrak{v}}{\partial t}}\frac{\mathfrak{r}}{r^2}\right) + \frac{1}{r}\overline{\frac{\partial \varrho}{\partial t}}\right\}. \tag{23}$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}$$

oder in Vektorschreibweise:

$$\operatorname{grad}_p \frac{1}{r} = - \operatorname{grad}_q \frac{1}{r},$$

also

$$\left(\overline{\varrho \mathfrak{v}} \operatorname{grad}_p \frac{1}{r}\right) = - \left(\overline{\varrho \mathfrak{v}} \operatorname{grad}_q \frac{1}{r}\right)$$

und durch partielle Integration:

$$= - \operatorname{div}_q \frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{r} + \frac{1}{r} \operatorname{div}_q \overline{\varrho \mathfrak{v}}$$

oder mit Anwendung von (22) auf den letzten Term:

$$= - \operatorname{div}_q \frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{r} + \frac{1}{r} \overline{\operatorname{div}_q \varrho \mathfrak{v}} + \frac{1}{c r}\left(\frac{\overline{\partial \varrho \mathfrak{v}}}{\partial t} \frac{\mathfrak{r}}{r}\right).$$

Setzen wir diesen Ausdruck für den ersten Term rechts in (23) ein, so ergibt sich:

$$P = \int d\tau \left\{ - \operatorname{div}_q \frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{r} + \frac{1}{r}\left(\overline{\operatorname{div}_q \varrho \mathfrak{v}} + \frac{\overline{\partial \varrho}}{\partial t}\right)\right\}. \tag{24}$$

Das erste Glied dieser Gleichung wird durch Anwendung des Gaußschen Satzes zu einem Oberflächenintegral über eine im Unendlichen liegende Fläche; dies wird Null, da im Unendlichen keine Ladungen vorhanden sein sollen. Die anderen beiden Glieder von (24) verschwinden wegen der Kontinuitätsgleichung (6) § 146.

Damit ist der Beweis geliefert, daß die Gleichung (12) des § 146 durch (17) und (18) erfüllt ist.

§ 148.

Beispiele.

1. Gleichförmige Bewegung. Wir wollen die in den vorigen Paragraphen gewonnenen Resultate jetzt auf einige spezielle Fälle anwenden, und zwar zunächst auf die Bewegung eines Elektrons mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Am einfachsten gehen wir hierbei nicht von den Integralen (17) und (18) des vorigen Paragraphen aus, sondern von den Differentialgleichungen (13) und (14) des § 146 selbst.

Anstatt des in § 146 und § 147 zugrunde gelegten ruhenden Koordinatensystems x, y, z führen wir ein mit dem Elektron bewegtes paralleles System x', y', z' ein und legen die z- und z'-Achse in die Bewegungsrichtung.

Es ist also:

$$x = x'$$
(1) $$y = y'$$
$$z = z' + vt$$

$v_x = 0$; $v_y = 0$; $v_z = v$.

Ferner schreiben wir zur Abkürzung $v/c = \beta$ und setzen voraus, daß $\beta < 1$ ist, daß also das Elektron sich mit Unterlichtgeschwindigkeit bewegt.

Eine Differentiation nach t bei konstant gehaltenen x', y', z' wollen wir mit d/dt bezeichnen, während für Differentiationen nach der Zeit bei konstanten x, y, z, wie früher $\partial/\partial t$ geschrieben werden soll.

Dann besteht nach (1) die Beziehung:

(2) $$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + v\frac{\partial \Phi}{\partial z'}$$

während

(3) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x'} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

sind.

Da ferner im mitbewegten Koordinatensystem alle Größen von der Zeit unabhängig sind, also $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ gilt, so folgt aus (2)

(4) $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -v\frac{\partial \Phi}{\partial z'}.$$

Substituieren wir (3) und (4) in Gleichung (13) § 146, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + (1-\beta^2)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} = -4\pi\varrho,$$

und ebenso ergibt sich, wenn wir noch zur Abkürzung

(5) $$\sqrt{1-\beta^2} = k$$

setzen:

(6) $$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + k^2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z'^2} = -4\pi\varrho,$$

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y'^2} + k^2\frac{\partial^2 A_x}{\partial z'^2} = -\frac{4\pi\varrho v_x}{c} = 0,$$

(7) $$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y'^2} + k^2\frac{\partial^2 A_y}{\partial z'^2} = -\frac{4\pi\varrho v_y}{c} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 A^z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y'^2} + k^2\frac{\partial^2 A_z}{\partial z'^2} = -\frac{4\pi\varrho v_z}{c} = -4\pi\varrho\beta.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß

(8) $$A_x = 0; \quad A_y = 0; \quad A_z = \beta \Phi$$

ist. Es genügt also, Φ zu bestimmen.

Nach § 146 (9) ergibt sich dann für $\mathfrak{E}$, da $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = -v \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z}$ ist, mit Berücksichtigung von (8):

(9) $$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x'}; \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y'}; \quad E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z'} + \beta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = -k^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z'}.$$

Ebenso erhält man aus § 146 (7):

(10) $$M_x = \beta \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = -\beta E_y; \quad M_y = -\beta \frac{\partial \Phi}{\partial x'} = \beta E_y; \quad M_z = 0.$$

Es kommt also alles darauf an, Φ aus (6) zu bestimmen.

Zu dem Zweck führen wir in (6) neue Variable ein durch die Substitution

(11) $$x'' = x'; \quad y'' = y'; \quad z'' = \frac{z'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{z'}{k},$$

d. h. wir bilden den Raum $R'(x', y', z')$ auf einen Raum $R''(x'', y'', z'')$ ab. Aus (11) folgt, daß R'' aus R' durch eine Dehnung in der Richtung der Bewegung der (z-Achse) hervorgeht.

Mit Hilfe von (11) schreibt sich (6) in der Form

(12) $$\Delta \Phi = -4\pi\varrho,$$

wenn der Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x''^2} + \frac{\partial^2}{\partial y''^2} + \frac{\partial^2}{\partial z''^2}$$

ist.

(12) ist aber die Poissonsche Gleichung der Elektrostatik, deren Integral nach Bd. I, § 105 (8):

(13) $$\Phi = \int \frac{\varrho \, d\tau''}{r''}$$

lautet.

Hier bedeutet $r'' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$ und $d\tau''$ das Volumenelement des Raumes R'' an der Stelle x'', y'', z''.

Durch diese Abbildung sind also die Probleme der gleichförmigen Bewegung auf elektrostatische zurückgeführt.

Ist z. B. r'' groß gegen die Lineardimensionen des Teiles von τ'', der mit Elektrizität erfüllt ist, so kann man das Elektron als punktförmig ansehen und erhält:

(14) $$\Phi = \frac{1}{r''}\int \varrho\, d\tau'' = \frac{1}{r''}\int \frac{\varrho\, d\tau'}{k} = \frac{e}{k r''},$$

wenn e die gesamte Elektrizitätsmenge des Elektrons bedeutet. Setzen wir für r'' seinen Wert $\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$ ein und benutzen (11), so wird:

(15) $$\Phi = \frac{e}{\sqrt{k^2(x'^2 + y'^2) + z'^2}}.$$

Äquipotentialflächen des skalaren Potentials Φ und nach (8) auch des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ im Falle einer bewegten Punktladung sind also Flächen der Schar

(16) $$x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{k^2} = \text{Konst.},$$

d. h. abgeplattete Rotationsellipsoide.

Damit das Elektron als Punktladung aufgefaßt werden kann, muß, wie erwähnt, r'' groß gegen die Dimensionen des Raumteiles τ'' sein, auf den das Elektron abgebildet wird.

Dazu genügt es aber nicht, daß die Entfernung r' groß gegen den Raumteil τ' ist, der vom Elektron erfüllt wird, sondern die Geschwindigkeit v muß außerdem im Verhältnis zu c so klein sein, daß infolge der Dehnung bei der Abbildung der Räume die Längen in τ'' nicht zu groß im Vergleich zu den entsprechenden Längen in τ' werden.

Auch auf den Fall eines kugelförmigen, gleichförmig mit Elektrizität erfüllten Elektrons ist diese Methode der Abbildung anwendbar. Infolge der Dehnung wird aus der Kugel ein verlängertes Rotationsellipsoid, für welches die Gleichung (12) in Bd. I, § 113 integriert ist.

2. Ungleichförmige Bewegung eines punktförmigen Elektrons. Zur Auswertung[1]) der Größen Φ und $\mathfrak{A}$ nach § 147 (17′) und (18′) im Falle eines ungleichförmig bewegten punktförmigen Elektrons für den Punkt $P(x, y, z)$ zur Zeit t, fassen wir einen festen Punkt Q_0 des Elektrons ins Auge. Dieser Punkt

---

[1]) Bei der Integration der Gleichungen (17′) und (18′) des § 147 hat man Dichte und Konvektionsstrom in den verschiedenen Elementen des Raumes zu verschiedenen Zeiten zu nehmen, anstatt dessen kann man zu derselben Zeit über die Volumelemente des in gewisser Weise deformierten Elektrons integrieren. Das ist die Bedeutung der in diesem Beispiel auftretenden Transformationen.

befinde sich zur Zeit t_0 in seiner „wirkenden Lage“, d. h. in der Lage, daß eine elektromagnetische Störung, die zur Zeit t_0 von ihm ausgeht, zur Zeit t in P anlangt.

Setzen wir $Q_0 P = r$, so muß also

$$r = c(t - t_0) \tag{17}$$

sein.

Den Ort von Q_0 zur Zeit t_0 wählen wir zum Ursprung eines Koordinatensystems, so daß

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{18}$$

wird.

Ein beliebiger anderer Punkt Q des Elektrons habe zur selben Zeit t_0 die Koordinaten ξ, η, ζ. Zur Zeit t_0 wird aber Q nicht in der wirkenden Lage sein, weil die Strecke QP im allgemeinen nicht gleich $Q_0 P$ ist, sondern Q wird zu einer Zeit

$$t_w = t_0 + \Delta t \tag{19}$$

sich in seiner wirkenden Lage befinden. Δt wird eine kleine Zeit sein, deren höhere Potenzen wir vernachlässigen können, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons klein gegen die Lichtgeschwindigkeit und seine Lineardimensionen klein gegen die Entfernung $Q_0 P$ sind, so daß wir auch die höheren Potenzen von ξ, η, ζ nicht zu berücksichtigen brauchen.

Zur Zeit t_w hat dann Q die Lage $Q'(\xi_w, \eta_w, \zeta_w)$, und es ist

$$\begin{aligned} \xi_w &= \xi + v_x \Delta t \\ \eta_w &= \eta + v_y \Delta t \\ \zeta_w &= \zeta + v_z \Delta t, \end{aligned} \tag{20}$$

wenn v_x, v_y, v_z die Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit t_0 bedeuten.

Da aber Q' die wirkende Lage des Punktes Q sein soll, so ist

$$Q'P = c(t - t_w) = c(t - t_0 - \Delta t). \tag{21}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} Q'P^2 &= (x - \xi_w)^2 + (y - \eta_w)^2 + (z - \zeta_w)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2(x\xi_w + y\eta_w + z\zeta_w) \end{aligned} \tag{22}$$

mit den erwähnten Vernachlässigungen.

Nach (21) und (22) ist somit unter Berücksichtigung von (17), (18) und (20):

$$x\xi + y\eta + z\zeta + (xv_x + yv_y + zv_z)\Delta t = cr\Delta t$$

oder, da

$$xv_x + yv_y + zv_z = rv_r$$

ist:

(23) $$\Delta t = \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r(c - v_r)}.$$

Die Punkte des Elektrons, die zur Zeit t_0 in einem Volumelement der Größe $d\tau$ liegen, haben ihre wirkende Lage in einem Volumelement $d\tau_w$, und zwar bestimmt sich nach (20):

(24) $$d\tau_w = D d\tau,$$

wenn D die Funktionaldeterminante

(25) $$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_w}{\partial \xi}, & \frac{\partial \xi_w}{\partial \eta}, & \frac{\partial \xi_w}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \eta_w}{\partial \xi}, & \frac{\partial \eta_w}{\partial \eta}, & \frac{\partial \eta_w}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \zeta_w}{\partial \xi}, & \frac{\partial \zeta_w}{\partial \eta}, & \frac{\partial \zeta_w}{\partial \zeta} \end{vmatrix}$$

bedeutet.

Nach (20) ist aber

$$\frac{\partial \xi_w}{\partial \xi} = 1 + v_x \frac{\partial \Delta t}{\partial \xi}; \qquad \frac{\partial \xi_w}{\partial \eta} = v_x \frac{\partial \Delta t}{\partial \eta} \text{ usw.,}$$

so daß die Ausrechnung

$$D = 1 + v_x \frac{\partial \Delta t}{\partial \xi} + v_y \frac{\partial \Delta t}{\partial \eta} + v_z \frac{\partial \Delta t}{\partial \zeta},$$

oder mit Beachtung von (23)

(26) $$D = 1 + \frac{v_r}{c - v_r} = \frac{c}{c - v_r}$$

ergibt.

Nun ist die Bedeutung des Integranden der Formel (17′) des § 147, daß das Volumelement des Raumes zu der Zeit t_w mit der wirklichen Dichte ϱ, d. h. mit der Dichte, die zur Zeit t_0 am Orte Q (ξ, η, ζ) herrscht, multipliziert und durch den Abstand vom Punkte P dividiert werden soll. Es ist also nach dem Vorigen für das Volumelement $d\tau_w$ zu setzen und für den Abstand $Q'P$, der aber nach (22) mit der von uns erstrebten Genauigkeit durch $Q_0P = r$ [vgl. Formel (18)] ersetzt werden kann.

So erhalten wir

$$\Phi = \frac{1}{r} \int \varrho \,.\, d\tau_w,$$

wo ϱ die Dichte im Element $d\tau$ zur Zeit t_0 bedeutet.

Nach (24) und (26) geht das aber über in:

$$\Phi = \frac{1}{r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)} \int \varrho \, d\tau = \frac{e}{r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)}. \tag{27}$$

Ebenso wird:

$$\mathfrak{A} = \frac{e\mathfrak{v}}{c\,r\left(1 - \frac{v_r}{c}\right)}. \tag{28}$$

Hier bedeutet, um es noch einmal zu bemerken, r den Abstand des Elektrons in seiner wirkenden Lage Q_0 vom Punkte P, $\mathfrak{v}$ seine Geschwindigkeit in dieser Lage, v_r die Projektion von $\mathfrak{v}$ in die Richtung $Q_0 P$.

Achtzehnter Abschnitt.

Relativität.

§ 149.

Einleitung.

In jüngster Zeit haben gewisse Erscheinungen aus dem Gebiete des Lichtes und der Elektrizität, die sich den sonst wohl begründeten Theorien nicht fügen wollten, die Physiker und Mathematiker lebhaft beschäftigt. Die Tatsache der Aberration des Fixsternlichtes, die nach der Newtonschen Emissionstheorie eine so einfache und anschauliche Erklärung fand, führte bereits Fresnel zu der Vorstellung, daß der Äther als Träger der Lichterscheinungen absolut ruhe, und daß sich die materielle Welt ungehindert durch ihn hindurch bewegt, eine Anschauung, der auch Franz Neumann huldigte. Aber auch diese Annahme schien nicht alle Schwierigkeiten zu überwinden. Man hätte erwartet, daß danach die Lichtgeschwindigkeit für einen ruhenden Beobachter eine andere sein müßte als für einen, der sich gegen die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes bewegt, und darauf basierten Michelson und Morley einen Versuch, der durch Interferenz des Lichtes die Bewegung der Erde zu erkennen geben sollte (vgl. § 159). Das Ergebnis war negativ.

H. A. Lorentz suchte diese und verwandte Tatsachen durch die Hypothesen zu erfassen, daß ein bewegter Körper in der Richtung der Bewegung eine von der Geschwindigkeit abhängige Verkürzung erfahre. Dann aber war es Einstein, der die Schwierigkeit noch tiefer anfaßte durch eine Korrektur des Raum- und Zeitmaßes[1]), das auf die vielfach bestätigte und plausibele

[1]) Einstein, Ann. d. Physik **17**, 891 (1905); Jahrb. der Radioaktivität und Elektronik **4** (1907).

Annahme gegründet ist, daß uns keine Erfahrung von einer gleichförmigen Bewegung der Welt im ganzen Kunde geben kann.

Es ist ein ungenauer Ausdruck, wenn man sagt, es handele sich in der jetzt sogenannten Relativitätstheorie um eine neue Auffassung des Zeitbegriffs; es handelt sich nur um die Art der Zeitmessung oder vielmehr um die Art der Verbindung von Raum- und Zeitmaß.

Die Zeit ist ursprünglich ein psychologischer Begriff. Alle unsere Gedanken, Empfindungen und Vorstellungen spielen sich in unserem Bewußtsein in zeitlicher Folge ab, und wir haben in uns sogar ein wenn auch ungenaues Maß für die Zeit. Wir empfinden es deutlich, wenn sich der Takt eines Musikstückes ändert, oder wenn unsere Pulsschläge sich verlangsamen oder beschleunigen usf. Im weiteren handelt es sich darum, wie wir dieses innere Zeitmaß auf äußere Vorgänge übertragen und damit ein Zeitmaß für die Außenwelt gewinnen. Daß beides nicht identisch ist, darüber belehren uns Wahrnehmungen, wie die, daß wir den Aufschlag des Hammers eines entfernten Steinklopfers früher sehen als hören, während beide Eindrücke in unmittelbarer Nähe uns gleichzeitig erscheinen. Wir kommen damit zu dem Begriff einer verschiedenen Geschwindigkeit, mit der sich die Erscheinung von dem Ort ihrer Entstehung bis zu unserem Sensorium fortpflanzt, und gelangen hierdurch erst im weiteren von dem Geschwindigkeitsmaß zu dem Zeitmaß, wobei wir das Raummaß, als das frühere, schon voraussetzen müssen.

Durch einen Vorgang wie etwa bei einer Uhr messen wir die Zeit gleichfalls durch ein räumliches Maß.

Dem naiven Bewußtsein ist Gleichzeitigkeit von Ereignissen gleichbedeutend mit Gleichzeitigkeit der Wahrnehmung und erst durch die Kenntnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, die wir durch eine lange historische Entwickelung der Erfahrung und Wissenschaft erworben haben, übertragen wir die Vorstellung der Gleichzeitigkeit und das Früher und Später auf die Ereignisse selbst. Diese Aufgabe wird dadurch erschwert, daß sich die Ereignisse selbst an bewegten Dingen vollziehen und daß auch das wahrnehmende Subjekt in Bewegung begriffen ist. Über die Grundsätze, nach denen hier zu verfahren ist, belehrt uns die Relativitätstheorie, von deren gegenwärtigem Stand die folgenden Paragraphen eine Vorstellung geben sollen.

§ 150.

Zeit und Raum in der ruhenden und der bewegten Welt.

Wir wollen einen absoluten Raum Ω, den Raum des Äthers, annehmen. In dem Raum sollen Längen- und Zeitmaß gelten, wie sie die naive (innere) Anschauung gibt, also insbesondere sollen auch die Sätze der Euklidischen Geometrie darin gelten. Wenn irgend ein Punkt dieses Raumes irgendwie erregt wird, so pflanzt sich diese Erregung vom Zentrum aus mit einer konstanten Geschwindigkeit c (der Lichtgeschwindigkeit) in Kugelwellen fort. Dieser Äther durchdringt alle Körper, ob sie in Ruhe oder in Bewegung sind, und auch die Wellen gehen durch die Körper hindurch, nur daß die Materie dieser Körper einen gewissen Einfluß auf die Vernichtung und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen hat, von dem wir jetzt absehen.

In diesem Ätherraum nehme ich ein ruhendes rechtwinkliges Koordinatensystem ξ, η, ζ und einen festen Anfangspunkt der Zeit an.

Die Frage, ob es einen derartigen Raum „gibt", ob wir ein Bezugssystem haben, auf das wir die Maße beziehen können, kann hier gar nicht aufgeworfen werden. Die Vorstellung ist durch Abstraktion gebildet, ähnlich wie in der Geometrie die Begriffe Punkt, Linie usw., die nur von uns selbst geschaffene Abbilder ganzer Klassen natürlicher Objekte sind, zu dem Zweck, die Natur dieser Objekte besser und einfacher übersehen und darstellen zu können.

Ein Beobachter befinde sich im Koordinatenanfangspunkt des Systems ξ, η, ζ des ruhenden Raumes, den wir mit Ω bezeichnen[1]), und sei im Besitz eines starren Maßstabes und einer Uhr, deren Zeitangaben mit τ_0 bezeichnet seien. Nimmt er durch Lichtsignale

---

[1]) Der Buchstabe Ω mag hier, ebenso wie später O, sowohl den Beobachter als das Koordinatensystem und seinen Anfangspunkt, und den ganzen Raum bedeuten.

Die Begriffe Raum und Zeit werden hier für den Raum Ω so verstanden, wie sie Newton definiert (Philosophiae naturalis principia mathematica):

I. Tempus absolutum, verum, et mathematicum, in se et natura sua, sine relatione ad externum quodvis, aequabiliter fluit.

II. Spatium absolutum, natura sua sine relatione ad externum quodvis, semper manet simulare et immobile.

zur Zeit τ_0 ein Ereignis in der Entfernung ϱ wahr, so schreibt er dem Ereignis die Zeit

$$(1) \qquad \tau = \tau_0 - \frac{\varrho}{c}$$

zu.

Ereignisse, denen auch bei verschiedenen Werten von τ_0 und ϱ derselbe Wert von τ zukommt, sind für diesen Beobachter, und für jeden anderen, im ruhenden Raum „gleichzeitig“.

Durch den Ätherraum bewegt sich ein anderer Raum, der Raum der materiellen Welt. In ihm ist ein Beobachter O mitbewegt, im Anfangspunkt eines mitbewegten Koordinatensystems x, y, z, dessen Abmessungen vom bewegten Beobachter gleichfalls nach Euklidischer Geometrie geschehen. Ferner besitzt O ebenfalls eine Uhr, auf der er die Zeiten durch räumliche Abmessungen in irgend einer Weise abliest. Von entfernten Ereignissen hat der Beobachter O durch die erwähnten Wellen im Äther Kunde.

Wenn es erlaubt ist ein Bild zu gebrauchen, so denke man an ein stehendes Gewässer, das den Ätherraum darstellen soll, in dem jeder Ruderschlag oder jeder hineingeworfene Stein der Mittelpunkt eines ringförmigen Wellenzuges ist, der sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausbreitet. Ein Schiffer in einem darüber fahrenden Schiffe soll nur durch diese Wellen Kenntnis von dem Ereignisse erhalten. Oder man denke an einen Luftschiffer, der die Schalleindrücke durch die Fortpflanzung der Schallwellen im ruhenden Luftmeer erhält.

Ein Ereignis, wie z. B. das Aufblitzen eines Lichtsignals, ist im Raum Ω bestimmt durch ein Wertsystem ξ, η, ζ, τ. Wir setzen

$$\mu = (\xi, \eta, \zeta, \tau)$$

und nennen μ einen Raum-Zeitpunkt oder einen Weltpunkt, und die vier Variablen ξ, η, ζ, τ sollen die Koordinaten des Weltpunktes heißen. Derselbe Weltpunkt wird aber auch für den Beobachter O durch die Werte

$$\mu = (x, y, z, t)$$

bestimmt, und es ist unsere nächste Aufgabe, die beiderlei Koordinaten durcheinander auszudrücken, es sind also x, y, z, t als Funktionen von ξ, η, ζ τ oder umgekehrt darzustellen.

Wir können uns vorstellen, der Beobachter O habe auf sein Koordinatensystem beliebige Maßstäbe und eine beliebig gehende

Uhr bezogen; nur soviel soll angenommen sein, dass einer Veränderung der x, y, z, t stets eine Veränderung der ξ, η, ζ, τ entspricht und umgekehrt, und daß einer stetigen Änderung des einen Systems eine stetige Änderung des anderen entspricht.

Wir bilden demnach die Differentiale:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
d\xi &= a_1^{(1)}dx + a_1^{(2)}dy + a_1^{(3)}dz + a_1^{(4)}dt,\\
d\eta &= a_2^{(1)}dx + a_2^{(2)}dy + a_2^{(3)}dz + a_2^{(4)}dt,\\
d\zeta &= a_3^{(1)}dx + a_3^{(2)}dy + a_3^{(3)}dz + a_3^{(4)}dt,\\
d\tau &= a_4^{(1)}dx + a_4^{(2)}dy + a_4^{(3)}dz + a_4^{(4)}dt,
\end{aligned}
$$

indem wir unter $a_i^{(k)}$ die partiellen Ableitungen der (ξ, η, ζ, τ) nach (x, y, z, t) verstehen.

Wir bezeichnen die Substitution (2) abkürzend mit

$$
(3)\qquad (d\xi, d\eta, d\zeta, d\tau) = (A)\,(dx, dy, dz, dt),
$$

wenn A die Matrix

$$
(4)\qquad (A) = \begin{pmatrix}
a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & a_1^{(3)}, & a_1^{(4)}\\
a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & a_2^{(3)}, & a_2^{(4)}\\
a_3^{(1)}, & a_3^{(2)}, & a_3^{(3)}, & a_3^{(4)}\\
a_4^{(1)}, & a_4^{(2)}, & a_4^{(3)}, & a_4^{(4)}
\end{pmatrix}
$$

bedeutet. Die Determinante

$$
(5)\qquad (A) = \sum \pm\, a_1^{(1)}\, a_2^{(2)}\, a_3^{(3)}\, a_4^{(4)}
$$

kann nicht verschwinden, weil sonst $d\xi, d\eta, d\zeta, d\tau$ verschwinden könnten, ohne daß dx, dy, dz, dt verschwinden, d. h. Veränderungen in O möglich wären, denen keine Veränderungen in Ω entsprechen. Die Verhältnisse dx/dt, dy/dt, dz/dt sind die Geschwindigkeitskomponenten in O, denen in Ω die Geschwindigkeitskomponenten $d\xi/d\tau$, $d\eta/d\tau$, $d\zeta/d\tau$ entsprechen.

§ 151.

Normalform der Substitution.

Ehe wir weiter gehen, wollen wir die Substitution (A) auf eine einfache Form bringen. Dazu haben wir das Mittel der ternären orthogonalen Transformation (rechtwinklige Transformation der Raumkoordinaten in O und in Ω). Es seien also

$$
(\alpha) = \begin{pmatrix}
\alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \alpha_{13}, & 0\\
\alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23}, & 0\\
\alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33}, & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}, \qquad
\beta = \begin{pmatrix}
\beta_{11}, & \beta_{12}, & \beta_{13}, & 0\\
\beta_{21}, & \beta_{22}, & \beta_{23}, & 0\\
\beta_{31}, & \beta_{32}, & \beta_{33}, & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

zwei orthogonale ternäre Substitutionen, und wir wenden auf dx, dy, dz die Transformation (α), auf $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ die Transformation $(\beta)^{-1}$ an; so geht die Transformation (A) über in

$$(\beta)\,(A)\,(\alpha) = (A'),$$

die auf die neuen $(d\xi, d\eta, d\zeta, d\tau)$ und (dx, dy, dz, dt) ausgeübt wird.

Man kann (α) und (β) so bestimmen, daß (A') die Form erhält:

$$(1) \qquad (A') = \begin{pmatrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & a_1^{(3)}; & a_1^{(4)} \\ 0, & a_2^{(2)}, & a_2^{(3)}, & a_2^{(4)} \\ 0, & 0, & a_3^{(3)}, & a_3^{(4)} \\ 0, & 0, & a_4^{(3)}, & a_4^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Um dies nachzuweisen, bestimme man zuerst (α), so daß:

$$(2) \qquad (A)\,(\alpha) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen:

$$a_3^{(1)}\alpha_{11} + a_3^{(2)}\alpha_{21} + a_3^{(3)}\alpha_{31} = 0,$$
$$a_4^{(1)}\alpha_{11} + a_4^{(2)}\alpha_{21} + a_4^{(3)}\alpha_{31} = 0,$$
$$a_4^{(1)}\alpha_{12} + a_4^{(2)}\alpha_{22} + a_4^{(3)}\alpha_{32} = 0,$$

wozu noch wegen der Orthogonalität die Gleichung kommt:

$$\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} + \alpha_{31}\alpha_{32} = 0.$$

Durch die beiden ersten dieser Gleichungen ist eine Richtung $\alpha_{11}:\alpha_{21}:\alpha_{31}$ bestimmt, die senkrecht steht auf den beiden Richtungen:

$$a_3^{(1)} : a_3^{(2)} : a_3^{(3)} \quad \text{und} \quad a_4^{(1)} : a_4^{(2)} : a_4^{(3)}\,[1]).$$

Dazu bestimmt die dritte und vierte der obigen Gleichungen eine weitere Richtung:

$$\alpha_{12} : \alpha_{22} : \alpha_{32},$$

die senkrecht steht auf den beiden Richtungen:

$$a_4^{(1)} : a_4^{(2)} : a_4^{(3)} \quad \text{und} \quad \alpha_{11} : \alpha_{21} : \alpha_{31}.$$

Hiermit sind zwei Achsen und dadurch zugleich die dritte des orthogonalen Systems (α) bestimmt.

Hierauf bestimme man (β), so daß $(\beta)\,(A)\,(\alpha)$ gleich A' werde, daß also:

---

[1]) Hier bezieht sich das Wort „Richtung" weder auf den Raum O noch auf den Raum Ω, sondern soll nur durch einen geläufigen Ausdruck die Verträglichkeit der linearen Gleichungen veranschaulichen.

$$\begin{pmatrix} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \beta_{13}, & 0 \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \beta_{23}, & 0 \\ \beta_{31}, & \beta_{32}, & \beta_{33}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}, & c_{12}, & c_{13}, & c_{14} \\ c_{21}, & c_{22}, & c_{23}, & c_{24} \\ 0, & c_{32}, & c_{33}, & c_{34} \\ 0, & 0, & c_{43}, & c_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & a_1^{(3)} & a_1^{(4)} \\ 0, & a_2^{(2)}, & a_2^{(3)}, & a_2^{(4)} \\ 0, & 0, & a_3^{(3)}, & a_3^{(4)} \\ 0, & 0, & a_4^{(3)}, & a_4^{(4)} \end{pmatrix},$$

und hierzu gehören die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \beta_{21} c_{11} + \beta_{22} c_{21} &= 0, \\ \beta_{31} c_{11} + \beta_{32} c_{21} &= 0, \\ \beta_{31} c_{12} + \beta_{32} c_{22} + \beta_{33} c_{32} &= 0, \\ \beta_{21} \beta_{31} + \beta_{22} \beta_{32} + \beta_{23} \beta_{33} &= 0, \end{aligned}$$

d. h. es ist:

$$(\beta_{31} : \beta_{32} : \beta_{33}) \text{ senkrecht zu } (c_{11} : c_{21} : 0) \text{ und zu } (c_{12} : c_{22} : c_{32})$$

und

$$(\beta_{21} : \beta_{22} : \beta_{23}) \text{ senkrecht zu } (c_{11} : c_{21} : 0) \text{ und zu } (\beta_{31} : \beta_{32} : \beta_{33}),$$

wodurch auch die Substitution (β) bestimmt ist.

Wir können demnach die rechtwinkligen Koordinatensysteme in O und Ω so wählen, daß die Substitution (2) § 150 die einfache Form erhält:

$$(3) \qquad \begin{aligned} d\xi &= a_1^{(1)} dx + a_1^{(2)} dy + a_1^{(3)} dz + a_1^{(4)} dt, \\ d\eta &= \phantom{a_1^{(1)} dx + {}} a_2^{(2)} dy + a_2^{(3)} dz + a_2^{(4)} dt, \\ d\zeta &= \phantom{a_1^{(1)} dx + a_1^{(2)} dy + {}} a_3^{(3)} dz + a_3^{(4)} dt, \\ d\tau &= \phantom{a_1^{(1)} dx + a_1^{(2)} dy + {}} a_4^{(3)} dz + a_4^{(4)} dt, \end{aligned}$$

und diese soll die Normalform heißen.

Da die Determinante der Matrix A nicht verschwindet, so kann keiner der drei Faktoren $a_1^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, $(a_3^{(3)} a_4^{(4)} - a_4^{(3)} a_3^{(4)})$ verschwinden. Komponiert man noch mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \varepsilon_2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \varepsilon_3, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \varepsilon_4 \end{pmatrix},$$

worin die ε gleich ± 1 und $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = +1$ ist, so tritt $\varepsilon_1 a_1^{(1)}$, $\varepsilon_2 a_2^{(2)}$ an Stelle von $a_1^{(1)}$, $a_2^{(2)}$ und man kann daher in (3) annehmen, daß $a_1^{(1)}$, $a_2^{(2)}$ positiv sind[1]).

[1]) Der Zweck dieser ganzen Transformation ist, wie sich später zeigt, die z-Achsen beider Koordinatensysteme in die Bewegungsrichtung von O zu verlegen

§ 152.

Konstante Lichtgeschwindigkeit.

Die Betrachtungen der beiden letzten Paragraphen sind noch ganz allgemein. Die Welt des Beobachters O kann eine ganz beliebige Bewegung haben; er kann auf seinen Achsen beliebige Maßstäbe haben, und seine Uhr kann einen beliebigen Gang haben. Nur werden im allgemeinen die Koeffizienten a_{ik} Funktionen von x, y, z, t (oder von ξ, η, ζ, τ) sein und auch die Transformationen (α), (β), die zur Herstellung der Normalform dienen, werden von diesen Variablen abhängen. Es muß eine Hypothese oder Erfahrung dazu genommen werden, um die Maße für O mit den Maßen für Ω in Beziehung zu setzen. Für die räumlichen Maße ist dies die Euklidische Geometrie. Für das Zeitmaß ist es die Annahme, daß O aus seinen Beobachtungen dieselbe Lichtgeschwindigkeit c erhalten soll, wie Ω aus den seinigen. Dies drückt sich in der Formel aus, daß für einen mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Weltpunkt

$$(1) \qquad c^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{d\tau^2}$$

sein soll, oder anders ausgedrückt:

Wenn $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, $d\tau$ in der Beziehung stehen:

$$(2) \qquad d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - c^2 d\tau^2 = 0,$$

so befriedigen dx, dy, dz, dt die Bedingung:

$$(3) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = 0,$$

und daraus folgt, wenn die quadratische Form

$$(4) \qquad f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

eingeführt wird, und h eine Konstante (in bezug auf dx, dy, dz, dt) bedeutet, daß die Substitution (A) die Gleichung

$$(5) \qquad f(dx, dy, dz, dt) = hf(d\xi, d\eta, d\zeta, d\tau)$$

identisch befriedigt. Es ist also f eine Invariante dieser Substitution.

Ein negatives f entspricht einer Bewegung eines materiellen Punktes mit Überlichtgeschwindigkeit, ein positives f mit Unterlichtgeschwindigkeit[1]).

---

[1]) Wir haben a priori keinerlei Grund zu einer derartigen Annahme; ja es ist dadurch nicht einmal eine physikalische Tatsache ausgesprochen. Es kommt nur darauf an, das Zeitmaß so zu bestimmen, daß die Tatsachen der Erfahrung so einfach wie möglich dargestellt werden können. Dieser For-

Da die ternär orthogonalen Substitutionen; d. h. die orthogonalen Transformationen der Raumkoordinaten, die Invariante $x^2 + y^2 + z^2$ haben, so bleibt die durch (5) ausgedrückte Invarianteneigenschaft von f, und zwar mit unverändertem h, für jede rechtwinklige Koordinaten-Transformation erhalten und gilt daher auch für die Normalform § 151 (3).

Nach der allgemeinen Theorie der linearen Transformation der quadratischen Formen ist:

$$h^2 = \sum \pm a_1^{(1)} a_2^{(2)} a_3^{(3)} a_4^{(4)} \tag{6}$$

die Determinante der Substitution (A) (mit positivem Vorzeichen).

Macht man in (5) die Substitution der Normalform § 151 (3), so ergibt sich:

$$\begin{array}{llll} h a_1^{(1)2} = 1, & a_1^{(2)} = 0, & a_1^{(3)} = 0, & a_1^{(4)} = 0, \\ h a_2^{(2)2} = 1, & a_2^{(3)} = 0, & a_2^{(4)} = 0 & \end{array}$$

und die Gleichung (5) gibt

$$dz^2 - c^2 dt^2 = h(d\zeta^2 - c^2 d\tau^2), \tag{7}$$

die durch die Substitution

$$\begin{aligned} d\zeta &= a_3^{(3)} dz + a_3^{(1)} dt, \\ d\tau &= a_4^{(3)} dz + a_4^{(4)} dt \end{aligned} \tag{8}$$

befriedigt werden muß.

Schreibt man (7) in der Weise:

$$(dz - c\,dt)(dz + c\,dt) = h(d\zeta - c\,d\tau)(d\zeta + c\,d\tau), \tag{9}$$

so erkennt man, daß die Abhängigkeit zwischen dz, dt und $d\zeta, d\tau$ die Form haben muß:

$$\begin{aligned} \lambda(dz + c\,dt) &= \sqrt{h}(d\zeta + c\,d\tau), \\ \lambda^{-1}(dz - c\,dt) &= \sqrt{h}(d\zeta - c\,d\tau)^{1)}, \end{aligned} \tag{10}$$

worin λ ein neuer Koeffizient ist. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} d\zeta &= \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2\sqrt{h}} dz + \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2\sqrt{h}} c\,dt, \\ c\,d\tau &= \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2\sqrt{h}} dz + \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2\sqrt{h}} c\,dt \end{aligned}$$

---

derung hat in der Elektrodynamik und der Lichttheorie die Annahme der konstanten Lichtgeschwindigkeit am besten entsprochen. Vermutlich ist sie nur eine Annäherung an eine weiteren Erfahrungen noch besser entsprechende Annahme. Siehe den Vortrag von **Minkowski** über Raum und Zeit bei der Naturforscher-Versammlung in Cöln (1908) (gedruckt im 18. Band des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1909).

[1]) Man könnte auch $d\tau$ durch $-d\tau$ ersetzen; das würde einen entgegengesetzten Gang der Uhr in Ω bedeuten.

oder, wenn man zur Vereinfachung

$$\frac{\lambda - \lambda^{-1}}{\lambda + \lambda^{-1}} = -q,$$

und folglich

$$\frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}, \quad \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2} = \frac{-q}{\sqrt{1-q^2}}$$

setzt:

$$\begin{aligned} \sqrt{h}\, d\zeta &= \frac{dz - qc\,dt}{\sqrt{1-q^2}}, \\ \sqrt{h}\, c\,d\tau &= \frac{-q\,dz + c\,dt}{\sqrt{1-q^2}}, \end{aligned} \tag{11}$$

die sich in bezug auf dz, dt auflösen lassen und die Relationen ergeben:

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\sqrt{h}(d\zeta + qc\,d\tau)}{\sqrt{1-q^2}}, \\ c\,dt &= \frac{\sqrt{h}(q\,d\zeta + c\,d\tau)}{\sqrt{1-q^2}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Hierzu kommt noch für die beiden anderen Achsen:

$$\begin{aligned} \sqrt{h}\, d\xi &= dx, \\ \sqrt{h}\, d\eta &= dy \end{aligned} \tag{13}$$

und die Substitution (A) hat jetzt die Form:

$$\begin{pmatrix} a_1^{(1)}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & a_1^{(1)}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & a_3^{(3)}, & a_3^{(4)} \\ 0, & 0, & a_4^{(3)}, & a_4^{(4)} \end{pmatrix},$$

worin

$$a_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{h}}, \quad a_3^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{h(1-q^2)}}, \quad a_4^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{h(1-q^2)}},$$

$$a_3^{(4)} = -\frac{qc}{\sqrt{h(1-q^2)}}, \quad a_4^{(3)} = \frac{-q}{c\sqrt{h(1-q^2)}}.$$

Nach Einführung der konstanten Lichtgeschwindigkeit sind die Substitutionen (α), (β), d. h. die auf die Normalform führenden räumlichen Koordinatensysteme nicht vollständig bestimmt, sondern es können nach Herstellung der Normalform willkürliche Drehungen um die z-Achse hinzukommen. [Es zeigt sich hier bei den Gleichungen in § 150, die zur Bestimmung der (α) (β) dienen, dieselbe Eigentümlichkeit wie bei der Bestimmung der Hauptachsen eines Rotationsellipsoids.]

Eine lineare Transformation der vier Variablen

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

bei der die Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

invariant bleibt, heißt eine Lorentz-Transformation.

§ 153.

Bedeutung der Substitution.

Aus diesen Formeln ergibt sich nun die Bedeutung der Koeffizienten. Zunächst folgt aus (13), daß, wenn $d\xi$, $d\eta = 0$ sind, auch dx, dy verschwinden, d. h.:

1. Wenn der Weltpunkt μ für Ω eine Bewegung in der Richtung der ζ-Achse hat, so hat er sie für O in der Richtung der z-Achse.

Das betrifft die Lage der räumlichen Koordinatensysteme in Ω und in O. Wir können also die z-Achse die Achse der Bewegung nennen.

Setzen wir $d\xi = 0$, $d\eta = 0$, $d\zeta = 0$, so ist μ ein in Ω ruhender Punkt, und es ergibt sich aus (12):

$$dz = \sqrt{\frac{h}{1-q^2}}\, q c\, d\tau, \tag{1}$$

$$dt = \sqrt{\frac{h}{1-q^2}}\, d\tau, \tag{2}$$

also ist

$$\frac{dz}{dt} = qc$$

die Geschwindigkeit in O des in Ω ruhenden Punktes μ. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeit mit v, so ist also:

$$q = \frac{v}{c}. \tag{3}$$

2. Also ist q das Verhältnis der relativen Geschwindigkeit eines in Ω ruhenden Punktes gegen den Raum O zu der Lichtgeschwindigkeit.

Ferner ergibt sich aus der Gleichung (2):

$$\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{\frac{h}{1-q^2}}. \tag{4}$$

Denken wir uns also einen Vorgang in einem für Ω ruhenden Punkt von der Dauer $d\tau$, so wird der Ort dieses Vorganges für O nicht ruhen, sondern die durch die Gleichung (1) bestimmte Bewegung haben. Die Dauer dt des Vorganges für O wird durch (2) bestimmt, und in (4) ist das Verhältnis der beiden Zeitdauern bestimmt, wodurch der Gang der Uhren Ω und O verglichen wird.

Wenn sich umgekehrt ein Ereignis in einem für O ruhenden Punkt von der Dauer dt abspielt, so hat man $dz = 0$ zu setzen und erhält aus § 152 (11):

$$\sqrt{h}\, d\zeta = \frac{-qc}{\sqrt{1-q^2}}\, dt,$$

$$\sqrt{h}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\, dt,$$

woraus sich dann

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\sqrt{h(1-q^2)}} \tag{5}$$

ergibt.

3. N e h m e n w i r n u n a n, d a ß a l l e s, b e s o n d e r s a u c h d e r G a n g d e r U h r e n, s o r e g u l i e r t s e i, d a ß d i e R ä u m e O u n d Ω v o l l s t ä n d i g v e r t a u s c h b a r s e i e n, s o m ü s s e n (4) u n d (5) ü b e r e i n s t i m m e n, d. h. e s m u ß $h = 1$ s e i n.

Wenn wir, wie bisher, über die Bewegung des Raumes O nichts voraussetzen, so werden die Substitutionen (A), (α), (β) noch von den Koordinaten des betrachteten Weltpunktes μ abhängen[1]). Nehmen wir aber jetzt an, daß der Raum O gegen Ω

---

[1]) Die Koeffizienten in (A) können nicht beliebige Funktionen von x, y, z, t sein, sondern sie müssen noch den Bedingungen genügen, die sich daraus ergeben, daß $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, $d\tau$ vollständige Differentiale sind, wovon z. B. die erste lautet:

$$\partial a_1^{(1)}/\partial y = \partial a_1^{(2)}/\partial x.$$

Inwieweit diese Bedingungen mit der Hypothese der konstanten Lichtgeschwindigkeit verträglich sind, wäre noch zu untersuchen. So muß z. B., wenn man in den Gleichungen § 152 (11) $h = 1$ annimmt, q notwendig eine Konstante sein.

in einer gleichförmigen Bewegung begriffen sei, und daß die Maßverhältnisse von Raum und Zeit in der Umgebung eines jeden Weltpunktes die gleichen sind, so werden die Koeffizienten von A und die Substitutionen (α), (β) von den Koordinaten des Raumpunktes unabhängig sein müssen, und wir können die Differentialformeln zwischen dx, dy, dz, dt und $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, $d\tau$ integrieren, d. h. wir können, wenn wir die Nullwerte einander entsprechen lassen, überall das Zeichen d weglassen und erhalten also (für die Normalform) aus § 152 (11), (12):

$$(6)\qquad \begin{aligned} \zeta &= \frac{z - qct}{\sqrt{1-q^2}}, & z &= \frac{\zeta + qc\tau}{\sqrt{1-q^2}}, \\ c\tau &= \frac{-qz + ct}{\sqrt{1-q^2}}, & ct &= \frac{q\zeta + c\tau}{\sqrt{1-q^2}}. \end{aligned}$$

Es fasse nun der Beobachter O die Punkte, die für Ω dauernd auf einer Kugel liegen, also der Bedingung

$$(7)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$$

genügen, zur Zeit $t = 0$, d. h. für ihn gleichzeitig ins Auge.

Es ist dann nach (6):

$$\xi = x, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = \frac{z}{\sqrt{1-q^2}}, \qquad \tau = \frac{-qz}{c\sqrt{1-q^2}},$$

$$(8)\qquad x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1-q^2} = a^2,$$

d. h. die Kugel wird dem Beobachter O als ein in der Richtung der Bewegung abgeplattetes Ellipsoid erscheinen, und wenn O sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, als Scheibe.

Setzen wir $z = 0$, d. h. bleiben wir im bewegten System an derselben Stelle, so ergibt sich aus (6):

$$(9)\qquad t = \tau\sqrt{1-q^2},$$

d. h. wenn dem Beobachter Ω eine Stunde verflossen ist, ist dem bewegten Beobachter nur ein Bruchteil einer Stunde verstrichen. Ist etwa $q = 1$, also die Geschwindigkeit von O gleich der Lichtgeschwindigkeit, so werden zwei Signale, die für Ω eine Stunde auseinander liegen, dem Beobachter O gleichzeitig erscheinen.

§ 154.
Die elektromagnetischen Grundgleichungen für ruhende Körper.

Im ersten Bande haben wir die Maxwellschen elektromagnetischen Grundgleichungen für ruhende Materie in der Form aufgestellt (Bd. I, § 163, I, II):

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} c \operatorname{curl} \mathfrak{M} &= \frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}}{\partial t} + 4\pi\lambda\mathfrak{E}, \\ c \operatorname{curl} \mathfrak{E} &= -\frac{\partial \mu \mathfrak{M}}{\partial t}, \end{aligned}$$

dazu kommen [Bd. I, § 133 (2), § 155 (1), (2)]:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} &= 4\pi\varrho, \\ \operatorname{div} \mu \mathfrak{M} &= 4\pi m. \end{aligned}$$

Hier bedeutet:

$\mathfrak{E}$ den elektrischen,
$\mathfrak{M}$ den magnetischen Kraftvektor,
ε die Dielektrizitätskonstante,
μ die magnetische Permeabilität,
λ die elektrische Leitfähigkeit,
ϱ die Dichtigkeit der wahren Elektrizität,
m die Dichtigkeit des wahren Magnetismus (die nur in permanenten Magneten von Null verschieden ist),
c die Lichtgeschwindigkeit.

Hier lag die bei ruhender Materie unbedenkliche Voraussetzung zugrunde, daß den elektrischen und magnetischen Kraftvektoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$ die entsprechenden Verschiebungsvektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{P}$ proportional seien [Bd. I, § 133 (1), § 155 (1)]:

$$\text{(3)} \qquad 4\pi\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E},$$

$$\text{(4)} \qquad 4\pi\mathfrak{P} = \mu\mathfrak{M}.$$

Diese Voraussetzung ist aber nicht mehr ohne weiteres gestattet, wenn die Materie bewegt ist, und wir wollen daher die Gleichungen (1), (2) zunächst auch für ruhende Materie in den Verschiebungen aufstellen:

$$\text{(5)} \qquad c \operatorname{curl} \mathfrak{M} = 4\pi \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + 4\pi\lambda\mathfrak{E},$$

$$\text{(6)} \qquad c \operatorname{curl} \mathfrak{E} = -4\pi \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t},$$

(7) $$\operatorname{div}\mathfrak{D} = \varrho,$$

(8) $$\operatorname{div}\mathfrak{P} = m.$$

Hierin kommen ε und μ nicht mehr vor. Sie werden aber eingeführt durch die Gleichungen (3), (4).

Nehmen wir ε, μ, λ als gegebene Funktionen an, so haben wir, da jede der vier Gleichungen (3) bis (6) drei Gleichungen repräsentiert, für die vierzehn Unbekannten

(9) $$\begin{matrix} E_x, & E_y, & E_z, & D_x, & D_y, & D_z, & \varrho, \\ M_x, & M_y, & M_z, & P_x, & P_y, & P_z, & m \end{matrix}$$

vierzehn Gleichungen.

Entsprechend dem Umstande, daß wir keine magnetischen Ströme kennen, werden wir auch vom „wahren Magnetismus" absehen, d. h. $m = 0$ setzen. Dann vermindert sich die Zahl der unbekannten Funktionen um eins. Die Gleichungen (6) ergeben aber, daß $\operatorname{div}\mathfrak{P}$ von der Zeit unabhängig ist, was dann mit (8) für $m = 0$ verträglich ist.

Diesen Gleichungen geben wir hier nach Minkowski durch Einführung der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ eine symmetrische Form, indem wir

(10) $$x, \quad y, \quad z, \quad ict$$

ersetzen durch

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4,$$

so daß

(11) $$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

wird.

Wir führen weiter die Bezeichnung ein:

(12) $$\begin{matrix} & M_x, & M_y, & M_z, & 4\pi D_x, & 4\pi D_y, & 4\pi D_z, \\ \text{gleich} & f_{23}, & f_{31}, & f_{12}, & i f_{14}, & i f_{24}, & i f_{34} \end{matrix}$$

und

(13) $$\begin{matrix} & 4\pi P_x, & 4\pi P_y, & 4\pi P_z, & E_x, & E_y, & E_z, \\ \text{gleich} & F_{23}, & F_{31}, & F_{12}, & i F_{14}, & i F_{24}, & i F_{34}, \end{matrix}$$

mit der Bestimmung, daß

(14) $$f_{h,k} = -f_{k,h}; \qquad F_{h,k} = -F_{k,h}$$

sein soll.

Und endlich:

(15) $$\begin{matrix} & 4\pi\lambda E_x, & 4\pi\lambda E_y, & 4\pi\lambda E_z, & 4\pi i \varrho \\ \text{gleich} & c s_1 & c s_2 & c_3 s_3 & s_4. \end{matrix}$$

Die erste der Gleichungen (5) ist:

$$c\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) = 4\pi\,\frac{\partial D_x}{\partial t} + 4\pi\lambda E_x,$$

und gibt also in der neuen Bezeichnung:

$$\frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} = -\frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} + s_1$$

und die Gleichung (7):

$$\frac{\partial f_{14}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_3} = -4\pi i\varrho.$$

So erhalten wir aus (5) und (7) das erste System:

$$\text{I.}\qquad \begin{aligned}
&& \frac{\partial f_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{14}}{\partial x_4} &= s_1,\\
\frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} && + \frac{\partial f_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{24}}{\partial x_4} &= s_2,\\
\frac{\partial f_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{32}}{\partial x_2} && + \frac{\partial f_{34}}{\partial x_4} &= s_3,\\
\frac{\partial f_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial f_{43}}{\partial x_3} && &= s_4.
\end{aligned}$$

Ebenso ergeben (6) und (8):

$$\text{II.}\qquad \begin{aligned}
&& \frac{\partial F_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_4} &= 0,\\
\frac{\partial F_{43}}{\partial x_1} && + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_4} &= 0,\\
\frac{\partial F_{24}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{41}}{\partial x_2} && + \frac{\partial F_{12}}{\partial x_4} &= 0,\\
\frac{\partial F_{32}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{21}}{\partial x_3} && &= 0,
\end{aligned}$$

und aus (3), (4) folgt:

$$\text{III.}\qquad \begin{aligned}
f_{14} - \varepsilon F_{14} &= 0,\\
f_{24} - \varepsilon F_{24} &= 0,\\
f_{34} - \varepsilon F_{34} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\text{IV.}\qquad \begin{aligned}
F_{23} - \mu f_{23} &= 0,\\
F_{31} - \mu f_{31} &= 0,\\
F_{12} - \mu f_{12} &= 0.
\end{aligned}$$

Endlich haben wir noch aus (15):

$$\text{V.}\qquad \begin{aligned} c s_1 &= 4\pi i \lambda F_{14}, \\ c s_2 &= 4\pi i \lambda F_{24}, \\ c s_3 &= 4\pi i \lambda F_{34}, \\ s_4 &= 4\pi i \varrho. \end{aligned}$$

§ 155.

Elektromagnetische Grundgleichungen für bewegte Körper.

Dies sind also die Gleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge, unter der Voraussetzung ruhender Materie. Um den Einfluß der Bewegung auszudrücken, müssen wir die Geschwindigkeit der Materie v einführen, deren Komponenten v_x, v_y, v_z seien, so daß $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Wir wollen die Geschwindigkeit durch vier Variable v_1, v_2, v_3, v_4 in der Weise ausdrücken, daß

(1) $$v_x : v_y : v_z : ic = v_1 : v_2 : v_3 : v_4,$$

und den gemeinsamen Faktor der v_k so bestimmen, daß

(2) $$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 = -1;$$

es ergibt sich dann:

(3) $$\begin{aligned} v_1 &= \frac{v_x}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \\ v_2 &= \frac{v_y}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \\ v_3 &= \frac{v_z}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \\ v_4 &= \frac{ic}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \end{aligned}$$

Für den Zustand der Ruhe ist dann

(4) $$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad v_4 = 1.$$

Nach der Theorie von Minkowski erfahren die Gleichungen I, II durch die Bewegung der Materie keine Änderung. Die Gleichungen III, IV, V sollen so ergänzt werden, daß sie in bezug auf die Indizes 1, 2, 3, 4 symmetrisch sind und für den Zustand der Ruhe in die Gleichungen III, IV übergehen. Wir setzen zur Abkürzung:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\varphi_{hk} &= f_{hk} - \varepsilon F_{hk},\\ \Phi_{hk} &= F_{hk} - \mu f_{hk}\end{aligned}$$

und setzen an Stelle der Gleichungen III:

$$\text{III*.}\qquad \begin{array}{rrrrl} & v_2\varphi_{12} & + v_3\varphi_{13} & + v_4\varphi_{14} & = 0,\\ v_1\varphi_{21} & & + v_3\varphi_{23} & + v_4\varphi_{24} & = 0,\\ v_1\varphi_{31} & + v_2\varphi_{32} & & + v_4\varphi_{34} & = 0,\\ v_1\varphi_{41} & + v_2\varphi_{42} & + v_3\varphi_{43} & & = 0,\end{array}$$

eine dieser vier Gleichungen ist eine Folge der drei anderen; denn wenn man sie mit v_1, v_2, v_3, v_4 multipliziert und addiert, so verschwindet die Summe identisch [nach § 154 (14)]. Ebenso setzen wir an Stelle von IV:

$$\text{IV*.}\qquad \begin{array}{rrrrl} & v_2\Phi_{34} & + v_3\Phi_{42} & + v_4\Phi_{23} & = 0,\\ v_1\Phi_{43} & & + v_3\Phi_{14} & + v_4\Phi_{31} & = 0,\\ v_1\Phi_{24} & + v_2\Phi_{41} & & + v_4\Phi_{12} & = 0,\\ v_1\Phi_{32} & + v_2\Phi_{13} & + v_3\Phi_{21} & & = 0.\end{array}$$

Für den Zustand der Ruhe gehen diese Gleichungen nach (4) über in

$$\begin{array}{lll}\varphi_{14} = 0, & \varphi_{24} = 0, & \varphi_{34} = 0,\\ \Phi_{23} = 0, & \Phi_{31} = 0, & \Phi_{12} = 0,\end{array}$$

in Übereinstimmung mit III, IV.

Dazu kommt noch für die Funktionen s_1, s_2, s_3, s_4:

$$\text{V*.}\qquad \begin{aligned} c(s_1 - 4\pi\varrho v_1) &= 4\pi\lambda(\qquad\quad v_2F_{12} + v_3F_{13} + v_4F_{14}),\\ c(s_2 - 4\pi\varrho v_2) &= 4\pi\lambda(v_1F_{21} + \qquad + v_3F_{23} + v_4F_{24}),\\ c(s_3 - 4\pi\varrho v_3) &= 4\pi\lambda(v_1F_{31} + v_2F_{32} + \qquad + v_4F_{34}),\\ c(s_4 - 4\pi\varrho v_4) &= 4\pi\lambda(v_1F_{41} + v_2F_{42} + v_3F_{43}\qquad).\end{aligned}$$

und diese Gleichungen gehen für den Zustand der Ruhe (4) in V über.

Minkowski hat unter Benutzung einer eleganten Symbolik nachgewiesen, daß die Gleichungen I, II, III*, IV*, V* invariant bleiben, wenn man die Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 einer Lorentz-Transformation $(x') = (A)(x)$ unterwirft, wobei die s_i und v_i derselben Transformation unterworfen werden. Die f_{ik}, F_{ik} werden so transformiert, wie sich die Koeffizienten U_{ik} der Bilinearform:

$$(6)\qquad \begin{aligned} U = {} & U_{23}(x_2y_3 - x_3y_2) + U_{31}(x_3y_1 - x_1y_3) + U_{12}(x_1y_2 - x_2y_1)\\ & + U_{14}(x_1y_4 - x_4y_1) + U_{24}(x_2y_4 - x_4y_2) + U_{34}(x_3y_4 - x_4y_3)\end{aligned}$$

transformieren, wenn auf die beiden Variablenreihen (x) und (x') gleichzeitig die Substitution (A) angewandt wird (Raum-Zeit-vektoren zweiter Art nach Minkowski). Dies ist die Forderung des Relativitäts-Postulats[1]).

§ 156.

Invarianz.

Um die Invarianz der Grundgleichungen gegenüber den Lorentz-Transformationen zu beweisen, möge jetzt die Substitution (A) so bezeichnet sein:

$$(A) = \begin{pmatrix} a_1^{(1)}, & a_1^{(2)}, & a_1^{(3)}, & a_1^{(4)} \\ a_2^{(1)}, & a_2^{(2)}, & a_2^{(3)}, & a_2^{(4)} \\ a_3^{(1)}, & a_3^{(2)}, & a_3^{(3)}, & a_3^{(4)} \\ a_4^{(1)}, & a_4^{(2)}, & a_4^{(3)}, & a_4^{(4)} \end{pmatrix},$$

und es werden mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ zwei Permutationen der Ziffern 1, 2, 3, 4 bezeichnet.

Ist dann A die Determinante von (A), so ist:

$$A = \pm \begin{vmatrix} a_{\alpha_1}^{(\beta_1)}, & a_{\alpha_1}^{(\beta_2)}, & a_{\alpha_1}^{(\beta_3)}, & a_{\alpha_1}^{(\beta_4)} \\ a_{\alpha_2}^{(\beta_1)}, & a_{\alpha_2}^{(\beta_2)}, & a_{\alpha_2}^{(\beta_3)}, & a_{\alpha_2}^{(\beta_4)} \\ a_{\alpha_3}^{(\beta_1)}, & a_{\alpha_3}^{(\beta_2)}, & a_{\alpha_3}^{(\beta_3)}, & a_{\alpha_3}^{(\beta_4)} \\ a_{\alpha_4}^{(\beta_1)}, & a_{\alpha_4}^{(\beta_2)}, & a_{\alpha_4}^{(\beta_3)}, & a_{\alpha_4}^{(\beta_4)} \end{vmatrix},$$

und zwar $+$ oder $-$, je nachdem die Permutationen α, β zu derselben oder zu verschiedenen Arten gehören. Um diese Zweideutigkeit zu vermeiden, wollen wir festsetzen, daß beide Permutationen zur ersten Art gehören[2]).

Ist die Substitution (A) orthogonal (Lorentz-Transformation), so bestehen die Relationen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\sum^{\beta} a_{\alpha_1}^{(\beta)} a_{\alpha_2}^{(\beta)} = 0, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2, \qquad &&\sum^{\alpha} a_{\alpha}^{(\beta_1)} a_{\alpha}^{(\beta_2)} = 0, \quad \beta_1 \neq \beta_2, \\ &\sum^{\beta} a_{\alpha}^{(\beta)} a_{\alpha}^{(\beta)} = 1, &&\sum^{\alpha} a_{\alpha}^{(\beta)} a_{\alpha}^{(\beta)} = 1. \end{aligned}$$

---

[1]) Zuerst exakt formuliert von Einstein.

[2]) Unter einer Permutation der ersten Art versteht man eine solche, die durch eine gerade Anzahl von Transpositionen von nur zwei Ziffern entsteht.

Es werde weiter gesetzt:

$$\frac{\partial A}{\partial a_\alpha^{(\beta)}} = A_\alpha^{(\beta)}. \tag{2}$$

Dann ist für die Lorentz-Transformation mit der Determinante 1, wie aus (1) leicht hervorgeht:

$$A_\alpha^{(\beta)} = a_\alpha^{(\beta)}. \tag{3}$$

Wird weiter gesetzt:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial a_{\alpha_1}^{(\beta_1)}\, \partial a_{\alpha_2}^{(\beta_2)}} = a_{\alpha_3}^{(\beta_3)}\, a_{\alpha_4}^{(\beta_4)} - a_{\alpha_3}^{(\beta_4)}\, a_{\alpha_4}^{(\beta_3)} = A_{\alpha_1, \alpha_2}^{\beta_1, \beta_2}, \tag{4}$$

so erhält man für die Lorentz-Transformation aus bekannten Determinanten-Sätzen[1]):

$$A_{\alpha_1, \alpha_2}^{\beta_1, \beta_2} = A_{\alpha_3, \alpha_4}^{\beta_3, \beta_4}. \tag{5}$$

Die Differentialgleichungen des vorigen Paragraphen lassen sich nun in folgender Weise darstellen. Man führe eine vierreihige Determinante ein:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Diese Determinante bleibt ungeändert, wenn man die vier Reihen von Variablen $x_\alpha, y_\alpha, \xi_\alpha, \eta_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) gleichzeitig einer linearen Transformation (A) unterwirft, die zunächst nicht einmal orthogonal zu sein braucht, sondern nur die Determinante 1 haben muß.

Dies folgt einfach aus dem Multiplikationssatz der Determinanten.

Unterwirft man die ξ_α, η_α gleichzeitig der Transformation (A), und setzt:

$$U_{\alpha_1 \alpha_2} = \xi_{\alpha_1} \eta_{\alpha_2} - \xi_{\alpha_2} \eta_{\alpha_1}, \tag{7}$$

so transformieren sich die $U_{\alpha_1 \alpha_2}$ so:

$$U'_{\beta_1 \beta_2} = \sum^{\alpha_1, \alpha_2} A_{\alpha_1, \alpha_2}^{\beta_1, \beta_2}\, U_{\alpha_3, \alpha_4}, \tag{8}$$

und dafür kann man im Falle der Lorentz-Transformation nach (5) auch setzen:

---

[1]) Vgl. Weber, Algebra, Bd. I, § 31.

(9) $$U'_{\beta_1\beta_2} = \sum^{\alpha_1,\alpha_2} A^{\beta_1,\beta_2}_{\alpha_1,\alpha_2} U_{\alpha_1\alpha_2}.$$

Diese Substitution möge mit $[A]$ bezeichnet werden.

Multipliziert man nun je vier Gleichungen der Systeme I, II, III*, IV*, V* (§ 153, 154) mit unbestimmten Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ und addiert, so kann man diese fünf Systeme symbolisch durch die Determinante Δ darstellen, wenn man in Δ setzt:

$$x_\alpha = \lambda_\alpha \quad \text{in allen fünf,}$$

$$\left.\begin{aligned} y_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \\ U_{\alpha_1\alpha_2} &= f_{\alpha_3\alpha_4} \\ \Delta &= \sum \lambda_\alpha s_\alpha \end{aligned}\right\} \text{ in I,}$$

$$\left.\begin{aligned} y_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \\ U_{\alpha_1\alpha_2} &= F_{\alpha_1\alpha_2} \\ \Delta &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ in II,}$$

$$\left.\begin{aligned} y_\alpha &= v_\alpha \\ U_{\alpha_1\alpha_2} &= \varphi_{\alpha_3\alpha_4} \\ \Delta &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ in III*,}$$

$$\left.\begin{aligned} y_\alpha &= v_\alpha \\ U_{\alpha_1\alpha_2} &= \Phi_{\alpha_1\alpha_2} \\ \Delta &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ in IV*,}$$

$$\left.\begin{aligned} y_\alpha &= v_\alpha \\ U_{\alpha_1\alpha_2} &= F_{\alpha_3\alpha_4} \\ 4\pi\lambda\Delta &= c\sum^{\alpha} \lambda_\alpha(s_\alpha - 4\pi\varrho v_\alpha) \end{aligned}\right\} \text{ in V*}$$

Wenn man nun auf die x_1, x_2, x_3, x_4 und gleichzeitig auf die $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ eine Lorentz-Transformation (A) ausübt:

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) = A(x_1, x_2, x_3, x_4),$$
$$(\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \lambda'_4) = A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4),$$

so ist nach (1):

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'_1}, \frac{\partial}{\partial x'_2}, \frac{\partial}{\partial x'_3}, \frac{\partial}{\partial x'_4}\right) = (A)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right),$$

und wenn man die beiden Systeme

$$\xi_1, \; \xi_2, \; \xi_2, \; \xi_4,$$
$$\eta_1, \; \eta_2, \; \eta_3, \; \eta_4$$

derselben Transformation unterwirft, so erfahren die $U_{\alpha_1 \alpha_2}$ nach (8) und (9) die Substitution $[A]$. Wendet man also die Substitution (A) auch noch auf die beiden Variablenreihen

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad v_4,$$
$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4$$

an, so bleibt nicht nur Δ invariant, sondern es sind auch nach den Relationen (1)

$$\sum^{\alpha} \lambda_\alpha s_\alpha \quad \text{und} \quad \sum \lambda_\alpha (s_\alpha - 4\pi \varrho v_\alpha)$$

invariant, und damit ist dann nachgewiesen:

> daß das System der elektromagnetischen Grundgleichungen einer Lorentz-Transformation gegenüber invariant ist.

§ 157.

Explizite Form der elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper.

Um die elektromagnetischen Grundgleichungen I, II, III*, IV*, V* in reeller Form vor Augen zu haben, hat man die Substitutionen (10), (12), (13), (15) § 154 und (3) § 155 zurückzumachen und erhält die Gleichungen I:

$$\text{I}^{**}.\quad \begin{aligned} c\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) &= \frac{\partial \varepsilon E_x}{\partial t} + 4\pi\lambda E_x, \\ c\left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial \varepsilon E_y}{\partial t} + 4\pi\lambda E_y, \\ c\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) &= \frac{\partial \varepsilon E_z}{\partial t} + 4\pi\lambda E_z, \\ \frac{\partial \varepsilon E_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon E_y}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon E_z}{\partial z} &= 4\pi\varrho, \end{aligned}$$

und die Gleichungen II:

$$\text{II}^{**}.\quad \begin{aligned} c\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial \mu M_x}{\partial t}, \\ c\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) &= -\frac{\partial \mu M_y}{\partial t}, \\ c\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial \mu M_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial \mu M_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu M_y}{\partial y} + \frac{\partial \mu M_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Auf diese Gleichungen ist die Bewegung der Materie noch von keinem Einfluß. In den folgenden Gleichungen § 155 III*, IV*, V* sind dann auch die Substitutionen § 155 (3) auszuführen. So ergibt sich:

$$\text{III}^{**}.\quad \begin{aligned} v_y(M_z - 4\pi\varepsilon P_z) - v_z(M_y - 4\pi\varepsilon P_y) &= -c(4\pi D_x - \varepsilon E_x), \\ v_z(M_x - 4\pi\varepsilon P_x) - v_x(M_z - 4\pi\varepsilon P_z) &= -c(4\pi D_y - \varepsilon E_y), \\ v_x(M_y - 4\pi\varepsilon P_y) - v_y(M_x - 4\pi\varepsilon P_x) &= -c(4\pi D_z - \varepsilon E_z), \end{aligned}$$

woraus die vierte Gleichung III* durch Multiplikation mit v_x, v_y, v_z und Addition folgt. Ferner wird aus IV*:

$$\text{IV}^{**}.\quad \begin{aligned} v_y(E_z - 4\pi\mu D_z) - v_z(E_y - 4\pi\mu D_y) &= c(4\pi P_x - \mu M_x), \\ v_z(E_x - 4\pi\mu D_x) - v_x(E_z - 4\pi\mu D_z) &= c(4\pi P_y - \mu M_y), \\ v_x(E_y - 4\pi\mu D_y) - v_y(E_x - 4\pi\mu D_x) &= c(4\pi P_z - \mu M_z). \end{aligned}$$

$$\text{V}^{**}.\quad \begin{aligned} -\varrho v_x - 4\pi\lambda(v_y P_z - v_z P_y) &= \lambda E_x(c - \sqrt{c^2 - v^2}), \\ -\varrho v_y - 4\pi\lambda(v_z P_x - v_x P_z) &= \lambda E_y(c - \sqrt{c^2 - v^2}), \\ -\varrho v_z - 4\pi\lambda(v_x P_y - v_y P_x) &= \lambda E_z(c - \sqrt{c^2 - v^2}), \\ c\varrho(c - \sqrt{c^2 - v^2}) &= -\lambda(v_x E_x + v_y E_y + v_z E_z)\,^{1)}. \end{aligned}$$

§ 158.

Transformation der Kräfte und Verschiebungen in der Normalform.

Um die physikalische Bedeutung der Transformation deutlicher zu übersehen, gehen wir zur Normalform (§ 151) über. Wir setzen also die Matrix (A) in der Form an:

$$(A) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \dfrac{1}{\sqrt{1-q^2}}, & \dfrac{iq}{\sqrt{1-q^2}} \\ 0, & 0, & \dfrac{-iq}{\sqrt{1-q^2}}, & \dfrac{1}{\sqrt{1-q^2}} \end{vmatrix}$$

und daraus erhält man die Elemente $A_{\alpha_1,\alpha_2}^{\beta_1,\beta_2}$ der mehrreihigen Matrix $[A]$:

---

1) Es ist hier nicht ratsam, die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 zu setzen, weil man dadurch die Kontrolle der Formeln durch die Homogenität verliert. Man kann dabei E und P durch Zahlen oder Einheiten eigener Art e ansehen, und hat dann die Dimensionen von

$$\begin{matrix} \varrho, & c, & v, & \lambda, \\ el^{-1}, & lt^{-1}, & lt^{-1}, & t^{-1}, \end{matrix}$$

$A^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}$	(12)	(13)	(14)	(23)	(24)	(32) oberer Index
(12)	1,	0,	0,	0,	0,	0
(13)	0,	$\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$,	$\frac{iqc}{\sqrt{1-q^2}}$,	0,	0,	0
(14)	0,	$\frac{-iq}{\sqrt{1-q^2}}$,	$\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$,	0,	0,	0
(23)	0,	0,	0,	$\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$,	$\frac{iq}{\sqrt{1-q^2}}$,	0
(24)	0,	0,	0,	$\frac{-iq}{\sqrt{1-q^2}}$,	$\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}$,	0
(34)	0,	0,	0,	0,	0,	1
unterer Index						

Setzt man wieder [§ 153 (3)]:

$$v = qc,$$

so werden die Koeffizienten U_{α_1,α_2} so transformiert:

$$U'_{12} = U_{12},$$

$$U'_{13} = \frac{c\,U_{13} + v\,i\,U_{14}}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$U'_{14} = \frac{-i\,v\,U_{13} + c\,U_{14}}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$U'_{23} = \frac{c\,U_{23} + v\,i\,U_{24}}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$U'_{24} = \frac{-v\,i\,U_{23} + c\,U_{24}}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$U'_{34} = U_{34}.$$

Um die elektromagnetischen Komponenten einzuführen, hat man die Substitutionen zu machen (§ 154):

U_{23},	U_{31},	U_{12},	U_{14},	U_{24},	U_{34}
M_x,	M_y,	M_z,	$-4\pi i D_x$,	$-4\pi i D_y$,	$-4\pi i D_z$,
$4\pi P_x$,	$4\pi P_y$,	$4\pi P_z$,	$-i E_x$,	$-i E_y$,	$-i E_z$,

und erhält:

$$M'_x = \frac{c M_x + 4\pi v D_y}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$M'_y = \frac{c M_y - 4\pi v D_x}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$M'_z = M_z.$$

$$P'_x = \frac{c P_x + \frac{v E_y}{4\pi}}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$P'_y = \frac{c P_y - \frac{v E_x}{4\pi}}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$P'_z = P_z.$$

$$D'_x = \frac{c D_x - \frac{v M_y}{4\pi}}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$D'_y = \frac{c D_y + \frac{v M_x}{4\pi}}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$D'_z = D_z.$$

$$E'_x = \frac{c E_x - 4\pi v P_y}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$E'_y = \frac{c E_y + 4\pi v P_x}{\sqrt{c^2 - v^2}},$$

$$E'_z = E_z.$$

§ 159[1]).

Der Versuch von Michelson und Morley.

Im folgenden soll gezeigt werden, wie sich das negative Ergebnis des klassischen Versuches von Michelson und Morley aus der Relativitätstheorie erklärt, wobei wir die Berechnungen nach der alten Anschauung des ruhenden Äthers und nach der Relativitätsanschauung miteinander in Parallele setzen.

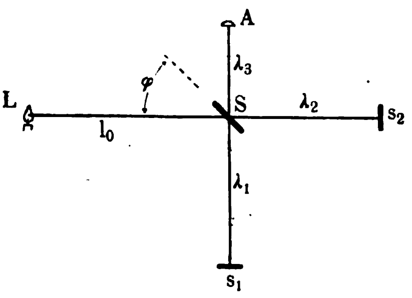
1. Es sei L eine Lichtquelle (Fig. 52), von der gleichzeitig zwei Lichtstrahlen ausgehen, beide in gleicher Richtung. Der eine (Strahl 1) werde am Spiegel S nach s_1 reflektiert, hier

[1]) Die §§ 159, 160 sind von R. H. Weber bearbeitet.

wieder in sich zurückgeworfen und komme durch den Spiegel S nach dem Beobachtungsinstrument A. Der andere Strahl (2) gehe von L durch den Spiegel S hindurch[1]) nach s_2, werde hier in die eigene Richtung zurückgeworfen und werde nun bei S nach A hin reflektiert. Beide Strahlen legen gemeinsam das Wegstück l_0 zurück, zu dem sie auf jeden Fall die gleiche Zeit gebrauchen[2]). Ein Zeitunterschied kann nur aus den Wegen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hervorgehen.

Wenn die ganze Versuchsanordnung sich in relativer Ruhe gegen den Äther befindet, müßten offenbar beide Strahlen gleichzeitig in A ankommen, wenn $\lambda_1 = \lambda_2$ gemacht wäre, vorausgesetzt, daß der Spiegel S als unendlich dünn angesehen werden kann[3]). Dieser Spiegel müßte um den Winkel $\varphi = 45^0$ gegen die Richtung $\overline{LS}$ geneigt sein.

Fig. 52.



2. Die ganze Anordnung soll sich nun aber in der Richtung $\overline{Ls_2}$ mit der Geschwindigkeit v gegen den Äther verschieben, was praktisch dadurch erreicht werden möge, daß sie mit dieser Richtung in die momentane Fortbewegungsrichtung der Erde eingestellt werde.

Wir fragen nun zunächst, welche Zeitdifferenz berechnet sich für die Ankunft der beiden Strahlen in A, wenn wir auf das Relativitätsprinzip keine Rücksicht nehmen?

3. Da sich während der Zeit T_1, die der Strahl gebraucht, um von S über s_1 nach A zu kommen, der Beobachtungsapparat A selbst verschoben haben wird, muß der Winkel φ etwas kleiner als 45^0 sein, wodurch ein Lichtweg entsteht, wie ihn Fig. 53 skizziert.

---

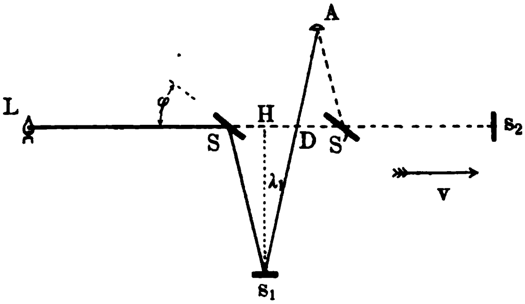
[1]) Der Spiegel S ist einseitig schwach versilbert, so daß ein Teil des Lichtes, das ihn trifft, hindurchgelassen, ein anderer Teil reflektiert wird.

[2]) Die Zeit eines Strahles soll die Zeit sein, die eine bestimmte Phase, etwa ein Wellenberg der Lichtwellen, zur Zurücklegung einer gegebenen Strecke braucht.

[3]) Da nur eine Spiegeloberfläche versilbert ist, geht einer der Strahlen einmal, der andere dreimal durch das Spiegelglas. Das haben Michelson und Morley dadurch kompensiert, daß sie in den Weg des ersteren ein zweites Glasplättchen gleicher Dicke und gleicher Neigung eingefügt haben.

4. Ist c die Lichtgeschwindigkeit, T_1' die Zeit, die erforderlich ist, den Weg $\overline{Ss_1}$, T_1'' diejenige, die erforderlich ist, den Weg $\overline{s_1 D}$, und schließlich T_1''' die Zeit, die erforderlich ist, den Weg $\overline{DA}$ zurückzulegen, so wird (Fig. 53):

Fig. 53.



$$\begin{aligned}
\overline{Ss_1}^2 &= (cT_1')^2 = \lambda_1^2 + \overline{SH}^2 = \lambda_1^2 + (vT_1')^2, \\
\overline{s_1 D}^2 &= (cT_1'')^2 = \lambda_1^2 + \overline{HD}^2 = \lambda_1^2 + (vT_1'')^2, \\
\overline{DA}^2 &= (cT_1''')^2 = \qquad\qquad = \lambda_3^2 + (vT_1''')^2,
\end{aligned}$$

und deshalb:

$$T_1' = T_1'' = \frac{\lambda_1}{\sqrt{c^2 - v^2}}; \quad T_1''' = \frac{\lambda_3}{\sqrt{c^2 - v^2}};$$

und die Summe dieser drei Zeiten, die Zeit des ganzen Strahlenweges S, s_1, D, A wird

$$T_1 = \frac{2\lambda_1}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{\lambda_3}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

oder, wenn $q = v/c$ gesetzt wird,

$$(1) \qquad T_1 = \frac{2\lambda_1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} + \frac{\lambda_3}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

5. Der zweite Strahl möge die Zeiten T_2' zum Durchlaufen von $\overline{Ss_2}$, T_2'' zum Durchlaufen von $\overline{s_2 S}$ und T_2''' zum Durchlaufen von $\overline{SA}$ ($\overline{s_2 S'}$ und $\overline{S'A}$ in Fig. 53) gebrauchen. Da in der Zeit T_2' der Spiegel s_2 selbst fortrückt, so muß das Licht einen Weg größer als λ_2 durchlaufen, um, von S ausgehend, s_2 zu erreichen. Der durchlaufene Weg berechnet sich aus der Lichtgeschwindigkeit c zu cT_2' und andererseits ist die scheinbare Vergrößerung gegenüber der Länge λ_2 gleich vT_2', also ist

$$cT_2' = \lambda_2 + vT_2'.$$

Nach der Reflexion an s_2 kommt dem Strahl der Spiegel S entgegen, und es wird

$$c\,T_2'' = \lambda_2 - v\,T_2'',$$

und schließlich ergibt sich noch, wie beim ersten Strahl:

$$(c\,T_2''')^2 = \lambda_3^2 + (v\,T_2''')^2.$$

Daraus ergibt sich nach Auflösung dieser Gleichungen die Gesamtzeit des zweiten Strahles durch Addition:

$$T_2 = \lambda_2\left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v}\right) + \frac{\lambda_3}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2\,\lambda_2\,c}{c^2-v^2} + \frac{\lambda_3}{\sqrt{c^2-v^2}},$$

oder, wenn wieder $v/c = q$ eingeführt wird:

$$(2) \qquad T_2 = \frac{2\,\lambda_2}{c}\,\frac{1}{1-q^2} + \frac{\lambda_3}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}.$$

6. Die Zeitdifferenz zwischen den zwei Strahlen, d. h. die Zeit, um die der Strahl 2 über s_2 später in A ankommt, als der Strahl 1 über s_1, ist

$$(3) \qquad d = T_2 - T_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{\lambda_2}{1-q^2} - \frac{\lambda_1}{\sqrt{1-q^2}}\right).$$

7. Wenn q klein ist, so daß in einer Entwickelung nach q^2 die höheren Potenzen gegen die zweite vernachlässigt werden können, so wird

$$(3a) \qquad d = \frac{2}{c}\,(\lambda_2 - \lambda_1) + \frac{2}{c}\,(\lambda_2 - \tfrac{1}{2}\,\lambda_1)\,q^2,$$

und wenn schließlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ gemacht ist,

$$d = \frac{\lambda}{c}\,q^2.$$

Ist T die Schwingungsdauer, L die Wellenlänge des angewandten Lichtes, also $c\,T = L$, so folgt noch

$$(4) \qquad \delta = \frac{d}{T} = \frac{\lambda}{L}\,q^2.$$

Interferenzerscheinungen lassen die Größe δ messen. λ/L kann sehr groß gemacht werden, und wenn auch q sehr klein ist, für die Erdbewegung um die Sonne gleich $0{,}995 \,.\, 10^{-4}$ (der „Aberrationswinkel“ im Bogenmaß), so hätten die Beobachtungen von Michelson und Morley doch den in (4) berechneten Wert δ erkennen lassen müssen. Das Ergebnis war aber negativ, die Grundidee unserer Theorie ist also unzutreffend [1]).

[1]) Die Wege λ_1, λ_2 haben Michelson und Morley bei ihren letzten Versuchen durch wiederholte Strahlenreflexion wesentlich vergrößert.

8. Es ist für das Folgende wichtig, noch ein Wort über die Gleichheit der Wege λ_1 und λ_2 zu sagen. In der Tat sind sie nicht streng gleich zu machen, auch ist der Wegunterschied nicht genau festzustellen. Dagegen läßt sich eine Wegdifferenz eliminieren, was aufs gleiche hinauskommt, wie eine strenge Abgleichung der beiden Wege. Das geschieht folgendermaßen:

9. Es sei also λ_1 nicht gleich λ_2. In der Zeitdifferenz d (3) trägt, wie man sieht, weder der Weg l_0, noch der Weg über λ_3 etwas bei. Dreht man also die ganze Versuchsanordnung auf der Erdoberfläche um 90°, so daß l_0 in die frühere Richtung λ_1, λ_1 in λ_2 usw. fällt, und daß die Richtung v jetzt mit der Richtung $\overline{Ss_1}$ parallel wird, so werden in der Berechnung der Zeitdifferenzen die Punkte A und L ihre Rolle vertauschen, was ohne Einfluß bleibt. Ein von L aus schräg gegen l_0 laufender Lichtstrahl, nicht der zu λ_1 normale, wird den Spiegel S treffen, entsprechend dem schräg in A eintreffenden Strahl der Fig. 53. Es werden also auch λ_1 und λ_2 ihre Rollen vertauschen und man wird jetzt die Zeiten finden:

$$\overline{\tau_1} = \frac{2\lambda_1}{c}\,\frac{1}{1-q^2} + \frac{\lambda_3}{c+v},$$

$$\overline{\tau_2} = \frac{2\lambda_2}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{\lambda_3}{c+v},$$

und nun wird die Zeit $\overline{d}$, um die der Strahl 1 später in A ankommt als der Strahl 2:

$$\overline{d} = \overline{\tau_1} - \overline{\tau_2} = \frac{2}{c}\left(\frac{\lambda_1}{1-q^2} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{1-q^2}}\right). \tag{5}$$

10. Setzt man das arithmetische Mittel von λ_1 und λ_2 gleich λ, so ergibt sich aus d und $\overline{d}$, (3) und (5), das Mittel

$$\frac{d+\overline{d}}{2} = \frac{2\lambda}{c}\left(\frac{1}{1-q^2} - \frac{1}{\sqrt{1-q^2}}\right),$$

also derselbe Wert, der sich für d ergeben hätte, wenn λ_1 und λ_2 einander gleich gewesen wären. Statt der exakten Abgleichung der Wege λ_1 und λ_2 kann man also bei zwei zueinander senkrechten Stellungen der Versuchsanordnung beobachten und das Mittel aus den beobachteten Zeitdifferenzen bilden[1]).

11. Übrigens kommt es für die von Michelson und Morley angewandte Interferenzmethode nicht darauf an, daß die Wege

[1]) In Wahrheit ergibt eine Verschiebung von Interferenzstreifen bei der Drehung um 90° gleich den Wert $(d+\overline{d})/T$.

λ_1, λ_2 einander gleich sind, sondern nur, daß sie sich um gewisse Vielfache der Wellenlänge des angewandten Lichtes unterscheiden, und das läßt sich auf optischem Wege exakt herstellen, unabhängig von der relativen Bewegung der Anordnung gegen den Äther, indem man die ganze Anordnung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Erde bringt, so daß also letztere normal zu der Zeichenebene steht. Das gibt freilich praktische Schwierigkeiten, kann aber doch für das Folgende zu unseren theoretischen Betrachtungen angenommen werden. Es kommt dann aufs gleiche hinaus, als ob man mittels eines Maßstabes die beiden Längen genau abgeglichen hätte, was deshalb unmöglich ist, weil die Abmessung am Maßstab nicht annähernd ausreichende Genauigkeit liefert.

§ 160.

Anwendung der Einsteinschen Relativitätstheorie auf den Michelson-Morleyschen Versuch.

1. Es soll nun die Einsteinsche Relativitätstheorie zugrunde gelegt werden. ξ, η, ζ, τ sind die Raum-Zeitkoordinaten im absolut ruhenden Raume Ω, x, y, z, t die im mitbewegten Raume O. Die z- und die ζ-Achse seien der Verschiebung v parallel. Dann gelten die Gleichungen § 153 (6):

$$x = \xi, \quad y = \eta; \tag{1}$$

$$\zeta = \frac{z - qct}{\sqrt{1 - q^2}}; \tag{2a}$$

$$z = \frac{\zeta + qc\tau}{\sqrt{1 - q^2}}; \tag{2b}$$

$$c\tau = \frac{-qz + ct}{\sqrt{1 - q^2}}; \tag{3a}$$

$$ct = \frac{q\zeta + c\tau}{\sqrt{1 - q^2}}. \tag{3b}$$

2. Es ist nun zu beachten, daß der mitbewegte Beobachter die Längen λ_1, λ_2 abgleicht, während die Gleichungen § 159 (1) und (2) der ganzen Ableitung nach für den im Raume Ω ruhenden Beobachter gelten.

Im Momente der Ausmessung sei $\tau = 0$ und die Koordinatenanfangspunkte von Ω und O fallen beide in den Mittelpunkt des Spiegels S. Die x- und ξ-Achse sollen in die Richtung λ_1 fallen.

Der mitbewegte Beobachter mißt dann nach (1)

$$l_1 = \lambda_1,$$

nach (2a)

$$l_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{1 - q^2}},$$

und in § 159 (1) und (2) sind daher λ_1 und λ_2 nicht gleich. Es wird deshalb, wenn $l_1 = l_2 = l$ gesetzt wird:

$$\tau_1 = \frac{2l}{c}\frac{1}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{\lambda_3}{c}\frac{1}{\sqrt{1-q^2}},$$

$$\tau_2 = \frac{2l}{c}\frac{\sqrt{1-q^2}}{1-q^2} + \frac{\lambda_3}{c}\frac{1}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Also wird

$$\tau_1 = \tau_2.$$

Der ruhende Beobachter findet die gleichen Ankunftszeiten, wenn der mitbewegte Beobachter die Wegstrecken $\overline{Ss_1}$ und $\overline{Ss_2}$ abgleicht.

3. Daß auch der mitbewegte Beobachter gleiche Ankunftszeiten findet, folgt daraus, daß das Beobachtungsinstrument A sich auf der x-Achse des mitbewegten Koordinatensystems befindet. Es ist am Beobachtungsorte also dauernd $z = 0$ und deshalb nach (3a):

$$\tau_1 = \frac{t_1}{\sqrt{1-q^2}}; \qquad \tau_2 = \frac{t_2}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Der mitbewegte Beobachter findet also auch, daß beide Strahlen gleiche Zeit zu ihren Wegen gebrauchen.

Diese Resultate gelten, wie man es von einer Relativitätstheorie fordern muß, mit absoluter Genauigkeit, nicht nur bis auf Glieder höherer Ordnung in q^2; denn von der gekürzten Gleichung § 159 (3a) ist hier kein Gebrauch gemacht worden.

Daß der ruhende und der mitbewegte Beobachter beide für die zwei Strahlen gleiche Zeiten finden, weist darauf hin, daß zur Erklärung des negativen Ergebnisses im Michelson-Morleyschen Versuche nur ein Teil der Einsteinschen Relationen § 153 (6) erforderlich ist. Eine räumliche Deformation des bewegten Raumes O,

$$l_2 = \frac{\lambda_2}{\sqrt{1-q^2}},$$

würde ausreichen. Die Deformation der Zeit

$$\tau_2 = \frac{t_2}{\sqrt{1-q^2}}$$

anzunehmen, ist nicht erforderlich (Lorentz).

FÜNFTES BUCH.

HYDRODYNAMIK.

Neunzehnter Abschnitt.

Allgemeine Grundsätze.

---

§ 161.

Hydrostatik.

Wir haben in § 60f. allgemeine Gesetze kennen gelernt, die für die Druckkräfte in einer deformierbaren Substanz gültig sind. Wir wenden diese Gesetze auf den Fall einer Flüssigkeit an, worunter wir sowohl ein Gas als eine tropfbare Flüssigkeit verstehen.

Für eine Flüssigkeit besteht über den inneren Druck das folgende Gesetz, das unter dem Namen des Gesetzes des isotropen Druckes bekannt ist:

I. Der Druck Π_ν, der an einer Stelle der Flüssigkeit gegen ein Flächenelement mit der Normalen ν wirkt, steht senkrecht auf der Fläche und ist von der Richtung von ν unabhängig.

Solange wir nur den Ruhezustand einer im Gleichgewicht befindlichen flüssigen Masse betrachten, gilt dies Gesetz auch noch, wenn Reibung und Zähigkeit berücksichtigt werden. Anders ist es aber bei bewegten Massen, wo durch diese beiden Einflüsse bei der Bewegung selbst noch besondere Kräfte geweckt werden. Können wir auch im Falle der Bewegung von diesen beiden Einflüssen absehen, so nennen wir die Flüssigkeit eine vollkommene oder auch ideale Flüssigkeit.

Ein negativer Druck bedeutet eine Tendenz auf Zerreißung der Flüssigkeit. Wenn wir also unter einer vollkommenen Flüssigkeit eine solche verstehen, die dem Zerreißen keinen Widerstand entgegensetzt, so müssen wir auch fordern, daß beim Gleichgewicht und auch bei einer stetigen Bewegung der Druck nicht negativ wird. Nehmen wir dagegen an, daß die Flüssigkeit einer Kraft, die auf das Zerreißen wirkt, bis zu einer gewissen Grenze widerstehen könne, so müssen wir wenigstens fordern, daß der Druck nicht unter eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Grenze herabsinkt.

Grenzen wir im Innern der Flüssigkeit ein Volumen τ' ab, so wirkt erfahrungsgemäß der Druck gegen die Oberfläche von τ' in der Richtung der inneren Normale; wenigstens wollen wir ihn positiv rechnen, wenn er in dieser Richtung wirkt. Bezeichnen wir ihn also mit p, so haben wir, um die Formeln des § 60, 61 anzuwenden, $\Pi_\nu = -p$ zu setzen.

Eine Folge der Annahme I. ist die, daß auch der äußere Druck P senkrecht gegen die freie Oberfläche der Flüssigkeit wirkt. Ist die Oberfläche der Flüssigkeit nicht überall frei, sondern ganz oder zum Teil durch feste Wände begrenzt, so ist an diesen festen Wänden der Druck nicht mehr als gegeben, sondern als durch die Bedingungen der Aufgabe bestimmt anzusehen.

Der Druck p an irgend einer Stelle im Innern ist nach I. ein Skalar, also eine Funktion der Koordinaten x, y, z der Stelle.

Um die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, haben wir in den Gleichungen (10), (11), § 61

$$X_y = 0, \quad X_z = 0, \quad Y_x = 0, \quad Y_z = 0, \quad Z_x = 0, \quad Z_y = 0$$
$$X_x = Y_y = Z_z = -p$$

zu setzen, und erhalten, wenn X, Y, Z die Komponenten der äußeren Kraft sind, für den Druck p und die Dichtigkeit ϱ die Differentialgleichungen:

$$\varrho X = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varrho Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \varrho Z = \frac{\partial p}{\partial z}, \tag{1}$$

und für die freie Oberfläche

$$p = P. \tag{2}$$

Die Dichtigkeit ϱ betrachten wir bei den tropfbaren Flüssigkeiten als eine Konstante und nennen diese daher auch inkompressible Flüssigkeiten. Diese Annahme stimmt zwar nicht in aller Strenge, wohl aber mit großer Annäherung mit der Wirklichkeit überein.

Bei Gasen ist die Dichtigkeit nicht konstant. Es besteht zwischen Druck, Dichtigkeit und Temperatur das Boyle-Gay-Lussacsche Gesetz

(3) $$vp = RT,$$

worin T die sogenannte absolute Temperatur, also die Temperatur in Zentesimalgraden, von -273° an gerechnet, und v das Volumen der Masseneinheit, also $v = 1/\varrho$, bedeutet. R ist eine Konstante, die sogenannte Gaskonstante.

§ 162.

Hydrostatische Probleme.

Die Aufgabe der Hydrostatik besteht nun darin, aus den Grundgleichungen (1), (2), § 161, die Gestalt der Oberfläche und die Verteilung des Druckes im Innern abzuleiten. Dies ist leicht, wenn die äußeren Kräfte X, Y, Z als Funktionen des Ortes von vornherein gegeben sind, dagegen fehlt jeder allgemeine Ansatz in den Fällen, wo diese Kräfte von der noch unbekannten Oberflächengestalt abhängen. Es bleibt dann kaum ein anderer Weg übrig, als eine hypothetische Annahme über die Gestalt zu machen, die noch einige verfügbare Parameter enthält, und diese Parameter dann, wenn die Annahme eine zulässige war, nachträglich zu bestimmen.

Die Grundgleichungen § 161 (1) zeigen zunächst, daß ein Gleichgewicht der Flüssigkeit nur dann möglich ist, wenn der Ausdruck

(1) $$\varrho(X dx + Y dy + Z dz) = dp$$

ein vollständiges Differential ist, und wenn also ϱ konstant oder eine Funktion von p ist, so muß auch

(2) $$X dx + Y dy + Z dz = dV$$

ein vollständiges Differential sein.

Ist die Funktion V bekannt, so ergibt sich bei konstantem ϱ

(3) $$p = \varrho V + \text{const.}$$

und die Konstante wird bestimmt, wenn der Druck an einer Stelle, etwa einem Oberflächenpunkte, bekannt ist. Die Gleichung der Oberfläche wird dann $p = P$, also

(4) $$P = \varrho V + \text{const.}$$

Der einfachste Fall ist der, daß der Oberflächendruck P konstant ist (z. B. gleich dem Atmosphärendruck oder, im leeren Raume, $P = 0$). Dann ist an der freien Oberfläche auch V konstant.

Das interessanteste und wichtigste Beispiel ist das einer rotierenden Flüssigkeitsmasse, deren Teile einander nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen. Streng genommen handelt es sich hier zwar um ein dynamisches und kein statisches Problem. Wenn wir aber die Annahme machen, daß die flüssige Masse ohne Verschiebung ihrer Teile gegeneinander, also wie ein starrer Körper, mit unveränderlicher Winkelgeschwindigkeit rotiert, so können wir den Zustand auf ein mit-rotierendes Koordinatensystem beziehen, müssen dann aber die Zentrifugalkraft als äußere Kraft einführen.

Wenn ein Punkt m mit der Winkelgeschwindigkeit ω eine Kreisbahn mit dem Radius r beschreibt, so wird er in dem Zeitelement dt um die Strecke $\frac{1}{2} r\omega^2 dt^2$ von der geradlinigen Bahn nach dem Kreismittelpunkte hin abgelenkt. Es ist also $\frac{1}{2} r\omega^2 dt$ die mittlere Geschwindigkeit, mit der er diese Strecke durchläuft; die Anfangsgeschwindigkeit ist Null und die Endgeschwindigkeit also $r\omega^2 dt$; folglich ist $r\omega^2$ die Beschleunigung in der Richtung des Radius.

Die Masseneinheit in dem Punkte m wird daher gegen das Hindernis, das sie in jedem Augenblick in die Kreisbahn zwingt, eine Kraft von der Größe $r\omega^2$ in der Richtung des wachsenden r ausüben. Ist die Rotationsachse die z-Achse, also die Bewegung der xy-Ebene parallel und $r^2 = x^2 + y^2$, so sind die Komponenten dieser Zentrifugalkraft:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= x\omega^2 = \frac{\partial V_1}{\partial x}, \\
Y_1 &= y\omega^2 = \frac{\partial V_1}{\partial y}, \\
Z_1 &= 0 \quad\; = \frac{\partial V_1}{\partial z},
\end{aligned} \tag{5}
$$

worin

$$
V_1 = \tfrac{1}{2} r^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\omega^2. \tag{6}
$$

Dazu kommen noch die Komponenten X_2, Y_2, Z_2 der Anziehung der gesamten Flüssigkeit auf den Punkt mit den Koordinaten x, y, z. Diese können wir erst berechnen, wenn die Gestalt der Oberfläche, die wir suchen, bekannt ist. Wenn wir aber annehmen, die Oberfläche habe die Gestalt eines Ellipsoids mit den noch unbekannten Halbachsen a, b, c, und die Achsen x, y, z

fallen mit den Hauptachsen zusammen, so können wir die anziehenden Kräfte als Funktionen der a, b, c darstellen.

Wir haben in § 113 des ersten Bandes das Potential eines Ellipsoids bestimmt. Für unser jetziges Problem kommt nur das Potential für einen Oberflächenpunkt in Betracht, und wenn wir mit f die sogenannte Gravitationskonstante, d. h. die anziehende Kraft der Masseneinheit auf die Masseneinheit in der Einheit der Entfernung bezeichnen[1]) und

$$(7) \qquad V_2 = \pi \varrho f \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s}\right) \frac{ds}{D},$$

$$(8) \qquad D = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right)\left(1 + \frac{s}{c^2}\right)}$$

setzen, so ist

$$(9) \qquad X_2 = \frac{\partial V_2}{\partial x}, \quad Y_2 = \frac{\partial V_2}{\partial y}, \quad Z_2 = \frac{\partial V_2}{\partial z}.$$

Damit nun das Ellipsoid, unter Voraussetzung eines konstanten Oberflächendruckes, Gleichgewichtsfigur sein kann, muß die Gleichung

$$(10) \qquad V_1 + V_2 = \text{const.}$$

an der Oberfläche erfüllt sein, d. h. diese Gleichung muß mit der Gleichung des Ellipsoids

$$(11) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

da beide vom zweiten Grade sind, übereinstimmen. Es ergibt sich hieraus, daß sich die Koeffizienten von x^2, y^2, z^2 in (10), nämlich die drei Größen

$$(12) \qquad \tfrac{1}{2}\omega^2 - \pi \varrho f \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s) D}, \quad \tfrac{1}{2}\omega^2 - \pi \varrho f \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s) D},$$
$$- \pi \varrho f \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s) D}$$

---

[1]) Ist g die Beschleunigung der Schwere an der Erdoberfläche, M die Masse der Erde, R der Erdradius, so ist, wenn wir die Erde als Kugel betrachten, und von dem Einfluß der Rotation auf die Schwere absehen, $f = gR^2/M$. Die Dimension von f ist $[f] = [l^3 t^{-2} m^{-1}]$.

zueinander verhalten müssen wie $\frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}$, und es finden sich also, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\omega^2}{2\pi\varrho f} = \tau \tag{13}$$

setzen, und einen Proportionalitätsfaktor h einführen, die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)D} &= \tau + \frac{h}{a^2}, \\
\int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)D} &= \tau + \frac{h}{b^2}, \\
\int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)D} &= \phantom{\tau + {}} \frac{h}{c^2}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Ist τ und die Gesamtgröße der rotierenden Masse, also das Produkt abc gegeben, so enthalten diese drei Gleichungen noch drei Unbekannte, aber in transzendenter Form. Eliminieren wir zunächst h, so folgt:

$$\begin{aligned}
a^2\tau &= \int_0^\infty \frac{(a^2-c^2)s\,ds}{(a^2+s)(c^2+s)D}, \\
b^2\tau &= \int_0^\infty \frac{(b^2-c^2)s\,ds}{(b^2+s)(c^2+s)D},
\end{aligned} \tag{15}$$

woraus man zunächst schließt, daß $(a^2 - c^2)$ und $(b^2 - c^2)$ positiv sein müssen, daß also die **Rotationsachse die kleinste der drei Achsen** ist. Endlich ergibt sich aus (15) durch Elimination von τ:

$$0 = (a^2 - b^2)\int_0^\infty \frac{s\,ds}{D^3}\{(a^2-c^2)(b^2-c^2) - c^2(c^2+s)\}. \tag{16}$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch die Annahme

$$a = b, \tag{17}$$

d. h. durch ein Rotationsellipsoid. Machen wir diese Annahme, so ergibt eine der Gleichungen (15):

$$\tau = \int_0^\infty \frac{(a^2 - c^2)\, s\, ds}{(a^2 + s)^2 (c^2 + s) \sqrt{1 + \frac{s}{c^2}}},$$

oder, indem man

$$\frac{a^2 - c^2}{c^2} = \lambda^2, \qquad 1 + \frac{s}{c^2} = u^2$$

setzt:

(18) $$\tau = 2\lambda^2 \int_1^\infty \frac{(u^2 - 1)\, du}{(\lambda^2 + u^2)^2 u^2},$$

oder wenn man dieses Integral ausrechnet:

(19) $$\tau = -\frac{3}{\lambda^2} + \frac{3 + \lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arc\,tang} \lambda,$$

worin der Bogen arc tang λ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen ist. Die Größe λ kann jeden Wert von 0 bis ∞ haben, und zu jedem dieser Werte ergibt sich aus (19) ein Wert von τ, also eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit. Es kann also **jedes abgeplattete Rotationsellipsoid** Gleichgewichtsfigur sein, und zwar für eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit.

Lassen wir in (19) [oder einfacher noch in (18)] λ positive Werte durchlaufen, so bleibt τ positiv und verschwindet für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$. Es erhält also τ für irgend einen Wert $\lambda = \lambda_0$ einen Maximalwert τ_0, den man durch Näherungsrechnung finden kann. Man erhält genähert:

(20) $$\lambda_0 = 2{,}5293, \qquad \tau_0 = 0{,}2246.$$

Nehmen wir also die Rotationsgeschwindigkeit und damit nach (13) auch τ als gegeben an, so erhält man zwei, ein oder kein Rotationsellipsoid als mögliche Gleichgewichtsfigur, je nachdem τ kleiner, gleich oder größer als τ_0 ist.

Man kann aber die Gleichung (16) auch dadurch befriedigen, daß man

(21) $$\int_0^\infty \frac{s\, ds}{D^3} \left[(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) - c^2(c^2 + s)\right] = 0$$

setzt. Hält man hierin b und c fest, und nimmt $b > c$ an, so hat die linke Seite dieser Gleichung für ein unendlich großes a einen positiven, für $a = c$ einen negativen Wert, und geht also, wenn a von c bis Unendlich geht, einmal durch Null. Es gibt also unendlich viele dreiachsige Ellipsoide, die Gleichgewichtsfiguren sein können, und es können dabei die beiden Achsen b und c beliebig gewählt werden. Ein solches dreiachsiges Ellipsoid geht nur dann in ein Rotationsellipsoid über, wenn die beiden Achsen b, c der Bedingung genügen:

$$\int_0^\infty \frac{(b^4 - 2b^2c^2 - c^2 s)s\,ds}{\sqrt{\left(1+\frac{s}{c^2}\right)^3\left(1+\frac{s}{b^2}\right)^3}} = 0 \tag{22}$$

und diese Gleichung hat für jedes c eine Wurzel b, die größer als c ist. Ist b_0 die Wurzel von (22), so ist, wenn $b < b_0$ ist, das aus (21) bestimmte $a > b_0$ und umgekehrt.

Soll zu einer gegebenen Rotationsgeschwindigkeit, also zu einem gegebenen τ eine dreiachsige Ellipsoidfläche als Gleichgewichtsfigur bestimmt werden, so hat man gleichzeitig eine der Gleichungen (15) und die Gleichung (21) zu untersuchen. Es ergeben sich die folgenden Resultate.

Wenn τ zwischen den Grenzen 0 und 0,18711 liegt, so existieren drei ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren, ein dreiachsiges und zwei Rotationsellipsoide.

Ist $\tau = 0{,}18711$, so fallen das dreiachsige und das weniger abgeplattete der beiden Rotationsellipsoide in eines zusammen.

Liegt τ zwischen den Grenzen 0,18711 und 0,2246, so existieren nur noch zwei Rotationsellipsoide als Gleichgewichtsfiguren, die bei der oberen Grenze von τ in eines zusammenfallen.

Ist endlich τ größer als 0,2246, so existiert gar keine ellipsoidische Gleichgewichtsfigur mehr [1]).

[1]) C. O. Meyer, „de aequilibrii formis ellipsoidicis", Crelles Journal, Bd. 24 (1842). Die Möglichkeit eines dreiachsigen Ellipsoids als Gleichgewichtsfigur ist von Jacobi entdeckt. Die Rechnungen, die zu den eben angegebenen Resultaten führen, sind mühsam, aber ohne prinzipielle Schwierigkeiten. Methoden zur numerischen Berechnung der Achsenverhältnisse aus gegebenem τ hat Kostka gegeben (Monatsberichte der Berliner Akademie 1870). Er findet für den Wert $\tau = 0{,}0022997$, der den Verhältnissen bei der Erde entspricht, für die beiden Rotationsellipsoide:

$$\frac{a}{c} = 1{,}00433467, \qquad \frac{a}{c} = 680{,}4939$$

und für das dreiachsige Ellipsoid (abweichend von Meyer):

$$\frac{a}{c} = 52{,}4425, \qquad \frac{b}{c} = 1{,}0023134.$$

Eingehende Untersuchungen allgemeinerer Art über Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten, in denen besonders auch die Frage nach der Stabilität Berücksichtigung findet, sind von Poincaré angestellt (Acta Mathematica, Bd. 7, 1885).

§ 163.

Die Differentialgleichungen der Bewegung. Erste Form.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen lassen sich durch das d'Alembertsche Prinzip die Bedingungen der Bewegung herleiten, indem man zu den tatsächlich wirkenden, auf die Masseneinheit bezogenen äußeren Kräften X, Y, Z die in entgegengesetztem Sinne genommenen Beschleunigungen hinzufügt, also nach der Annahme von d'Alembert fordert, daß, wenn x'', y'', z'' die Komponenten der Beschleunigung sind, der bewegte Zustand in jedem Augenblick den Gleichgewichtsbedingungen genügen soll, wenn die äußeren Kräfte X, Y, Z durch

$$X - x'', \qquad Y - y'', \qquad Z - z''$$

ersetzt werden. Es ergeben sich also aus den Gleichungen § 161 (1) die für die Bewegung gültigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho(X - x'') &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \varrho(Y - y'') &= \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \varrho(Z - z'') &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1}$$

Es kommt nun zunächst darauf an, die Beschleunigungen durch die Unbekannten des Problems auszudrücken, um Differentialgleichungen bilden zu können. Man kann dabei von zwei verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen, und erhält dementsprechend die Differentialgleichungen der Bewegung in zwei verschiedenen Formen. Wir betrachten zunächst die Form der Differentialgleichungen, die man nach Lagrange benennt[1]).

Wenn danach x, y, z die Koordinaten nicht eines bestimmten Raumpunktes, sondern eines Massenelementes der Flüssigkeit sind, so haben wir x, y, z als Funktionen der Zeit zu betrachten, und es ist, wie in der Mechanik materieller Punkte

$$x'' = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \qquad y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Da aber, wie wir annehmen, die Flüssigkeit während der ganzen Bewegung einen Raum stetig erfüllt, so sind x, y, z noch

[1]) **Lagrange**, Mécanique analytique, tome II, section XI, 1815.

Funktionen von drei anderen unabhängigen Variablen a, b, c, durch deren Werte sich die verschiedenen Flüssigkeitselemente voneinander unterscheiden. Am einfachsten ist es, für diese Variablen a, b, c die Werte zu nehmen, die die Koordinaten x, y, z in irgend einem Moment, etwa für $t = 0$, haben (die Anfangswerte). Es können aber auch die a, b, c irgend drei voneinander unabhängige Funktionen dieser Anfangswerte sein.

Der Druck p geht bei dieser Darstellung aus einer Funktion von x, y, z in eine Funktion von a, b, c über, und wir haben also

$$(2) \qquad \frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a}$$

und zwei ähnliche Gleichungen. Aus (1) erhalten wir:

$$(3) \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(Z - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a}.$$

Wenn eine Kräftefunktion V existiert, wie wir jetzt annehmen wollen, so ist $X = \partial V/\partial x$, $Y = \partial V/\partial y$, $Z = \partial V/\partial z$, und folglich

$$X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} + Z\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial a}.$$

Demnach ergibt sich aus (3) und den beiden entsprechenden Gleichungen für b, c das System:

$$(4) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial a}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial V}{\partial a} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a}\\
\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial V}{\partial b} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b}\\
\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial V}{\partial c} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c}.
\end{aligned}$$

Hierzu kommt noch eine Gleichung, die wir als die Gleichung der Erhaltung der Masse bezeichnen können. Bezeichnen wir mit $d\tau$ ein Volumenelement der Flüssigkeit, mit ϱ die zugehörige Dichtigkeit, so ist das Integral

$$\int \varrho\, d\tau,$$

wenn man es in einem bestimmten Augenblick auf irgend einen Teil der bewegten Masse bezieht, mit der Zeit unveränderlich. Drücken wir das Integral in den Variablen a, b, c aus, so sind seine Grenzen von der Zeit unabhängig, und ϱ ist eine Funktion von a, b, c, t. Das Integral erhält dann die Form

$$\int \varrho \Theta \, da \, db \, dc,$$

worin der Ausdruck Θ nach Band I, § 39 (8) zu bilden ist. Man hat nach der dortigen Bezeichnung

$$\Theta = \sqrt{e e' e'' - g^2 e - g'^2 e' - g''^2 e'' + 2 g g' g''}, \tag{5}$$

worin

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2,$$

$$g = \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} \text{ usw.}$$

und man kann daher nach einem bekannten Determinantensatze

$$\Theta = \sum \pm \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a}, & \frac{\partial x}{\partial b}, & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a}, & \frac{\partial y}{\partial b}, & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a}, & \frac{\partial z}{\partial b}, & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \tag{6}$$

setzen. Die Bedingung der Erhaltung der Masse ergibt daher

$$\frac{\partial \varrho \Theta}{\partial t} = 0 \tag{7}$$

oder durch Integration, wenn wir mit $\varrho_0 \Theta_0$ die Werte dieser Funktionen für $t = 0$ bezeichnen:

$$\varrho \Theta = \varrho_0 \Theta_0. \tag{8}$$

In der Formel (6) wäre, da Θ nach seiner Definition eine wesentlich positive Größe ist, das Vorzeichen noch unbestimmt. Da aber nach (7) Θ immer dasselbe Zeichen hat wie Θ_0, so können wir die Variablen a, b, c immer so annehmen, daß die Determinante positiv ist, und dann ist also das Vorzeichen in (6) richtig. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn wir für a, b, c die Anfangswerte der Variablen x, y, z wählen.

Danach ist nämlich für $t = 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial a} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial a} = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial b} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = 0, \\ &\frac{\partial x}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial c} = 1, \end{aligned} \tag{9}$$

und folglich $\Theta_0 = 1$. Die Formel (8) ergibt daher:

$$\Theta = \frac{\varrho_0}{\varrho}, \tag{10}$$

die in dem Falle einer inkompressiblen Flüssigkeit, bei der $\varrho = \varrho_0$ ist, in

$$\Theta = 1 \tag{11}$$

übergeht.

Bei Gasen wird gewöhnlich die Dichtigkeit ϱ als eine aus physikalischen Gesetzen herzuleitende, aber gegebene Funktion des Druckes p betrachtet.

Hierzu ist jedoch noch folgendes zu bemerken:

Die Funktionen x, y, z sind für ein bestimmtes Wertsystem a, b, c stetige Funktionen von t, da ein Flüssigkeitsteilchen nicht plötzlich von einem Orte zu einem davon verschiedenen fortgetragen werden kann. Es müssen aber auch für einen konstanten Wert von t die x, y, z stetige Funktionen von a, b, c sein; denn unserer ganzen Betrachtung liegt die Voraussetzung zugrunde, daß benachbarte Flüssigkeitsteile im Verlauf der Bewegung benachbart bleiben.

Endlich müssen wir aber auch noch verlangen, daß zu verschiedenen Werten von a, b, c auch verschiedene Werte von x, y, z gehören, d. h. daß a, b, c **eindeutige Funktionen** von x, y, z sind. Wären sie nämlich das nicht, so würden verschiedene Flüssigkeitsteile im Verlaufe der Bewegung gleichzeitig an dieselbe Stelle kommen. Sie müssen dann aufeinander stoßen, und es treten Unstetigkeiten ein, über die unsere Gleichungen keine Auskunft mehr geben. Hierhin gehören solche Bewegungen, die sich durch Spritzen oder Branden zu erkennen geben.

Was die Grenzbedingungen betrifft, so haben wir zwischen einer freien Oberfläche und der Berührungsfläche der Flüssigkeit mit einer festen Wand zu unterscheiden. An der ersten gilt als Grenzbedingung, daß der Druck in der Flüssigkeit mit dem von außen gegebenen Druck übereinstimmen muß, also im einfachsten Fall, wo der atmosphärische Druck wirkt, an der Oberfläche eine Konstante ist. Für die Berührungsflächen zwischen der Flüssigkeit und der Wand nehmen wir an, daß ein an der Wand befindliches Flüssigkeitsteilchen **während der ganzen Dauer einer den Differentialgleichungen entsprechenden Bewegung mit der Wand in Berührung bleibt.**

§ 164.

Die Differentialgleichungen der Bewegung. Zweite Form.

Man kann bei der Aufstellung der Differentialgleichungen der Bewegung noch von einem anderen Gesichtspunkte ausgehen: man kann nämlich den mit bewegter Flüssigkeit erfüllten Raum als ein Geschwindigkeitsfeld auffassen (Bd. I, § 91), in dem es sich dann um die Bestimmung der Geschwindigkeit als Vektor und des Druckes und der Dichtigkeit als Skalare handelt.

Gegeben ist dabei in demselben Felde der Vektor der äußeren Kraft.

Alle Größen des Feldes und auch das Feld selbst, d. h. seine Begrenzung können noch Funktionen der Zeit sein. Wenn nun Ω irgend einen mit der Zeit veränderlichen Skalar des Feldes, also eine Funktion von x, y, z, t bedeutet, so wird ein bewegtes Massenteilchen m im Verlauf der Bewegung zu immer anderen und anderen Werten von Ω gelangen. Sind x, y, z die Koordinaten und u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten von m zur Zeit t, so sind nach Verlauf des Zeitelementes dt die Koordinaten von m:

$$x + u\,dt, \qquad y + v\,dt, \qquad z + w\,dt,$$

und folglich hat der Wert von Ω für das Teilchen m in dem Zeitelement dt um

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} + w\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) dt$$

zugenommen. Diese Größe können wir als das vollständige Differential von Ω bezeichnen, und wir setzen demnach:

$$\text{(1)} \qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} + u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} + w\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Die Komponenten der Beschleunigung des Teilchens erhalten wir hieraus, wenn wir $\Omega = u, v, w$ setzen, also

$$x'' = \frac{du}{dt}, \qquad y'' = \frac{dv}{dt}, \qquad z'' = \frac{dw}{dt}.$$

Diese Ausdrücke haben wir in den Formeln § 163 (1) einzusetzen, um die Differentialgleichungen der Bewegung zu erhalten:

$$(2)\quad \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Hierzu kommt noch eine Gleichung, die wir aus der allgemeinen Vektortheorie ableiten können. Bezeichnen wir nämlich mit $\mathfrak{U}$ den Geschwindigkeitsvektor, und grenzen in dem Felde irgend ein Volumen τ ab, so ist, wenn U_n die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Oberfläche von τ, ins Innere positiv gerechnet, und do ein Element der Oberfläche von τ bedeutet, $\int \varrho\, U_n do$ die in der Einheit der Zeit einströmende Flüssigkeitsmenge. Ist nun ϱ im Zeitelement dt um $(\partial\varrho/\partial t)dt$ gewachsen, so ist die Massenzunahme im Volumen τ in der Zeiteinheit gleich $\int (\partial\varrho/\partial t)d\tau$ und es ist also mit Rücksicht auf den Gauß-schen Satz Bd. I, § 95, I

$$\int \frac{\partial\varrho}{\partial t}\, d\tau = \int \varrho\, U_n do = -\int \operatorname{div} \varrho\,\mathfrak{U}\, d\tau.$$

Da dies für jedes beliebige Volumen τ gelten muß, so folgt [Bd. I, § 97, (5)]:

$$(3)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\varrho\,\mathfrak{U} = 0,$$

oder ausführlich geschrieben:

$$(4)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial\varrho u}{\partial x} + \frac{\partial\varrho v}{\partial y} + \frac{\partial\varrho w}{\partial z} = 0,$$

oder endlich noch:

$$(5)\qquad \frac{d\varrho}{dt} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0.$$

Im Falle einer inkompressiblen Flüssigkeit ist ϱ konstant, und dann wird diese Gleichung einfach:

$$(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Für eine freie Grenze ergibt sich noch, wenn P der gegebene äußere Druck ist, die Bedingung

$$(7)\qquad p = P.$$

Ist die Flüssigkeit mit festen Wänden in Berührung, so kommt die Bedingung dazu, daß die Flüssigkeitsbewegung nur in der Richtung der Wand vor sich gehen kann, und dies gibt, wenn die Wand in Ruhe ist, und n die Richtung der Normale bedeutet, die Bedingung:

$$U_n = 0, \tag{8}$$

und wenn die Wand selbst eine Geschwindigkeit hat, deren Komponente in der Richtung n gleich N ist:

$$U_n = N. \tag{9}$$

Wenn man aus diesen Bedingungen die Funktionen u, v, w bestimmt hat, so erhält man die Bahn des Flüssigkeitsteilchens m durch Integration des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w, \tag{10}$$

und die vollständige Integration dieses Systems gibt dann x, y, z als Funktionen von t und den Anfangswerten a, b, c. Dadurch ist der Übergang von den Differentialgleichungen der Hydrodynamik in der zweiten Form zu denen in der ersten Form gegeben.

Diese zweite Form der hydrodynamischen Differentialgleichungen wird die Eulersche genannt[1]). Sie ist in solchen Fällen mit Vorteil anzuwenden, in denen die Begrenzung der Flüssigkeitsmasse mit der Zeit unveränderlich ist, weil dann die Variablen x, y, z einen unveränderlichen Bereich haben. Ist aber die äußere Begrenzung veränderlich, so ist es geraten, die erste Form anzuwenden, weil dabei die unabhängigen Variablen a, b, c immer einen unveränderlichen Bereich haben.

§ 165.

Übergang von der Eulerschen zu der Lagrangeschen Form.

Nach Integration der Differentialgleichungen (10) § 164 sind x, y, z als Funktionen von t, a, b, c bestimmt, und man kann

[1]) Euler: Principes généraux du mouvement des fluides (Hist. de l'Acad. de Berlin 1755). Auch die erste, nach Lagrange benannte Form der hydrodynamischen Differentialgleichungen stammt ursprünglich von Euler: De principiis motus fluidorum. (Novi comm. Petropolitanae 1759. Cap. 6. De motu fluidorum ex statu initiali definiendo.) H. Hankel (Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, Göttingen 1861), dem wir diese historische Bemerkung verdanken, führt sie auf Riemann zurück.

von der zweiten Form wieder zur ersten zurückkehren, wenn man a, b, c als unabhängige Variable einführt. Ist dies geschehen, so ist die partielle Differentiation nach t, die im § 163 mit $\partial/\partial t$ bezeichnet war, dasselbe, was wir im vorigen Paragraphen mit d/dt bezeichnet haben.

Um die Transformation von den einen zu den anderen Variablen zu bewirken, hat man die bekannten Formeln zu benutzen:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\Theta\frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}}\\
\Theta\frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial z}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial y}{\partial a}},\\
\Theta\frac{\partial a}{\partial z} &= \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} = \frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial z}{\partial a}}
\end{aligned}
$$

usw., worin, wie früher (§ 163), Θ die Determinante

$$
(2)\qquad \Theta = \sum \pm \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}
$$

bedeutet.

Hiernach folgt aus (10) § 164, da die Differentiationen nach dt und ∂a, ∂b, ∂c miteinander vertauschbar sind:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial c},\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial a}{\partial y}\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial y}\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial y}\frac{d}{dt}\frac{\partial y}{\partial c},\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial a}{\partial z}\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial b}{\partial z}\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{\partial c}{\partial z}\frac{d}{dt}\frac{\partial z}{\partial c},
\end{aligned}
$$

und mithin nach (1):

$$
\Theta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{d\Theta}{dt}.
$$

Daraus ergibt sich:

$$
(3)\qquad \frac{d\varrho}{dt} + \varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{1}{\Theta}\frac{d\varrho\Theta}{dt},
$$

und hiernach geht die Gleichung § 164 (5) in § 163 (7) über.

Die Gleichungen § 164 (2) ergeben durch Multiplikation mit $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$ und Addition unmittelbar die erste der Gleichungen § 163 (4).

§ 166.

Erhaltung der Wirbelmomente.

Wir wollen jetzt die hydrodynamischen Gleichungen in eine andere Form bringen, aus der sich am einfachsten gewisse allgemeine Integralgleichungen ergeben. Wir setzen dabei voraus, daß die äußeren Kräfte eine Kräftefunktion haben, und gehen demnach von den Gleichungen (4) § 163 aus, in denen wir jetzt unter a, b, c die Anfangswerte der Koordinaten x, y, z verstehen. Wir bezeichnen mit u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten eines Massenteilchens und mit u_0, v_0, w_0 deren Anfangswerte, setzen also in der Bezeichnung von § 163

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w. \tag{1}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial x}{\partial a}\right) - u\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial x}{\partial a}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial a}, \end{aligned}$$

und ähnliches gilt für die anderen Glieder der Gleichungen § 163 (4). Wenn wir daher

$$\chi = \int_0^t \left[V - \int \frac{dp}{\varrho} + \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right] dt \tag{2}$$

setzen, so können wir die Gleichungen § 163 (4) in Beziehung auf t integrieren, und erhalten mit Rücksicht auf § 163 (9):

$$\begin{aligned} u\frac{\partial x}{\partial a} + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a} &= u_0 + \frac{\partial \chi}{\partial a}, \\ u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} + w\frac{\partial z}{\partial b} &= v_0 + \frac{\partial \chi}{\partial b}, \\ u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c} &= w_0 + \frac{\partial \chi}{\partial c}\text{ [1]}. \end{aligned} \tag{3}$$

Weber's eqs.

[1] H. Weber, Über eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen: Crelles Journal 68 (1868).

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit da, db, dc und addieren, so folgt:

$$(4)\qquad u\,dx + v\,dy + w\,dz = u_0\,da + v_0\,db + w_0\,dc + d\chi,$$

worin bei der Bildung der Differentiale dx, dy, dz, $d\chi$ die Zeit nicht als variabel gilt.

Nun nehmen wir im Gebiete der Variablen a, b, c irgend einen Bereich, in dem die Funktion χ endlich, stetig und eindeutig ist, nehmen in diesem Gebiete eine geschlossene Kurve S_0 und legen durch diese eine Fläche F_0. Diese Kurve und diese Fläche werden mit den Flüssigkeitsteilchen, die sie zur Zeit $t = 0$ erfüllen, mit der Zeit fortfließen, und zur Zeit t eine Kurve S und eine Fläche F erfüllen, deren Punkte die Koordinaten x, y, z haben. Integrieren wir die Gleichung (4) auf der rechten Seite über die Kurve S_0, so müssen wir auf der linken über S integrieren, und das Integral $\int d\chi$ verschwindet wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit von χ. Bezeichnen wir aber mit ds und ds_0 entsprechende Linienelemente der Kurven S und S^0 und mit A_s und A_s^0 die Komponenten der Geschwindigkeit in der Richtung von ds und von ds_0 (zur Zeit t und 0), so ergibt sich aus (4):

$$(5)\qquad \int A_s\,ds = \int A_s^0\,ds_0,$$

und wenn wir den Curl der Geschwindigkeit mit $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^0$ bezeichnen, nach dem Stokesschen Satz (Bd. I, § 95, II):

$$(6)\qquad \int C_n\,df = \int C_n^0\,df_0,$$

worin sich die Integrationen auf alle Flächenelemente df und df_0 der Flächen F und F_0 beziehen, und n die Richtung der Normale an df und df_0 bedeutet.

Wenn wir in Verallgemeinerung eines im § 97 des ersten Bandes eingeführten Ausdruckes das Integral

$$(7)\qquad M = \int C_n\,df$$

das Wirbelmoment der Fläche F nennen, so können wir hiernach den wichtigen Satz aussprechen:

1. Das Wirbelmoment einer beliebigen, aus Flüssigkeitsteilchen gebildeten Fläche bleibt im Verlauf der Bewegung dieser Fläche ungeändert.

Es ist aber dabei wohl zu beachten, daß die Konstanz des Wirbelmomentes nicht am absoluten Raume, sondern an der bewegten Masse haftet.

Aus der Entstehungsweise der Integrale (6) aus den Integralen (5) folgt noch:

Das Wirbelmoment einer Fläche ist nicht von der Fläche selbst, sondern nur von deren Begrenzung abhängig.

Im § 97 des ersten Bandes haben wir als Wirbellinien solche Linien definiert, die in jedem ihrer Punkte die Richtung des Curls haben, die also durch die Differentialgleichungen

$$dx:dy:dz = C_x:C_y:C_z$$

bestimmt sind. Wenn also die Fläche F_0 aus Wirbellinien gebildet ist, so ist in jedem ihrer Punkte $C_n^0 = 0$. Die Gleichung (6) zeigt dann, daß im Verlauf der Bewegung auch $C_n = 0$ sein muß; wendet man dies auf einen unendlich schmalen Streifen längs einer Wirbellinie an, so folgt:

2. Die Flüssigkeitsteilchen, die im Anfange auf einer Wirbellinie liegen, bleiben im Verlauf der Bewegung auf einer Wirbellinie.

Legen wir durch alle Punkte einer geschlossenen Kurve S_0 die Wirbellinien, so erhalten wir eine röhrenartige Fläche, die wir einen Wirbelkanal nennen. Jede durch das Innere des Kanals laufende, durch eine Kurve auf der Kanalfläche begrenzte Fläche heißt ein Querschnitt des Kanals. Das Moment dieser Fläche wird durch (7) bestimmt.

Da die Divergenz eines Curls verschwindet, so ergibt sich aus dem Gaußschen Integralsatz (Bd. I, § 95), daß das Wirbelmoment einer geschlossenen Fläche verschwindet.

Wendet man dies auf die geschlossene Fläche an, die von zwei Querschnitten und dem zwischen ihnen liegenden Stück der Kanalfläche gebildet ist, so folgt, daß das Wirbelmoment aller Querschnitte dasselbe ist, und dies wird das Wirbelmoment des Kanals genannt. Es folgt dann aus 1. und 2. der Satz:

3. Die Flüssigkeitsmasse, die am Anfang einen Wirbelkanal erfüllt, bildet auch im Verlauf der Bewegung einen Wirbelkanal, dessen Moment mit der Zeit unveränderlich ist.

Von besonderem Interesse ist der Fall, daß der Curl der Geschwindigkeit gleich Null ist. Wenn dies am Anfang der Fall ist, so bleibt diese Eigenschaft nach 1. während der ganzen Dauer der Bewegung erhalten. Dann ist also die Deformation, die die Flüssigkeitsmasse in jedem Zeitelement erhält, rotationslos oder wirbelfrei (Bd. I, § 92).

Der Vektor $\mathfrak{A}$ ist in diesem Falle ein Potentialvektor, d. h. es gibt eine Funktion φ der Koordinaten x, y, z und der Zeit, so daß

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

ist. Diese Funktion φ heißt nach Helmholtz das Geschwindigkeitspotential[1]).

Im allgemeinen wird das Geschwindigkeitspotential φ noch von der Zeit abhängen. Ist es unabhängig von der Zeit, so ist der Zustand stationär.

Die Stromlinien sind die orthogonalen Trajektorien der Flächen $\varphi =$ const. Man erhält sie durch Integration des Systems

$$dx : dy : dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Im stationären Zustande sind diese Stromlinien mit der Zeit unveränderlich. Im nicht stationären Zustande beziehen sie sich auf einen bestimmten Augenblick.

§ 167.

Wirbelfreie Bewegung.

Wenn wir die Existenz eines Geschwindigkeitspotentials φ und zugleich ein Kräftepotential V voraussetzen, und demnach

$$(1) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$(2) \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

setzen, so folgt:

[1]) Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen (Crelles Journal 57).

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right],$$
$$X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(V - \int\frac{dp}{\varrho}\right),$$

und die Eulerschen Differentialgleichungen § 164 (2) zeigen, daß

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) - V + \int\frac{dp}{\varrho} = C$$

von x, y, z unabhängig, also konstant oder nur eine Funktion der Zeit ist. Es ergibt sich also:

$$(4) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V - \int\frac{dp}{\varrho} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + C$$

oder nach (2):

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V - \int\frac{dp}{\varrho} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + C.$$

Hierzu kommt noch die Differentialgleichung § 164 (4):

$$(6) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial\, \varrho \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial\, \varrho \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial\, \varrho \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}{\partial z} = 0,$$

und (5) und (6) sind jetzt die beiden allgemeinen Differentialgleichungen für die Funktionen φ und p (oder ϱ). Als Grenzbedingung ergibt sich für eine ruhende oder in gegebener Bewegung begriffene Wand aus § 164 (9) die Gleichung

$$7) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = N,$$

wenn N die Komponente der gegebenen Geschwindigkeit eines Wandpunktes in der Richtung der Normalen n an diese Wand bedeutet.

An einer freien Oberfläche der Flüssigkeit, an der wir den Druck konstant annehmen, müssen die beiden Grenzbedingungen

$$(8) \qquad p = \text{const.}, \qquad \frac{dp}{dt} = 0$$

bestehen, von denen die zweite sich auch so darstellen läßt:

$$(9) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Sie besagt, daß die Flüssigkeitsteilchen, die an der Oberfläche liegen, auch im weiteren Verlaufe der Bewegung an der Oberfläche bleiben.

§ 168.

Wasserwirbel.

Wir wollen ein einfaches Beispiel für die stationäre Bewegung betrachten. Wir nehmen als wirkende Kraft die Schwerkraft an, die die Richtung der positiven z-Achse haben mag, so daß $V = gz$ ist, wenn g die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Setzen wir die Dichtigkeit ϱ konstant, $= 1$, so wird die Differentialgleichung § 167 (6)

$$\varDelta \varphi = 0,$$

oder wenn wir auf Zylinderkoordinaten r, ϑ, z transformieren [Bd. I, § 44 (4)]:

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial r \dfrac{\partial \varphi}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

und aus der Gleichung § 167 (5) erhalten wir, weil beim stationären Zustand $\partial \varphi / \partial t = 0$ ist:

$$p = gz - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} + C, \tag{2}$$

worin C eine Konstante ist.

Nehmen wir an, daß die Flüssigkeit um die z-Achse rotiere, so daß jedes Teilchen einen horizontalen Kreis mit konstanter Geschwindigkeit durchläuft, so muß φ eine Funktion von ϑ allein sein, und wir können setzen:

$$\varphi = k\vartheta, \tag{3}$$

worin k eine Konstante ist. Die Geschwindigkeit, mit der sich ein Teilchen im Kreise bewegt, ist $\partial \varphi / r \partial \vartheta$ oder k/r, und folglich ist die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{k}{r^2}, \tag{4}$$

und für die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w erhält man:

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{ky}{r^2} \\
v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = +\frac{kx}{r^2} \\
w &= 0.
\end{aligned}
$$

Es befindet sich also bei dieser Annahme die Flüssigkeit für unendlich große Werte von r in Ruhe.

Die Gleichung (1) ist durch diese Annahme erfüllt, und (2) gibt

$$
(6) \qquad p = gz - \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2} + C.
$$

Die Gleichung der Oberfläche erhalten wir hieraus, wenn wir p gleich einer Konstanten setzen, und wenn wir den Anfangspunkt der Koordinaten passend legen, können wir also die Gleichung der Oberfläche in die Form setzen:

$$
(7) \qquad z = \frac{k^2}{2gr^2}.
$$

Es ist eine Rotationsfläche, deren erzeugende Kurve von der dritten Ordnung ist, und die Linie $z = 0$ und $r = 0$ zu Asymptoten hat.

Die Gestalt der Oberfläche ist also trichterförmig und geht an der z-Achse in unendliche Tiefe. Dies erklärt sich daraus, daß die Winkelgeschwindigkeit nach (4) in der Achse selbst unendlich groß wird.

Man kann auch eine Bewegung angeben, bei der die Geschwindigkeit in der Achse nicht unendlich wird. Man muß aber dann in einem Teil der Flüssigkeitsmasse auf ein Geschwindigkeitspotential verzichten.

Wenn nämlich ω_0 und C Konstanten bedeuten, so genügt die Annahme

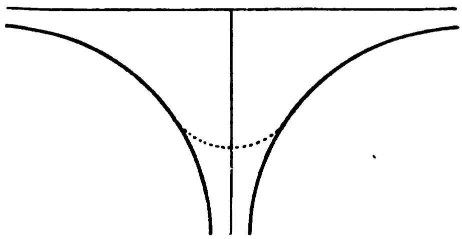
$$
u = -\omega_0 y, \qquad v = \omega_0 x, \qquad w = 0,
$$

$$
p = gz + \frac{\omega_0^2}{2} r^2 + C,
$$

den Differentialgleichungen § 164 (2), (6). Die Flüssigkeit dreht sich dann mit konstanter Winkelgeschwindigkeit wie ein starrer Körper, und die Flächen $p = \text{const.}$, also auch die freie Oberfläche, sind Rotationsparaboloide, die ihre Höhlung nach oben kehren.

Man kann diese beiden Bewegungen in folgender Weise miteinander kombinieren (Fig. 54): Man nehme eine beliebige kon-

Fig. 54.



stante Länge c an, und setze

$$
(8)\qquad \begin{aligned} &u = -\omega_0 y, \qquad v = \omega_0 x, \qquad w = 0 \\ &p = gz + \frac{\omega_0^2}{2} r^2 + C_1 \end{aligned} \qquad \text{für } r < c
$$

$$
(9)\qquad \begin{aligned} &u = -\frac{ky}{r^2}, \qquad v = \frac{kx}{r^2}, \qquad w = 0, \\ &p = gz - \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2} + C_2, \end{aligned} \qquad \text{für } r > c
$$

und damit die Geschwindigkeiten stetige Funktionen des Ortes seien, muß man

$$
(10)\qquad \omega_0 = \frac{k}{c^2}
$$

setzen. Wenn wir C_2 gleich dem gegebenen Druck an der Oberfläche setzen, so wird die Gleichung der Oberfläche

$$
(11)\qquad z = \frac{1}{2g}\frac{k^2}{r^2}, \qquad \text{für } r > c,
$$

und die Oberfläche hat die Ebene $z = 0$ zur Asymptotenebene. Für $r < c$ wird die Gleichung der Oberfläche nach (8) und (10)

$$
gz + \frac{k^2}{2c^4} r^2 + C_1 - C_2 = 0,
$$

und diese schließt sich bei $r = c$ stetig an die Oberfläche (11) an, wenn

$$
C_2 - C_1 = \frac{k^2}{c^2}
$$

gesetzt wird. Dann wird für $r < c$ die Gleichung der Oberfläche

$$
(12)\qquad z = \frac{k^2}{2gc^4}(2c^2 - r^2),
$$

und dann haben beide Oberflächen für $r = c$ auch dieselbe Tangentialebene. Auch der Druck p erhält für $r = c$ nach (9) und (10) denselben Wert

$$p = gz - \frac{k^2}{2c^2} + C_2.$$

Für $r > c$ ist diese Bewegung wirbelfrei. Es existiert ein, allerdings mehrwertiges, Geschwindigkeitspotential $\varphi = k\vartheta$. Für $r < c$ existiert aber kein Geschwindigkeitspotential. Im Innern dieses Zylinders findet eine wirbelnde Bewegung statt. Die Tiefe des Trichters ist hier endlich, nämlich [nach (12)] gleich k^2/gc^2, oder, wenn wir die Rotationsgeschwindigkeit ω_0 einführen, gleich $\omega_0^2 c^2/g$. Dieser theoretisch mögliche Fall dürfte ein ziemlich gutes Bild von dem wahren Bewegungsvorgange bei Wasserwirbeln geben, wenigstens solange man von dem Einflusse der Reibung absehen kann[1]).

---

[1]) Lamb, Hydrodynamics, p. 29. Cambridge 1895.

Zwanzigster Abschnitt.

Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. Hydrodynamischer Teil.

§ 169.

Grenzbedingungen für die Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß sich ein starrer Körper von beliebiger Gestalt in einer allseitig unendlich ausgedehnten inkompressiblen Flüssigkeit bewegt. Wir setzen dabei voraus, daß die Bewegung der Flüssigkeit wirbelfrei sei, daß also überall ein Geschwindigkeitspotential φ existiere. Dies trifft nach § 166 unter der Annahme von Potentialkräften immer zu, wenn es in einem Augenblick der Fall war, also z. B., wenn die Bewegung von der Ruhelage aus durch die Einwirkung von Potentialkräften entstanden ist.

Endlich nehmen wir noch an, daß die Flüssigkeit im Unendlichen in Ruhe sei.

Nach § 167 hat hier die Funktion φ in dem ganzen Raume außerhalb des gegebenen Körpers die Bedingung zu befriedigen:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{1}$$

An der Oberfläche des eingetauchten Körpers besteht dann noch weiter die Bedingung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = N, \tag{2}$$

wenn n die Richtung der Normalen an einer Stelle der Oberfläche — wir wollen annehmen, in der Richtung vom Körper in die Flüssigkeit hinein positiv gerechnet — bedeutet, und N die als gegeben zu betrachtende Komponente der Geschwindigkeit der Oberfläche nach der Richtung n.

Soll im Unendlichen Ruhe sein, so muß der Gradient von φ im Unendlichen gleich Null, φ selbst also konstant sein. Wir wollen annehmen, daß die Abnahme der Geschwindigkeit so stark sei, daß das über eine allseitig ins Unendliche hinausrückende Oberfläche Ω genommene Integral

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\Omega \tag{3}$$

und zugleich jeder beliebige Teil dieses Integrals verschwindend klein werde, mit anderen Worten, daß die Gesamtmenge der in der Zeiteinheit durch irgend ein im Unendlichen gelegenes Flächenstück hindurchtretenden Flüssigkeit unendlich klein sei.

Nimmt man für Ω eine Kugel mit dem veränderlichen Radius R, so kann diese Forderung auch durch die Formel:

$$\lim_{R=\infty} R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} = 0 \tag{4}$$

ausgedrückt werden.

Wegen der Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$ können wir φ als Newtonsches Potential von Massen ansehen, die im Innern oder auf der Oberfläche des eingetauchten Körpers gelagert sind. Die Bedingung (4) besagt dann, daß die Gesamtheit der Massen, die dieses Potential erzeugen, gleich Null sein muß, und man kann ihr also auch die Form geben:

$$\lim_{R=\infty} R\varphi = 0. \tag{5}$$

Weitere Bedingungen sind dann nicht zu berücksichtigen, wenn wir keine freie Oberfläche der Flüssigkeit annehmen.

Dieselben Gleichungen gelten auch für den Fall, daß mehrere starre oder in ihrer Gestalt in gegebener Weise veränderliche Körper in die Flüssigkeit eintauchen. Wir beschränken uns aber auf den Fall eines einzigen starren Körpers, und drücken zunächst die Bedingungen (2) durch die gegebene Bewegung des Körpers aus.

Wir sehen fürs erste von dem zeitlichen Verlaufe ab, betrachten also den Zustand in einem bestimmten Augenblick; mit anderen Worten, wir betrachten die Zeit t als einen Parameter, nach dem nicht differentiiert wird.

Wir nehmen ein Koordinatensystem x, y, z, dessen Anfangspunkt in dem bewegten Körper liegen mag und nehmen den Bewegungszustand des Körpers dadurch als gegeben an, daß die Geschwindigkeitskomponenten

$$U, \quad V, \quad W$$

des Anfangspunktes nach den Richtungen der Achsen x, y, z und die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeiten

$$P, \quad Q, \quad R$$

in bezug auf dieselben Achsen gegeben seien.

Wenn nun x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes π des Körpers bedeuten, so können wir die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w dieses Punktes nach Bd. I, § 88 bestimmen. Es ist nämlich in den dortigen Formeln (2), die sich auf die relative Verschiebung des Punktes π gegen den Koordinatenanfangspunkt beziehen,

$$\begin{aligned} x' - x &= (u - U)\,dt, & p &= P\,dt \\ y' - y &= (v - V)\,dt, & q &= Q\,dt \\ z' - z &= (w - W)\,dt, & r &= R\,dt \end{aligned}$$

zu setzen, und so ergibt sich:

$$\begin{aligned} u &= U - Ry + Qz, \\ v &= V - Pz + Rx, \\ w &= W - Qx + Py. \end{aligned} \tag{6}$$

Hierin sind U, V, W, P, Q, R (für einen gegebenen Augenblick) als gegebene Konstanten zu betrachten.

Wenden wir die Formeln (6) auf einen Punkt der Oberfläche an, so ergibt sich für die Normalkomponente der Geschwindigkeit:

$$N = u\cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz),$$

also:

$$\begin{aligned} N = {} & U\cos(nx) + V\cos(ny) + W\cos(nz) \\ & + P[y\cos(nz) - z\cos(ny)] \\ & + Q[z\cos(nx) - x\cos(nz)] \\ & + R[x\cos(ny) - y\cos(nx)]. \end{aligned} \tag{7}$$

Wir bemerken noch die Formel:

$$\int N\,do = 0, \tag{8}$$

wenn *do* ein Element der Körperoberfläche bedeutet und das Integral über die ganze Oberfläche des Körpers ausgedehnt wird. Man kann diese Formel leicht analytisch (aus dem Satze von

Gauß) ableiten. Sie ergibt sich aber auch aus der Bedeutung des Integrals. Denn das Integral (8) gibt, mit dem Zeitelement dt multipliziert, das durch die Bewegung des Körpers in der Zeit dt neu bedeckte Volumen, vermindert um das frei gewordene Volumen; und da das Gesamtvolumen des Körpers ungeändert geblieben ist, so muß die Summe gleich Null sein.

Die Gleichung (8) ist eine notwendige Voraussetzung dafür, daß die Gleichung (1) unter den Bedingungen (2), (3) eine Lösung hat [Bd. I, § 102 (1)].

Ändert der Körper bei seiner Bewegung das Volumen, so ist die Bedingung (8) nicht mehr befriedigt. Dann ist aber auch die Bedingung (3) nicht mehr erfüllbar, weil dann durch jede den Körper umschließende Fläche ein der Volumenänderung des Körpers gleiches Flüssigkeitsvolumen aus- oder eintreten muß.

§ 170.

Eindeutigkeit der Lösung.

Um die Frage zu beantworten, inwieweit durch die Bedingungen des vorigen Paragraphen das Geschwindigkeitspotential φ bestimmt ist, verfahren wir ähnlich wie bei dem nahe verwandten Problem der stationären elektrischen Ströme im § 174 des ersten Bandes. Wir bilden einen Ausdruck für die kinetische Energie der Flüssigkeit, der uns auch später noch nützlich sein wird, und der nur dann verschwinden kann, wenn die Flüssigkeit überall in Ruhe ist.

Es ist nämlich identisch:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$$
$$= \operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \varphi) - \varphi \Delta \varphi,$$

und da $\Delta \varphi = 0$ ist, nach dem Gaußschen Satze, wenn die Normale n aus dem Körper in die Flüssigkeit hinein positiv gerechnet wird:

$$(1) \qquad \int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} d\tau = - \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, do,$$

und darin ist, wenn τ das ganze unendliche Feld außerhalb des Körpers bedeutet, wegen der Bedingung § 169 (3) das Integral in bezug auf do nur über die Oberfläche des Körpers auszudehnen.

Nehmen wir der Einfachheit halber die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich 1 an, so ist

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau$$

die kinetische Energie der in dem Volumenelemente $d\tau$ enthaltenen Masse, und wenn wir daher mit T_1 die lebendige Kraft der gesamten Flüssigkeitsmasse bezeichnen, so ist nach (1) und nach § 169 (2):

$$(2) \qquad 2\,T_1 = -\int \varphi\, N\, do.$$

Hieraus folgt, daß, wenn $N = 0$ ist, auch $T_1 = 0$, also $\varphi =$ const. sein muß und daß folglich die Geschwindigkeit überall gleich Null ist. Es kann also auch für ein und dasselbe N nicht zwei verschiedene Geschwindigkeitszustände geben. Denn sind φ und φ' zwei zu demselben N gehörige Funktionen φ, so gehört ihre Differenz $\varphi - \varphi'$ zu $N = 0$ und diese Differenz ist also eine Konstante.

Vorausgesetzt ist hierbei aber, daß nicht nur die Geschwindigkeit, also der Gradient von φ, sondern auch die Funktion φ selbst stetig sei. Die Stetigkeit von φ folgt aber nur dann aus der Stetigkeit des Geschwindigkeitsvektors, wenn das Feld τ einfach zusammenhängend ist, und es gilt also der Satz:

> Daß in einem einfach zusammenhängenden Felde, dessen Wände in Ruhe sind, eine inkompressible Flüssigkeit, die im Unendlichen in Ruhe ist, keine wirbelfreie stetige Bewegung haben kann.

Dieser Satz gilt nicht mehr für mehrfach zusammenhängende Felder, in denen mehrwertige Geschwindigkeitspotentiale existieren können.

§ 171.

Mehrfach zusammenhängende Felder.

Ist der mit Flüssigkeit gefüllte Raum mehrfach zusammenhängend, so können wir gewisse berandete Flächen annehmen, an denen das Potential eine über die ganze Fläche konstante sprungweise Wertänderung erleidet (Bd. I, § 99). Die Randlinien dieser Querschnittsflächen liegen auf den begrenzenden Wänden. Der Einfachheit halber nehmen wir nur eine solche Fläche σ an, deren Randkurve mit λ bezeichnet sei. Man denke etwa an einen in der sonst unbegrenzten Flüssigkeit eingetauchten Ring, und eine durch den inneren Äquatorialkreis dieses Ringes begrenzte Fläche.

Wir haben in § 105, 106 des ersten Bandes Potentiale von Doppelschichten betrachtet, die solche Unstetigkeiten aufweisen.

Ist r die Entfernung eines veränderlichen Punktes q mit den Koordinaten x, y, z von dem Element $d\sigma$ der Fläche σ, also, wenn mit a, b, c die Koordinaten von $d\sigma$ bezeichnet werden:

$$(1) \qquad r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

und wird, wenn ν die Normale an $d\sigma$ in einer beliebig gewählten, aber dann festgehaltenen Richtung positiv gerechnet, bedeutet:

$$(2) \qquad \Phi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma$$

gesetzt, so ist an der Fläche σ

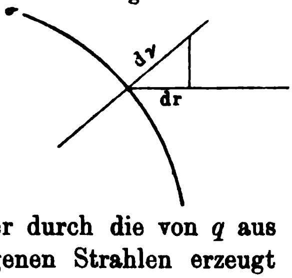
$$(3) \qquad \Phi^+ - \Phi^- = 1 \quad \text{[Bd. I, § 105 (7)]}.$$

Außerdem ist im ganzen Raume $\Delta\Phi = 0$.

Die Funktion Φ hat eine einfache Bedeutung: Wir betrachten den ganzen unendlichen Raum, in dem die Fläche σ mit der Randlinie λ als Schnitt betrachtet werden soll, über den der Punkt q in seiner Bewegung nicht hinausgehen darf. Nehmen wir die Richtung von r positiv von dem Element $d\sigma$ nach dem Punkte q hin, so ist, da, wenn der Winkel (r, ν) spitz ist, dr bei positivem $d\nu$ negativ ist (Fig. 55):

$$\frac{\partial r}{\partial \nu} = -\cos(r, \nu)$$

Fig. 55.



und folglich

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu}\, d\sigma = \frac{\cos(r,\nu)\, d\sigma}{r^2}.$$

Wir nennen den Kegelraum, der durch die von q aus nach den Punkten einer Fläche σ gezogenen Strahlen erzeugt wird, den Sehkegel dieser Fläche σ (für den Punkt q), und das Flächenstück, das dieser Kegel aus einer um q beschriebenen Kugelfläche ausschneidet, gemessen durch die ganze Kugelfläche als Einheit, die scheinbare Größe der Fläche σ, von dem Punkte q aus gesehen. Dann ist

$$\frac{\cos(r, \nu)\, d\sigma}{4\pi r^2} = d\omega \tag{4}$$

die scheinbare Größe des Flächenelementes $d\sigma$, wenn der Punkt q auf der Seite der positiven Normale liegt; im entgegengesetzten Falle ist $-d\omega$ die scheinbare Größe.

Es ist daher

$$\Phi = \int d\omega \tag{5}$$

die scheinbare Größe der Fläche σ, wenn wir annehmen, daß keine Tangentialebene an irgend einem Punkte der Fläche σ durch den Punkt q gehe, oder mit anderen Worten, wenn sich die positive Normalenrichtung ν an der ganzen Fläche σ so festsetzen läßt, daß der Punkt q überall auf der Seite der positiven ν liegt. Um der Funktion Φ auch in anderen Fällen dieselbe Bedeutung zu geben, zerlegen wir die Fläche σ in Teile, deren jeder für sich die hier gemachte Annahme erfüllt. (Wenn wir annehmen, daß die Tangentialebene ihre Richtung überall stetig ändert, werden diese Teile voneinander geschieden durch solche Kurven, längs deren die Tangentialebenen an σ durch den Punkt q gehen.) Wir nehmen dann in der ganzen Fläche σ eine sich stetig ändernde positive Normalenrichtung an, und setzen die scheinbare Größe der ganzen Fläche aus den scheinbaren Größen ihrer Teile zusammen, wobei dann immer daran festgehalten wird, daß ein solcher Teil positiv oder negativ zu rechnen ist, je nachdem q auf der Seite der positiven oder der Seite der negativen ν gelegen ist [1]). Dann können wir allgemein sagen:

Die Funktion Φ ist die scheinbare Größe der Fläche σ.

Diese Bedeutung der Funktion Φ veranschaulicht sehr deutlich die Relation (3). Denn ziehen wir von einem Punkte der Fläche σ die Strahlen nach der Grenze λ, so erhalten wir auf der Kugelfläche eine geschlossene Linie, von der wir annehmen wollen, daß sie sich nirgends selbst durchschneidet. Die scheinbare

---

[1]) Diese Bestimmung würde bei den sogenannten Flächen mit nur einer Seite versagen. Solche Fälle schließen wir hier aus.

Größe von σ ist der eine oder der andere der beiden Teile, in die die Kugelfläche von dieser Linie zerlegt wird, je nachdem wir das Zentrum auf der positiven oder der negativen Seite von σ nehmen. Beide ergänzen sich also zu 1, und wir haben also mit Rücksicht auf die Vorzeichenbestimmung die Relation (3).

Ändert man die Fläche σ, ohne ihre Begrenzung λ zu ändern, so bleibt die Funktion Φ ungeändert, solange die Änderung von σ nicht so weit getrieben wird, daß der Punkt q auf ihre andere Seite tritt.

Nehmen wir z. B. σ als die Fläche eines Kreises und also λ als Kreisperipherie an, so wird die Funktion Φ als Flächeninhalt einer sphärischen Ellipse dargestellt, und durch ein elliptisches Integral ausgedrückt, dessen Modul von der Lage des Punktes q abhängt. Die Äquipotentialflächen $\Phi = \text{const.}$ gehen alle durch den Kreis λ. Die Kreisfläche selbst und der Teil der Ebene außerhalb λ gehören selbst zu diesen Flächen, es entsprechen ihnen aber zwei um $1/2$ verschiedene Werte von Φ. Die Schar der Flächen $\Phi = \text{const.}$ hat einige Ähnlichkeit mit einem Kugelbüschel, dessen Schnittlinie die Kurve λ ist.

Die orthogonalen Trajektorien dieser Flächenschar sind die Stromlinien. Sie verlaufen in den Meridianlinien und liegen auf ringförmigen Rotationsflächen, in deren Innern die Linie λ verläuft. Denkt man sich einen solchen Ring als feste Wand, so erhält man eine mögliche wirbelfreie Bewegung in einem zweifach zusammenhängenden Felde. Der Querschnitt eines solchen Ringes ist aber kein genauer Kreis.

In der Linie λ selbst werden die Ableitungen von Φ, also die Geschwindigkeiten, unendlich groß, und darum ist eine solche Flüssigkeitsbewegung ohne eine feste Wand, die die Linie λ umschließt, physisch nicht möglich.

Ist nun irgend ein ringförmiger Körper K in die Flüssigkeit eingetaucht, so ist die Bewegung der Flüssigkeit, in dem zweifach zusammenhängenden Felde, auch bei Voraussetzung wirbelfreier Bewegung nicht mehr durch die Bewegung des Körpers allein bestimmt; es kann für das Geschwindigkeitspotential φ noch eine sprungweise Änderung A an der Sperrfläche σ vorgeschrieben sein:

$$\varphi^+ - \varphi^- = A. \tag{6}$$

Wenn dann außerdem noch

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = N \tag{7}$$

an der Oberfläche von K gegeben ist, so ist dadurch die Funktion φ eindeutig bestimmt, was man wie in § 170 beweist.

Um die Aufgabe auf eine einfachere zurückzuführen, setzt man

$$\varphi = A\Phi + \psi, \tag{8}$$

und erhält für die Funktion ψ die Differentialgleichung

$$\Delta\psi = 0. \tag{9}$$

Nach (6) und (3) muß aber ψ an der Fläche σ stetig sein, und aus (7) ergibt sich:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = N - A\frac{\partial\Phi}{\partial n}. \tag{10}$$

Die Aufgabe ist also auf die Auffindung eines stetigen Potentials zurückgeführt, dessen nach der Normale genommene Ableitung an der Oberfläche gegeben ist.

§ 172.

Einwertige Geschwindigkeitspotentiale.

Wir berücksichtigen jetzt nur noch den Fall der einwertigen Geschwindigkeitspotentiale, und nehmen einen in die Flüssigkeit eingetauchten starren Körper an, der in irgend einer Bewegung begriffen ist. Die Aufgabe gestattet dann eine weitere Vereinfachung. Hier hat nämlich nach § 169 (7) die Normalkomponente N den Ausdruck:

$$\begin{aligned} N = {} & U\cos(nx) + V\cos(ny) + W\cos(nz) \\ & + P[y\cos(nz) - z\cos(ny)] + Q[z\cos(nx) - x\cos(nz)] \\ & + R[x\cos(ny) - y\cos(nx)], \end{aligned} \tag{1}$$

und wir setzen demnach

$$\varphi = U\varphi_1 + V\varphi_2 + W\varphi_3 + P\varphi_4 + Q\varphi_5 + R\varphi_6 \tag{2}$$

und nehmen an, daß die Funktionen φ_1, φ_2, …, φ_6 einzeln der Differentialgleichung

$$\Delta\varphi_k = 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

und der Bedingung im Unendlichen [§ 169 (5)] genügen. Aus (1) ergeben sich die Grenzbedingungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \cos(nx), & \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} &= y\cos(nz) - z\cos(ny),\\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= \cos(ny), & \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} &= z\cos(nx) - x\cos(nz),\\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} &= \cos(nz), & \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} &= x\cos(ny) - y\cos(nx), \end{aligned}$$

und wenn die Funktionen φ_k diesen Bedingungen gemäß bestimmt sind, so genügt φ allen Forderungen, die an diese Funktion gestellt sind.

Die Funktionen φ_k sind spezielle Fälle der allgemeinen Funktion φ. Die Funktionen φ_k enthalten aber nichts mehr, was von dem besonderen Bewegungszustande des Körpers, d. h. von U, V, W, P, Q, R abhängt.

Sie sind durch die geometrische Natur der Begrenzung des Körpers allein vollständig bestimmt.

Es läßt sich auch leicht die Abhängigkeit dieser Funktionen von der Lage des Koordinatensystems näher angeben. Führen wir nämlich an Stelle des Koordinatensystems x, y, z ein anderes gleichfalls rechtwinkeliges x', y', z' ein, indem wir

$$(4)\qquad \begin{aligned} x' &= a + a_1 x + a_2 y + a_3 z,\\ y' &= b + b_1 x + b_2 y + b_3 z,\\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned}$$

setzen, worin die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, c_3$ den bekannten Relationen für die rechtwinkelige Koordinatentransformation genügen, und a, b, c die Koordinaten des alten Anfangspunktes im neuen System bedeuten, so ergibt sich, wenn die auf das neue System bezogenen Funktionen φ_k mit φ'_k bezeichnet werden:

$$\frac{\partial \varphi'_1}{\partial n} = \cos(n, x') = a_1\cos(nx) + a_2\cos(ny) + a_3\cos(nz),$$

und mit Benutzung der bekannten Formeln $a_1 = b_2 c_3 - b_3 c_2$ usw.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'_4}{\partial n} &= y'\cos(nz') - z'\cos(ny')\\ &= b\cos(nz') - c\cos(ny') + a_1[y\cos(nz) - z\cos(ny)]\\ &\quad + a_2[z\cos(nx) - x\cos(nz)] + a_3[x\cos(ny) - y\cos(nx)] \end{aligned}$$

und entsprechend die übrigen Formeln. Diesen Bedingungen aber genügen folgende Funktionen:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
\varphi_1' &= a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3,\\
\varphi_2' &= b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + b_3\varphi_3,\\
\varphi_3' &= c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3;
\end{aligned}
$$

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
\varphi_4' &= b\varphi_3' - c\varphi_2' + a_1\varphi_4 + a_2\varphi_5 + a_3\varphi_6,\\
\varphi_5' &= c\varphi_1' - a\varphi_3' + b_1\varphi_4 + b_2\varphi_5 + b_3\varphi_6,\\
\varphi_6' &= a\varphi_2' - b\varphi_1' + c_1\varphi_4 + c_2\varphi_5 + c_3\varphi_6.
\end{aligned}
$$

Wenn die drei Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 bestimmt sind, so ist damit zugleich noch ein anderes Bewegungsproblem gelöst. Es ist nämlich, wenn wir x, y, z als Funktionen von n betrachten:

$$
\cos(nx) = \frac{\partial x}{\partial n},\quad \cos(ny) = \frac{\partial y}{\partial n},\quad \cos(nz) = \frac{\partial z}{\partial n},
$$

und es ist also, wenn α, β, γ Konstanten sind, und wenn wir

$$
(7)\qquad \varphi = \alpha(x - \varphi_1) + \beta(y - \varphi_2) + \gamma(z - \varphi_3)
$$

setzen, überall in der Flüssigkeit $\Delta\varphi = 0$, an der Oberfläche des Körpers $\partial\varphi/\partial n = 0$, im Unendlichen ist aber die Geschwindigkeit nicht mehr Null, sondern ihre Komponenten haben die konstanten Werte α, β, γ. Es ist also damit das Problem gelöst, die Bewegung des Wassers zu bestimmen, wenn ein starrer Körper in einen unendlichen Strom getaucht und festgehalten wird. Dies Problem ist mathematisch mit dem elektrischen Problem identisch, daß ein nichtleitender Körper in einem konstanten elektrischen Stromfelde liegt (Bd. I, § 194).

§ 173.

Kugel in der Flüssigkeit.

Die Bestimmung der Funktionen φ_k läßt sich in einigen Fällen durchführen. Wir nehmen zunächst den festen Körper als Kugel an[1]).

Bezeichnen wir mit r den Abstand eines variablen Punktes q mit den Koordinaten x, y, z vom Kugelmittelpunkt, so daß

$$
r^2 = x^2 + y^2 + z^2
$$

---

[1]) Dies ist der von Stokes und Dirichlet behandelte Fall der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit: Stokes, „On some cases of Fluid Motion" 1843, Mathematical and Physical Papers, vol. I, p. 17; Dirichlet, „Über die Bewegung eines festen Körpers in einem inkompressiblen flüssigen Medium". Ber. d. Berl. Akademie 1852. Dirichlets Werke 2, 115.

ist, so fällt die Richtung von n mit der Richtung von r zusammen, und es ist

$$\cos(nx) = \frac{x}{r}, \quad \cos(ny) = \frac{y}{r}, \quad \cos(nz) = \frac{z}{r}.$$

Es ist also

$$y\cos(nz) - z\cos(ny) = 0,$$

und daraus folgt, nach § 172 (3), daß φ_4, und ebenso φ_5, φ_6 Konstanten sind, die gleich Null gesetzt werden können.

Zur Bestimmung von φ_1 haben wir, wenn c den Kugelradius bedeutet, und der Winkel (rx) mit ϑ bezeichnet wird, die Bedingungen:

$$\Delta\varphi_1 = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \cos\vartheta, \qquad \text{für } r = c. \tag{2}$$

Es ist aber bekanntlich

$$\Delta\frac{1}{r} = 0,$$

also auch

$$\frac{\partial\Delta\frac{1}{r}}{\partial x} = \Delta\frac{-x}{r^3} = 0,$$

und wenn wir daher

$$\varphi_1 = \frac{-c^3x}{2r^3} = \frac{-c^3\cos\vartheta}{2r^2} \tag{3}$$

setzen, so ist die Bedingung (1) erfüllt. Wenn wir aber nach r differentiieren, indem wir ϑ konstant lassen, so ergibt sich:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \frac{c^3}{r^3}\cos\vartheta = \frac{c^3x}{r^4},$$

und es ist also auch die Bedingung (2) für $r = c$ erfüllt. Ebenso findet man die Funktionen φ_2, φ_3.

Hiernach läßt sich leicht die kinetische Energie der bewegten Flüssigkeit berechnen. Es ist nämlich:

$$-\int\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}do = \frac{1}{2c}\int x^2do = \frac{2\pi c^3}{3},$$

$$-\int\varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}do = \frac{1}{2c}\int xydo = 0 \text{ usw.},$$

und folglich ergibt sich nach § 169 für die kinetische Energie der Flüssigkeit, wenn V die Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes bedeutet:

$$T_1 = \frac{\pi c^3}{3} V^2.$$

Da wir die Dichtigkeit des Wassers gleich 1 genommen haben, so ist das Kugelvolumen $4\pi c^3/3$ zugleich die von der Kugel verdrängte Wassermasse und wir erhalten, wenn wir diese Masse mit m bezeichnen:

$$2\,T_1 = \tfrac{1}{2} m V^2,$$

oder, wenn u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes sind:

$$(4) \qquad 2\,T_1 = \tfrac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2).$$

Um die Strömung der Flüssigkeit an einer feststehenden Kugel zu bestimmen, geben wir dem Strome die Geschwindigkeit 1 in der x-Richtung, und setzen nach (3) und § 172 (7):

$$(5) \qquad \varphi = x - \varphi_1 = x\left(1 + \frac{c^3}{2 r^3}\right) = \cos\vartheta \left(r + \frac{c^3}{2 r^2}\right).$$

Die Stromlinien verlaufen in den durch die x-Achse gelegten Meridianebenen, und liegen auf gewissen Rotationsflächen. Sie werden also durch eine Relation zwischen r und ϑ ausgedrückt. Es sind die Kurven, die auf den Flächen $\varphi =$ const. senkrecht stehen, und man hat also, um sie zu finden, die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{r^2\, d\vartheta} = \frac{\varphi'(r)}{\varphi'(\vartheta)} = -\operatorname{cotg}\vartheta \, \frac{1 - \dfrac{c^3}{r^3}}{r + \dfrac{c^3}{2 r^2}}$$

oder

$$-2 \operatorname{cotg}\vartheta \, d\vartheta = \frac{2 r^3 + c^3}{r^3 - c^3} \frac{dr}{r}$$

zu integrieren, deren Integral sich leicht durch Ausführung von zwei einfachen Quadraturen bestimmen läßt. Man erhält, wenn man

$$\frac{2 r^3 + c^3}{r^3 - c^3} \frac{1}{r} = \frac{3 r^2}{r^3 - c^3} - \frac{1}{r}$$

setzt und mit k die Integrationskonstante bezeichnet:

$$(6) \qquad \frac{k r}{r^3 - c^3} = \sin^2\vartheta.$$

Für $k = 0$ ist entweder $\sin\vartheta = 0$ oder $r = c$, d. h. die diesem Werte von k entsprechende Stromlinie setzt sich zusammen aus dem Kreise $r = c$ und dem im Innern der Flüssigkeit gelegenen Teile der x-Achse. Die Konstante k kann keine negativen Werte erhalten, und je größer k wird, um so mehr nähern sich die durch (6) dargestellten Linien den zur x-Achse parallelen Geraden $r\sin\vartheta = \text{const.}$

§ 174.
Ellipsoid in einer Flüssigkeit.

In ähnlich einfacher Weise läßt sich die Bestimmung der Funktionen φ_k für ein Ellipsoid durchführen[1]).

Wir können hierbei an die Resultate von Bd. I, § 159 über magnetische Induktion in einem Ellipsoid anknüpfen, weil unser Problem mit dem dort behandelten fast identisch ist. Wir beziehen die Gleichung des Ellipsoids auf seine Hauptachsen, und nehmen sie in der Form an:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Dann ist, wenn wir zur Abkürzung

$$\varrho = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

setzen, für einen Punkt der Oberfläche:

$$\cos(nx) = \frac{x}{\varrho a^2}, \quad \cos(ny) = \frac{y}{\varrho b^2}, \quad \cos(nz) = \frac{z}{\varrho c^2}, \tag{2}$$

und die Grenzbedingungen § 172 (3) lauten also hier:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} &= \frac{x}{\varrho a^2}, & \frac{\partial\varphi_4}{\partial n} &= \frac{yz(b^2-c^2)}{\varrho b^2 c^2},\\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} &= \frac{y}{\varrho b^2}, & \frac{\partial\varphi_5}{\partial n} &= \frac{zx(c^2-a^2)}{\varrho c^2 a^2},\\
\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} &= \frac{z}{\varrho c^2}, & \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} &= \frac{xy(a^2-b^2)}{\varrho a^2 b^2}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Es sind nun, wenn x, y, z ein äußerer Punkt ist, λ die positive Wurzel der kubischen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0 \tag{4}$$

[1]) Clebsch, Crelles Journal 52.

bedeutet, die für die Punkte der Oberfläche in Null übergeht, und

$$D = \sqrt{\left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right)\left(1 + \frac{s}{c^2}\right)}$$

gesetzt ist,

$$\begin{aligned} X &= -2x \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2 + s) D}, \\ Y &= -2y \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(b^2 + s) D}, \qquad (5) \\ Z &= -2z \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(c^2 + s) D} \end{aligned}$$

die Komponenten der Anziehung des mit homogener Masse erfüllt gedachten Ellipsoides und

$$(6) \qquad X_0 = 2\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s) D}, \quad Y_0 = 2\int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s) D},$$

$$Z_0 = 2\int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s) D}$$

sind Konstanten, die nur von den Achsen a, b, c des Ellipsoides abhängen.

Nun genügt die Funktion X als Ableitung des Newtonschen Potentials für einen äußeren Punkt der Differentialgleichung $\Delta X = 0$, und an den Oberflächen der Bedingung [Bd. I, § 159 (8)]:

$$(7) \qquad \frac{\partial X}{\partial n} = \frac{x}{\varrho a^2}(4 - X_0),$$

und da sich die Funktion X außerdem im Unendlichen verhält wie die — 2te Potenz der Entfernung von einem Punkte im Endlichen, so ergibt sich nach (3):

$$(8) \qquad X = \varphi_1 (4 - X_0)$$

und ebenso:

$$(9) \qquad \begin{aligned} Y &= \varphi_2 (4 - Y_0), \\ Z &= \varphi_3 (4 - Z_0), \end{aligned}$$

wodurch die drei Funktionen φ_1, φ_2, φ_3 bestimmt sind.

Betrachten wir ferner die Funktion

$$(10) \qquad \Xi = Zy - Yz = -2\int_\lambda^\infty \frac{yz(b^2 - c^2)\,ds}{D(b^2+s)(c^2+s)},$$

so ergibt sich durch Differentiation:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \Xi}{\partial x} &= y\frac{\partial Z}{\partial x} - z\frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial \Xi}{\partial y} &= y\frac{\partial Z}{\partial y} - z\frac{\partial Y}{\partial y} + Z, \\ \frac{\partial \Xi}{\partial z} &= y\frac{\partial Z}{\partial z} - z\frac{\partial Y}{\partial z} - Y, \end{aligned}$$

und daraus durch abermalige Differentiation und Addition:

$$\Delta\Xi = y\Delta Z - z\Delta Y + 2\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$

und dies ist $= 0$, weil ΔY, ΔZ verschwinden und

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

ein vollständiges Differential ist.

Weiter folgt aber aus (11):

$$\frac{\partial \Xi}{\partial n} = y\frac{\partial Z}{\partial n} - z\frac{\partial Y}{\partial n} + Z\cos(ny) - Y\cos(nz).$$

Der letzte Ausdruck ist für die Punkte der Oberfläche zu nehmen. Dort ist aber nach (5), (6) und (7)

$$Y = -yY_0, \qquad Z = -zZ_0,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial n} = \frac{y}{\varrho b^2}(4 - Y_0), \qquad \frac{\partial Z}{\partial n} = \frac{z}{\varrho c^2}(4 - Z_0),$$

und folglich:

$$(12) \qquad \frac{\partial \Xi}{\partial n} = \frac{yz}{\varrho b^2 c^2}\{4(b^2 - c^2) + (Y_0 - Z_0)(b^2 + c^2)\}.$$

Da nun, wie aus dem Ausdrucke (10) leicht einzusehen ist, die Funktion Ξ im Unendlichen in der Weise verschwindet, wie es von den Funktionen φ verlangt war, so sind die Bedingungen befriedigt, wenn wir setzen:

$$(13) \qquad \varphi_4 = \frac{(yZ - zY)(b^2 - c^2)}{4(b^2 - c^2) + (Y_0 - Z_0)(b^2 + c^2)},$$

und daraus ergeben sich φ_5, φ_6 durch zyklische Vertauschung.

§ 175.

Ring in einer Flüssigkeit.

Wir betrachten noch den Fall, daß der in die Flüssigkeit eingetauchte Körper die Form eines Ringes hat, der durch die Rotation eines Kreises um eine seine Peripherie nicht schneidende in seiner Ebene gelegene Achse erzeugt wird[1]).

Wir führen die Koordinaten ϱ, ω, ϑ ein, die wir in § 46 des ersten Bandes betrachtet haben. Das rechtwinkelige Koordinatensystem x, y, z habe die Rotationsachse zur z-Achse und die Äquatorebene zur xy-Ebene. Wir setzen, indem wir mit b eine Konstante bezeichnen und ϑ für φ schreiben, das dort gebrauchte $\lambda = \log \varrho$ setzen, nach Bd. I, § 46 (8):

$$x = r \cos \vartheta, \qquad y = r \sin \vartheta, \tag{1}$$

$$r = \frac{b(1 - \varrho^2)}{1 + 2\varrho \cos \omega + \varrho^2}, \tag{2}$$

$$z = -\frac{2 b \varrho \sin \omega}{1 + 2\varrho \cos \omega + \varrho^2}, \tag{3}$$

und für das Quadrat des Linienelementes ds^2 erhalten wir nach Bd. I, § 46 (9) den Ausdruck:

$$ds^2 = \frac{4 r^2 (d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2)}{(1 - \varrho^2)^2} + r^2 d\vartheta^2. \tag{4}$$

Wir erhalten jeden Punkt des Raumes, und, von den Punkten der Achse abgesehen, jeden nur einmal, wenn wir die drei Variablen ϱ, ω, ϑ auf die Intervalle beschränken:

$$0 \leqq \varrho \leqq 1,$$
$$-\pi < \omega \leqq \pi,$$
$$-\pi < \vartheta \leqq \pi.$$

Einem konstanten Wert ϱ_0 von ϱ entspricht eine Ringfläche, die durch einen Kreis erzeugt wird, dessen Radius a und Mittelpunktabstand c durch die Gleichungen:

---

[1]) In seiner Vorlesung im Winter 1860/61 hat Riemann, wie auch Hattendorff angibt (Vorrede zur dritten Auflage, S. VI), dieses Problem behandelt und den Weg der Lösung angegeben. Es liegt mir darüber ein Heft von Reye vor, der diese Vorlesung gehört hat. Es bezieht sich darauf auch eine aus Riemanns Nachlaß hergestellte Note: „Über das Potential eines Ringes" (Nr. XXIV der zweiten Auflage von Riemanns Werken). Verwandten Inhalts ist die Schrift von C. Neumann: „Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe". Halle 1864.

$$(5) \qquad \frac{1-\varrho_0^2}{2\varrho_0} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{1+\varrho_0^2}{2\varrho_0} = \frac{c}{a} \quad [\text{Bd. I, § 46 (6)}]$$

bestimmt sind. Den Punkten **außerhalb** dieser Ringfläche entspricht das Intervall

$$(6) \qquad \varrho_0 < \varrho \gtreqless 1.$$

Den Werten

$$\varrho = 1, \qquad \omega = 0$$

bei beliebigen ϑ entspricht der Nullpunkt, und den Werten

$$\varrho = 1, \qquad \omega = \pm\pi$$

entsprechen die unendlich fernen Punkte.

Durch die Umformung Bd. I, § 46 (12) ist die Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ in die Gestalt gebracht:

$$(7) \quad \left(\frac{1-\varrho^2}{2\varrho}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 \sqrt{r}\,\varphi}{\partial \log \varrho^2} + \frac{\partial^2 \sqrt{r}\,\varphi}{\partial \omega^2}\right) + \frac{\partial^2 \sqrt{r}\,\varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\sqrt{r}\,\varphi}{4} = 0.$$

Von dieser Differentialgleichung lassen sich partikulare Integrale von der Form

$$(8) \qquad \sqrt{r}\,\varphi = S e^{i(m\omega + n\vartheta)}$$

finden, in denen S allein von ϱ abhängt, und wenn wir voraussetzen, daß φ eine einwertige und stetige Funktion des Ortes, also eine um 2π periodische Funktion von ω und ϑ sein soll, so müssen m und n ganze Zahlen sein.

Für S ergibt sich dann aus (7) die Differentialgleichung

$$(9) \qquad \left(\frac{1-\varrho^2}{2\varrho}\right)^2 \left(\frac{d^2 S}{d \log \varrho^2} - m^2 S\right) - \left(n^2 - \tfrac{1}{4}\right) S = 0.$$

Um die allgemeine Theorie der P-Funktion auf diese Gleichung anwenden zu können, wollen wir zunächst m und n als unbestimmte Größen ansehen. Betrachtet man ϱ^2 als Argument, so sind 0, 1, ∞ die singulären Punkte für diese Differentialgleichung und man findet, wenn man nach steigenden und fallenden Potenzen von ϱ^2 und nach steigenden Potenzen von $1-\varrho^2$ entwickelt, daß diese Entwickelungen mit den Potenzen

$$\varrho^{\pm m}, \qquad \varrho^{\pm m}, \qquad (1-\varrho^2)^{\frac{1}{2} \pm n}$$

anfangen müssen. Demnach wird die Differentialgleichung (9) durch die P-Funktion

$$(10)\qquad S = P\begin{pmatrix} \frac{m}{2}, & \frac{m}{2}, & \frac{1}{2}+n & \\ & & & \varrho^2 \\ -\frac{m}{2}, & -\frac{m}{2}, & \frac{1}{2}-n & \end{pmatrix}$$

oder durch

$$(11)\qquad S = P\begin{pmatrix} \frac{1}{2}+n, & \frac{m}{2}, & \frac{m}{2} & \\ & & & 1-\varrho^2 \\ \frac{1}{2}-n, & -\frac{m}{2}, & -\frac{m}{2} & \end{pmatrix}$$

integriert.

Wir haben aber hier den Fall des § 22, in dem zwei Exponentenpaare identisch sind, und es lassen sich also noch viele andere Formen der P-Funktionen finden, durch die diese Differentialgleichung integriert wird. So ergibt sich die Formel:

$$(12)\qquad S = P\begin{pmatrix} 0, & \frac{1+2n}{4}, & \frac{m}{2} & \\ & & & \frac{\varrho^2+1}{\varrho^2-1} \\ \frac{1}{2}, & \frac{1-2n}{4}, & -\frac{m}{2} & \end{pmatrix}$$

$$= P\begin{pmatrix} 0, & \frac{m}{2}, & \frac{1+2n}{4} & \\ & & & \frac{(\varrho^2+1)^2}{4\varrho^2} \\ \frac{1}{2}, & -\frac{m}{2}, & \frac{1-2n}{4} & \end{pmatrix}$$

und durch nochmalige Anwendung der Formel:

$$= P\begin{pmatrix} \frac{1+2n}{4}, & \frac{1+2n}{4}, & m & \\ & & & \left(\frac{\varrho-1}{\varrho+1}\right)^2 \\ \frac{1-2n}{4}, & \frac{1-2n}{4}, & -m & \end{pmatrix},$$

und hieraus lassen sich noch viele ähnliche Formeln herleiten.

§ 176.

Bestimmung der Koeffizienten.

Wir wollen der Einfachheit halber jetzt nur noch einen in bezug auf die Rotationsachse symmetrischen Zustand betrachten, weil bei dieser Annahme die Schwierigkeit, die das Problem noch bietet, bereits hinlänglich hervortritt. Dann haben wir in den Formeln des vorigen Paragraphen $n = 0$ zu setzen, und wir erhalten aus (11) [mit Rücksicht auf § 19, (4)]:

$$S = P\begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{m}{2}, & \frac{m}{2} & \\ & & & 1-\varrho^2 \\ \frac{1}{2}, & -\frac{m}{2}, & -\frac{m}{2} & \end{pmatrix}$$

$$= \varrho^m \sqrt{1-\varrho^2}\, P\begin{pmatrix} 0, & m+\frac{1}{2}, & 0 & \\ & & & 1-\varrho^2 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -m & \end{pmatrix},$$

und aus § 175 (8) ergeben sich, wenn man für $\sqrt{r}$ den Wert aus § 175 (2) einsetzt, die Integrale

(1) $$\varphi = \sqrt{1+2\varrho\cos\omega+\varrho^2}\,\varrho^m P\begin{pmatrix} 0, & m+\frac{1}{2}, & 0 & \\ & & & 1-\varrho^2 \\ 0, & \frac{1}{2}, & -m & \end{pmatrix} e^{im\omega}.$$

Die hier vorkommende P-Funktion hat nur **einen** Zweig, der für $\varrho = 1$ endlich bleibt (§ 10, § 20), nämlich die hypergeometrische Reihe

(2) $$K_m = F(m+\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 1-\varrho^2),$$

die sich nach § 13 (3) auch durch das elliptische Integral

(3) $$K_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(\cos^2\vartheta + \varrho^2\sin^2\vartheta)^{m+\frac{1}{2}}}$$

darstellen läßt.

Nehmen wir zur weiteren Vereinfachung an, daß φ eine **ungerade** Funktion von ω sei, wie es etwa eintritt, wenn ein ruhender Ring einer der z-Achse parallelen Strömung ausgesetzt wird, so ergibt sich, wenn wir mit a_m noch zu bestimmende Konstanten bezeichnen:

(4) $$\varphi = \sqrt{1+2\varrho\cos\omega+\varrho^2}\sum_{m=1}^{\infty} a_m \varrho^m K_m \sin m\omega.$$

Die Konstanten a_m sind nun aus der Bedingung zu bestimmen, daß an der Oberfläche des Ringes, also für $\varrho = \varrho_0$, der nach der Normalen genommene Differentialquotient $\partial\varphi/\partial n$ eine gegebene Funktion $F(\omega)$ von ω sein soll, die wir natürlich auch als ungerade Funktion voraussetzen müssen.

Der Bedingung § 169 (5), nach der $R\varphi$ im Unendlichen verschwinden muß, genügt jedes einzelne Glied dieser Reihe:

$$\sqrt{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}\,\varrho^m K_m \sin m\omega = \varphi_m.$$

Es ist nämlich nach (2) und (3), § 164

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} = b\,\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)^2 + 4\varrho^2\sin^2\omega}}{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}$$

$$= b\sqrt{\frac{1 - 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}}$$

und folglich

$$R\varphi_m = b\sqrt{1 - 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}\,\varrho^m K_m \sin m\omega.$$

Es ist aber im Unendlichen $\varrho = 1$, $\omega = \pi$ und da

$$\varrho^m K_m = 1 \quad \text{für} \quad \varrho = 1,$$

so ist $R\varphi_m$ im Unendlichen $= 0$.

Nach § 175 (4) ist aber, wenn $d\omega = 0$, $d\vartheta = 0$ und $ds = dn$ gesetzt werden:

$$dn = \frac{2r\,d\varrho}{1-\varrho^2},$$

und nach § 175 (2):

$$dn = \frac{2b\,d\varrho}{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}{2b}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho},$$

und für $\varrho = \varrho_0$:

$$(5) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \frac{2b\,F(\omega)}{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}.$$

Andererseits ergibt sich aus (4) durch Differentiation:

$$\sqrt{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} =$$

$$\sum a_m \sin m\omega\left((\varrho + \cos\omega)\,\varrho^m K_m + (1 + \varrho^2 + 2\varrho\cos\omega)\,\frac{d\varrho^m K^m}{d\varrho}\right),$$

oder, wenn wir die Abkürzung

$$\varrho^{m+1} K_m + (1 + \varrho^2)\,\frac{d\varrho^m K_m}{d\varrho} = P_m,$$

$$\varrho^m K_m + 2\varrho\,\frac{d\varrho^m K_m}{d\varrho} = 2\,Q_m$$

einführen:

$$(6) \qquad \sqrt{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (P_m + 2\,Q_m \cos\omega)\sin m\omega.$$

Setzen wir also für $\varrho = \varrho_0$

$$(7) \qquad \frac{2\,b\,F(\omega)}{\sqrt{1 + 2\varrho\cos\omega + \varrho^2}} = f(\omega)$$

so ist $f(\omega)$ gleichfalls eine gegebene ungerade Funktion von ω, die wir in eine Sinus-Reihe entwickelt annehmen können, also:

$$f(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin m\omega,$$

worin dann die A_m gegebene Konstanten sind. Aus (5) und (6) ergibt sich hiernach:

$$(8) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin m\omega = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (P_m + 2\,Q_m \cos\omega)\sin m\omega,$$

wenn P_m und Q_m für $\varrho = \varrho_0$ genommen sind.

Es ist aber

$$2\cos\omega\sin m\omega = \sin(m+1)\omega + \sin(m-1)\omega,$$

und demnach wird die rechte Seite von (8):

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m P_m \sin m\omega + \sum_{m=1}^{\infty} a_m Q_m \sin(m-1)\omega$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} a_m Q_m \sin(m+1)\omega,$$

oder

$$\sum (a_m P_m + a_{m+1} Q_{m+1} + a_{m-1} Q_{m-1}) \sin m\omega,$$

worin, wenn die Summe von $m = 1$ bis $m = \infty$ genommen werden soll, $a_0 = 0$ zu setzen ist. Es folgt also aus (8) das folgende System von Gleichungen:

$$(9) \qquad \begin{aligned} A_1 &= a_2 Q_2 + a_1 P_1, \\ A_2 &= a_3 Q_3 + a_2 P_2 + a_1 Q_1, \\ A_3 &= a_4 Q_4 + a_3 P_3 + a_2 Q_2, \\ A_4 &= a_5 Q_5 + a_4 P_4 + a_3 Q_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und allgemein:

$$(10) \qquad A_m = a_{m+1} Q_{m+1} + a_m P_m + a_{m-1} Q_{m-1}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man etwa $a_2, a_3, a_4, \ldots$ sukzessive berechnen, wenn a_1 bekannt ist. Zur vollständigen Bestimmung der Koeffizienten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ reichen aber die

Gleichungen (9) nicht aus. Es fehlt dazu noch eine Bedingung und diese kann in nichts anderem bestehen, als in der Forderung der Konvergenz der Reihe (4). Da nämlich die $\varrho^m K_m$ mit unendlich wachsendem m unendlich werden, so müssen die a_m in einer gewissen Weise gegen Null konvergieren, und da unsere Bedingungen zur Bestimmung der Funktion φ ausreichend sind, so kann diese Forderung nur auf eine Weise mit den Gleichungen (9) vereinbar sein.

Wenn wir die Größen x_n und y_n als spezielle Fälle der a_n in der Weise bestimmen, daß wir, um x_n zu erhalten, in (9) $a_1 = 0$ setzen, also:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= x_2 Q_2, \qquad A_2 = x_3 Q_3 + x_2 P_2, \\
A_3 &= x_4 Q_4 + x_3 P_3 + x_2 Q_2, \; \ldots,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

und um y_n zu erhalten, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, ..., $a_1 = 1$ setzen, also:

$$
\begin{aligned}
0 &= y_2 Q_2 + P_1, \\
0 &= y_3 Q_3 + y_2 P_2 + Q_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

so wird der allgemeine Ausdruck von a_n

$$a_n = x_n + a_1 y_n,$$

die x_n, y_n sind aus (11) und (12) vollständig bestimmt, und es ergibt sich, da $\operatorname{Lim} a_n = 0$ sein muß:

$$a_1 = -\lim_{n=\infty} \frac{x_n}{y_n}\text{[1]}. \tag{13}$$

---

[1]) Die Bestimmung der Koeffizienten a_n ist zuerst klargestellt von Hicks „On Toroidal Functions" Philosophical Transactions 1881, p. 644. In der Theorie der Bewegung zweier Kugeln in einer Flüssigkeit tritt dieselbe Schwierigkeit auf. Dieses Problem ist eingehend behandelt von C. Neumann (Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig 1883).

Einundzwanzigster Abschnitt.

Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Mechanischer Teil.

§ 177.

Kinetische Energie.

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir uns mit der Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials, also der Ermittelung der Bewegung der Flüssigkeit, unter der Voraussetzung beschäftigt, daß ein starrer Körper von gegebener Form in die Flüssigkeit eingetaucht und darin in einer gegebenen Bewegung begriffen ist.

Die Zerlegung des Geschwindigkeitspotentials, die wir im § 172 kennen gelernt haben, ermöglicht es aber, die andere Aufgabe, nämlich die Bestimmung der Bewegung des Körpers in der Flüssigkeit unter dem Einflusse gegebener Kräfte, unabhängig von der ersten, in Angriff zu nehmen. Das Mittel hierzu bietet uns das Hamiltonsche Prinzip, das die Bewegungsgleichungen für irgend ein System aufzustellen gestattet, wenn die Ausdrücke der potentiellen und der kinetischen Energie durch die die Lage des Systems bestimmenden Variablen (die Koordinaten des Systems) bekannt sind.

Ehe wir aber zur Formulierung des Hamiltonschen Prinzips für diesen Fall übergehen, wollen wir den Ausdruck der lebendigen Kraft des Systems einer eingehenden Diskussion unterwerfen.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß ein starrer Körper in eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit eingetaucht ist, und betrachten in der Flüssigkeit nur wirbelfreie Bewegung und eindeutige Geschwindigkeitspotentiale.

Wir wählen ein Koordinatensystem x, y, z, das wir uns in fester Verbindung mit dem Körper denken, und das durch die geometrische und mechanische Beschaffenheit des Körpers definiert ist, z. B. nehmen wir, wenn die Körperoberfläche die Symmetrieverhältnisse eines Ellipsoids hat, den Mittelpunkt zum Koordinatenanfangspunkt, die Hauptachsen zu Koordinatenachsen. In anderen Fällen können wir etwa den Schwerpunkt zum Anfangspunkt und die Hauptträgheitsachsen zu Koordinatenachsen wählen.

Es mögen u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit des Anfangspunktes, p, q, r die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit des Körpers für die Achsen x, y, z bedeuten.

Sind x, y, z die Koordinaten eines Massenelements dm des Körpers, so sind nach Bd. I, § 88 (2)

$$(-ry + qz)\,dt, \qquad (-pz + rx)\,dt, \qquad (-qx + py)\,dt$$

die Komponenten der relativen Verschiebung von dm im Zeitelement dt in bezug auf den Koordinatenanfangspunkt in seiner augenblicklichen Lage (zur Zeit t), und folglich sind

$$u - ry + qz, \qquad v - pz + rx, \qquad w - qx + py \tag{1}$$

die Komponenten der Geschwindigkeit von dm. Danach erhalten wir für die kinetische Energie des Körpers den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\int [(u - ry + qz)^2 + (v - pz + rx)^2 + (w - qx + py)^2]\,dm. \tag{2}$$

1. Die kinetische Energie des Körpers ist also eine homogene Funktion zweiten Grades von den sechs Größen

$$u,\ v,\ w,\ p,\ q,\ r,$$

deren Koeffizienten durch die Gestalt und Massenverteilung des Körpers bestimmt sind.

Es ist aus der Mechanik bekannt, daß man diesen Ausdruck durch passende Wahl des Anfangspunktes und der Achsenrichtungen sehr vereinfachen kann. Er läßt sich nämlich, wenn man den Schwerpunkt zum Anfangspunkt und die Hauptträgheitsachsen zu Koordinatenachsen macht, auf die Form

$$\tfrac{1}{2}[M(u^2 + v^2 + w^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2]$$

bringen, wenn M die Gesamtmasse des Körpers und A, B, C seine Hauptträgheitsmomente sind. Wir machen aber hier von dieser Vereinfachung keinen Gebrauch.

Nach § 172 hat das Geschwindigkeitspotential φ in einem beliebigen Punkt x, y, z der Flüssigkeit den Ausdruck

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6,$$

worin die Funktionen φ_1, φ_2, ... nur von der Gestalt der Oberfläche des Körpers abhängen, aber freilich erst durch Integration von partiellen Differentialgleichungen gefunden werden.

2. Die kinetische Energie der gesamten Flüssigkeitsmasse ist nach § 170 (1)

$$-\frac{1}{2}\varrho\int\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}do, \tag{3}$$

und ist also ebenfalls eine homogene Funktion zweiten Grades von

$$u, v, w, p, q, r.$$

Hierin ist ϱ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, do ein Oberflächenelement des Körpers und n die in das Innere der Flüssigkeit positiv gerechnete Normale.

Hieraus ergibt sich, daß die kinetische Energie T des ganzen, aus Körper und Flüssigkeit zusammengesetzten Systems ebenfalls eine homogene Funktion zweiten Grades der sechs Variablen in 1. ist. Wir setzen, indem wir zur Vereinfachung der Schreibweise

$$u, v, w, \quad p, q, r$$

durch

$$x_1, x_2, x_3, \quad x_4, x_5, x_6$$

bezeichnen:

$$2T = \sum_{1,6}^{i,k} c_{ik}x_i x_k. \tag{4}$$

Ihrer Bedeutung nach ist diese quadratische Funktion positiv und sie kann nur verschwinden, wenn die Variablen x_i alle zugleich verschwinden.

Die Koeffizienten $c_{ik} = c_{ki}$ sind Konstanten, die nur von der Beschaffenheit des Körpers und außerdem von der Dichtigkeit ϱ der Flüssigkeit abhängen. Ihre theoretische Berechnung würde die Kenntnis der Funktionen φ_i, also die Integration gewisser partieller Differentialgleichungen erfordern. Man kann sich diese Konstanten aber auch experimentell bestimmt denken, etwa wie die Masse und die Trägheitsmomente des Körpers.

§ 178.

Vereinfachung des Ausdrucks für die kinetische Energie bei Symmetrie.

Die Koeffizienten c_{ik} in dem Ausdruck für $2\,T$ haben eine einfache mechanische Bedeutung, durch die sie sehr anschaulich werden. Es ist nämlich $\frac{1}{2} c_{ii} x_i^2$ die kinetische Energie des Systems, die einer Bewegung entspricht, bei der alle Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ mit Ausnahme von x_i verschwinden. Demnach können wir z. B. c_{11} als die gesamte Masse betrachten, die bei einer Parallelverschiebung in der Richtung der x-Achse in Bewegung gesetzt wird. Ebenso ist c_{44} das Gesamtträgheitsmoment, das einer Drehung um die x-Achse entspricht mit Berücksichtigung der bei der Drehung mitgerissenen Flüssigkeitsmasse.

Setzen wir alle x, mit Ausnahme von zweien, x_i, x_k, gleich Null, so erhält T den Ausdruck

$$(1) \qquad T_{ik} = \tfrac{1}{2} c_{ii} x_i^2 + c_{ik} x_i x_k + \tfrac{1}{2} c_{kk} x_k^2,$$

und es ist also

$$2\,c_{ik} = T_{ik}^{+} - T_{ik}^{-}$$

der Unterschied zwischen den Werten der kinetischen Energie, wie er den beiden Annahmen

$$\begin{array}{ll} x_i = +1, & x_k = +1 \\ x_i = +1, & x_k = -1 \end{array}$$

entspricht. Ist z. B. $x_i = u$, $x_k = p$, so ist die erste dieser Bewegungen eine Rechtsschraubung, die zweite eine Linksschraubung.

Man kann allgemein den Ausdruck für $2\,T$ durch passende Wahl des Koordinatensystems auf eine einfachere Form bringen, und zwar kann man, da in dem rechtwinkligen Koordinatensystem der Anfangspunkt und drei Winkel verfügbar sind, die 21 Konstanten c_{ik} auf 15 reduzieren.

Wenn man zunächst bloß die Achsenrichtung ändert, so transformieren sich die Geschwindigkeiten u, v, w durch dieselben Formeln, wie die Koordinaten selbst. Wählt man daher zu Koordinatenachsen die Hauptachsen des Ellipsoids

$$(2) \quad c_{11} x^2 + c_{22} y^2 + c_{33} z^2 + 2\,c_{23} yz + 2\,c_{31} zx + 2\,c_{12} xy = 1,$$

so verschwinden in dem auf diese Achsen bezogenen Ausdruck für $2\,T$ die Koeffizienten c_{23}, c_{31}, c_{12}.

Hält man diese Achsenrichtungen fest, wählt aber einen Punkt, dessen Koordinaten a, b, c sind, zum neuen Anfangspunkt, so erhält man nach § 177 (1), wenn die Geschwindigkeitskomponenten dieses neuen Anfangspunktes mit u', v', w' bezeichnet werden:

$$
\begin{aligned}
u &= u' + rb - qc,\\
v &= v' + pc - ra,\\
w &= w' + qa - pb.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

In dem umgeformten Ausdruck für $2T$ kommen also die Glieder mit $v'w'$, $w'u'$, $u'v'$ nicht vor, und man erhält die Glieder

$$
\begin{aligned}
&2u'q(c_{15} - c_{11}c) + 2u'r(c_{16} + c_{11}b)\\
&+ 2v'r(c_{26} - c_{22}a) + 2v'p(c_{24} + c_{22}c)\\
&+ 2w'p(c_{34} - c_{33}b) + 2w'q(c_{35} + c_{33}a).
\end{aligned}
$$

Man kann nun die a, b, c so bestimmen, daß

$$
\begin{aligned}
c_{26} - c_{22}a &= c_{35} + c_{33}a,\\
c_{34} - c_{33}b &= c_{16} + c_{11}b,\\
c_{15} - c_{11}c &= c_{24} + c_{22}c
\end{aligned}
$$

wird, und zwar ist diese Bestimmung, weil c_{11}, c_{22}, c_{33} wesentlich positiv sind, unter allen Umständen eindeutig.

Man kann also den Anfangspunkt des Koordinatensystems so bestimmen, daß

$$
c_{26} = c_{35}, \quad c_{34} = c_{16}, \quad c_{15} = c_{24}
$$

wird.

Wenn wir daher der besseren Übersicht wegen die Bezeichnung der Koeffizienten c_{ik} ändern, so können wir die lebendige Kraft des Systems durch den Ausdruck darstellen:

$$
\begin{aligned}
2T &= au^2 + bv^2 + cw^2 + 2a'pu + 2b'qv + 2c'rw\\
&+ 2\alpha(qw + rv) + 2\beta(ru + pw) + 2\gamma(pv + qu)\\
&+ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2A'qr + 2B'rp + 2C'pq.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Der Koordinatenanfangspunkt ist hierbei unter allen Umständen ein in bezug auf die Gestalt des Körpers eindeutig bestimmter Punkt, den wir das Bewegungszentrum nennen wollen. Die Achsenrichtungen, die die Hauptachsen der Bewegung heißen mögen, sind im allgemeinen ebenfalls vollständig bestimmt; wenn aber die Fläche (2) eine Rotationsfläche ist, so ist nur eine der Achsen bestimmt, und wenn diese Fläche eine

Kugel ist, so können irgend drei aufeinander rechtwinklige Achsen als Hauptachsen bezeichnet werden [1]).

Wenn eine Symmetrieebene vorhanden ist, d. h. eine Ebene, für die nicht nur die Figur, sondern auch die Massenverteilung des Körpers symmetrisch ist, so muß das Zentrum jedenfalls auf dieser Ebene liegen, weil sonst der Spiegelpunkt des Zentrums ebenfalls Zentrum sein müßte, während doch nur ein Zentrum vorhanden sein kann. Aus dem gleichen Grunde muß eine der Hauptachsen der Bewegung auf der Symmetrieebene senkrecht stehen.

Für diesen Fall treten noch weitere Vereinfachungen in dem Ausdruck für $2T$ ein. Nehmen wir die Symmetrieebene zur xy-Ebene, so wird, wenn wir w, q, v, r gleich Null setzen und nur u und p von Null verschieden annehmen, die Vorzeichenänderung von p nichts ändern können, weil dadurch nur die ganze Bewegung in eine spiegelbildlich gleiche umgewandelt wird, und folglich muß der Koeffizient von up verschwinden. Aus demselben Grunde verschwinden die Koeffizienten von

$$up,\ vp,\ uq,\ vq,\ pr,\ qr,\ wu,\ wv,\ wr,$$

und es bleibt für $2T$ der Ausdruck:

$$(5)\qquad \begin{aligned} 2T = au^2 + bv^2 + cw^2 + 2\alpha(qw + rv) + 2\beta(ru + pw) \\ + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2C'pq. \end{aligned}$$

Ist eine zweite Symmetrieebene vorhanden, die auf der ersten senkrecht steht, so nehmen wir die Schnittlinie, auf der das Zentrum liegen muß, und in die eine der Hauptachsen fällt, zur z-Achse. Es muß dann die Form (5) erhalten bleiben, wenn wir x oder y mit z vertauschen, und folglich wird

$$(6)\qquad \begin{aligned} 2T = au^2 + bv^2 + cw^2 + 2\gamma(pv + qu) \\ + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \end{aligned}$$

und wenn drei aufeinander rechtwinklige Symmetrieebenen vorhanden sind, wie etwa bei einem Ellipsoid, so erhalten wir:

$$(7)\qquad 2T = au^2 + bv^2 + cw^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Kehren wir zu dem Falle (6) zurück und nehmen an, daß die beiden Symmetrieebenen gleichartig sind, so daß der Körper durch eine Drehung um die z-Achse um 90° mit sich selbst zur

[1]) Eine andere Normalform des Ausdrucks für die lebendige Kraft, die für die Bildung der allgemeinen Integralgleichungen geeignet ist, hat Minkowski gegeben (Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1888).

Deckung kommt, wie etwa bei einem Rotationskörper oder bei einer quadratischen Pyramide, so muß der Ausdruck (6) dasselbe ergeben für die beiden Annahmen

$$w = 0,\quad r = 0,\quad u = 0,\quad q = 0,\quad p = 1,\quad v = 1,$$
$$w = 0,\quad r = 0,\quad v = 0,\quad p = 0,\quad q = -1,\quad u = 1,$$

und daraus folgt

$$a = b,\quad A = B,\quad \gamma = -\gamma = 0,$$

also

$$2T = a(u^2 + v^2) + cw^2 + A(p^2 + q^2) + Cr^2, \tag{8}$$

und diese Form bleibt auch bestehen, wenn die Symmetrie so beschaffen ist, wie etwa bei einer regulär sechsseitigen Pyramide.

Hat der Körper die Gestalt einer Kugel, so ist nach § 173 (4) die lebendige Kraft der bewegten Flüssigkeit für sich

$$\tfrac{1}{4} m (u^2 + v^2 + w^2),$$

wenn m die von der Kugel verdrängte Wassermasse bedeutet. Es ist also in diesem Falle

$$2T = \tfrac{1}{2} m (u^2 + v^2 + w^2) + 2T', \tag{9}$$

wenn T' die lebendige Kraft der bewegten Kugel ist. Dieser Ausdruck bleibt auch dann gültig, wenn die Massenverteilung im Innern der Kugel nicht homogen ist. Der Ausdruck T' ist dann nach den Regeln der Mechanik starrer Massen zu berechnen. Wenn die Kugel homogen ist, die Masse M und den Radius c hat, so hat $2T'$ den Ausdruck

$$2T' = M(u^2 + v^2 + w^2) + \mu(p^2 + q^2 + r^2), \tag{10}$$

wenn

$$\mu = \frac{2M}{5} c^2$$

das Trägheitsmoment der Kugel in bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse ist.

> D i e k i n e t i s c h e E n e r g i e w i r d a l s o d u r c h d e n E i n f l u ß d e s W a s s e r s s o m o d i f i z i e r t , a l s o b d i e H ä l f t e d e r v e r d r ä n g t e n W a s s e r m a s s e o h n e R o t a t i o n m i t d e r G e s c h w i n d i g k e i t d e s K u g e l m i t t e l p u n k t e s f o r t g e f ü h r t w ü r d e.

§ 179.
Verallgemeinerung.

Wir betrachten jetzt noch einen etwas allgemeineren Fall: Wir wollen annehmen, es seien in die Flüssigkeit eine beliebige

Zahl starrer Körper eingetaucht, die auch noch in ihrer Beweglichkeit durch irgend welche Bedingungen beschränkt sein können. Die Lage dieses Körpersystems denken wir uns bestimmt durch eine endliche Anzahl voneinander unabhängiger Variablen

$$q_1,\ q_2,\ q_3,\ \ldots \tag{1}$$

Wenn die Körper in Bewegung sind, so sind die Variablen q_i Funktionen der Zeit t, deren Differentialquotienten dq_i/dt wir mit

$$q_1',\ q_2',\ q_3',\ \ldots \tag{2}$$

bezeichnen.

Um eine solche Bewegung analytisch darzustellen, nehmen wir ein im Raume festes Koordinatensystem x, y, z, das wir mit S bezeichnen wollen, und außerdem in jedem einzelnen der Körper K_1, K_2, ... ein mit diesem fest verbundenes und also mit ihm bewegliches Koordinatensystem σ_1, σ_2, ... Ist p ein Punkt des ersten Körpers K_1, dessen Koordinaten in bezug auf σ_1 mit ξ, η, ζ bezeichnet werden, so sind die Koordinaten von p im System S ausgedrückt durch Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} x &= a + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta \\ y &= b + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta \\ z &= c + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta \end{aligned} \tag{3}$$

Darin sind die Koeffizienten a, a_1, ..., die den Bedingungen für die rechtwinklige Koordinatentransformation genügen, Funktionen der q_i, und die ξ, η, ζ sind von der Zeit unabhängig; sie dienen nur dazu, die einzelnen Punkte des ersten Körpers voneinander zu unterscheiden. Die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes p erhalten wir aus (3) durch Differentiation nach der Zeit, z. B.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x}{\partial q_2} q_2' + \cdots,$$

und diese sind also lineare Funktionen der q_1', q_2', q_3' ... Folglich ist auch die Normalkomponente N der Geschwindigkeit an irgend einem Oberflächenpunkt eine lineare Funktion der q_i'. Wir setzen

$$N = N_1 q_1' + N_2 q_2' + N_3 q_3' + \cdots, \tag{4}$$

worin die Funktionen N_1, N_2, N_3, ... Funktionen der q_i sind, und außerdem noch von den ξ, η, ζ abhängen, durch die die einzelnen Oberflächenpunkte voneinander unterschieden werden.

Wenn wir nun das Geschwindigkeitspotential φ der Flüssigkeit bestimmen wollen, so können wir setzen

$$\varphi = q_1' \varphi_1 + q_2' \varphi_2 + q_3' \varphi_3 + \cdots \tag{5}$$

und haben die Funktionen φ_i den Bedingungen zu unterwerfen

$$\Delta \varphi_i = 0, \quad \overline{\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}} = N_i,$$

wodurch, wenn noch die allgemeine Bedingung für das Unendliche hinzugenommen wird, die Funktionen φ_i eindeutig, und zwar unabhängig von den q_i', bestimmt sind.

Hieraus ergibt sich:

> Die kinetische Energie des Systems ist eine homogene Funktion zweiten Grades der Variablen q_i':
> $$2T = F(q_1', q_2', q_3', \ldots),$$
> deren Koeffizienten Funktionen der Variablen q_1, q_2, q_3, ... sind.

§ 180.

Das Archimedische Prinzip.

Wir nehmen jetzt an, daß in jedem Punkte des Raumes auf ein Massenelement eine der Masse proportionale Kraft wirke, deren Komponenten, bezogen auf die Masseneinheit X, Y, Z, stetige Funktionen des Ortes seien. Diese Kraft soll ein stetiges Potential P haben, d. h. es soll

$$X = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{1}$$

sein. Der Raum ist nun von einer Flüssigkeit mit der konstanten Dichte ϱ_0 erfüllt, in die beliebige starre Körper eingetaucht sind, in denen die Dichtigkeit ϱ nicht konstant zu sein braucht. Jedem Massenelement dm des so definierten Feldes erteilen wir eine unendlich kleine virtuelle Verrückung mit den Komponenten δx, δy, δz. Die Bedingungen des Systems bestehen aber für einen Punkt der Flüssigkeit nur in der Inkompressibilität, d. h. in der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0$$

und für die Punkte der Körper in der Starrheit, verbunden mit den sonstigen Bedingungsgleichungen, denen die Körper noch unterworfen sein mögen.

Außerdem sollen die Wasserteilchen, die einer Körperoberfläche anliegen, nicht von ihr getrennt werden. Bezeichnen wir also mit δn_1 und δn_2 die Normalkomponenten der Verschiebung eines Körperpunktes und des anliegenden Wasserteilchens, so ist

$$(3) \qquad \delta n_1 = \delta n_2.$$

Endlich sollen die Verschiebungen δx, δy, δz in unendlicher Entfernung R, wo wir die Kraftkomponenten X, Y, Z endlich annehmen, stärker als $1/R^2$ verschwinden. Die bei diesem Verschiebungssystem von den wirkenden Kräften geleistete Arbeit ist

$$(4) \qquad \delta U = \int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z)\, dm,$$

worin die Integration über den ganzen unendlichen Raum, Flüssigkeit und feste Körper auszudehnen ist.

Die Summe δU zerfällt in zwei Teile,

$$(5) \qquad \delta U = \delta U_1 + \delta U_2,$$

von denen sich der erste auf die starren Körper bezieht, und wenn dm_1 ein Massenelement dieser Körper bedeutet, den Ausdruck hat:

$$(6) \qquad \delta U_1 = \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z \right) dm_1 = \int \delta P\, dm_1.$$

Wenn wir also eine Funktion

$$(7) \qquad U_1 = \int P\, dm_1$$

einführen, worin die Integration nach dm_1 über die sämtlichen Massenelemente der starren Körper erstreckt ist, so können wir δU_1 als die Variation der Funktion U_1 betrachten, die durch die Verschiebung der Körper hervorgebracht wird.

Der zweite Teil δU_2 von δU bezieht sich auf die Flüssigkeitselemente dm_2 und hat den Ausdruck

$$(8) \qquad \delta U_2 = \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z \right) dm_2,$$

oder wenn wir mit $d\tau_2$ ein Volumenelement bezeichnen und $dm_2 = \varrho_0 \delta\tau_2$ setzen:

$$(9) \qquad \delta U_2 = \varrho_0 \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z \right) d\tau_2.$$

Diesen Ausdruck formen wir nach dem Gaußschen Theorem um, und erhalten, indem wir wegen (2)

$$\frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z = \frac{\partial P \delta x}{\partial x} + \frac{\partial P \delta y}{\delta y} + \frac{\partial P \delta z}{\partial z}$$

setzen, mit Rücksicht auf (3):

$$(10) \qquad \delta U_2 = - \varrho_0 \int P \delta n_2 \, do = - \varrho_0 \int P \delta n_1 \, do,$$

ausgedehnt über alle Elemente do der Körperoberflächen, wenn δn_1 und δn_2 in die Flüssigkeit hinein positiv gerechnet wird.

Dieses Flächenintegral (10) können wir aber auch wieder nach demselben Gaußschen Satze umformen in ein Raumintegral über das Volumen der Körper. Es ist nämlich, wenn $d\tau_1$ ein Volumenelement eines Körpers ist,

$$(11) \qquad \int P \delta n_1 \, do = \int \left(\frac{\partial P \delta x}{\partial x} + \frac{\partial P \delta y}{\partial y} + \frac{\partial P \delta z}{\partial z} \right) d\tau_1,$$

und da nun auch für die Verschiebung eines starren Körpers, bei dem ja auch das Volumen eines jeden Elements ungeändert bleibt,

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0$$

ist (es ist sogar $\partial \delta x / \partial x$, $\partial \delta y / \partial y$, $\partial \delta z / \partial z$ einzeln $= 0$), so folgt aus (10) und (11):

$$(12) \qquad \delta U_2 = - \varrho_0 \int (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) \, d\tau_1.$$

Denken wir uns den Raum der starren Körper von einer Materie mit der konstanten Dichte ϱ_0 erfüllt und setzen $\varrho_0 d\tau_1 = dm_0$, so ist also

$$\begin{aligned} \delta U_2 &= - \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z \right) dm_0 \\ &= - \delta \int P \, dm_0. \end{aligned}$$

Wenn wir also

$$U_2 = -\int P dm_0 \tag{13}$$

und

$$U = \int P(dm_1 - dm_0) \tag{14}$$

setzen, so ist die Arbeit der gegebenen Kräfte gleich der Variation dieser Funktion U.

> Die Arbeit, die bei irgend einer virtuellen Verschiebung des ganzen Systems gegen die wirkenden Kräfte geleistet werden muß, ist also dieselbe, als ob die Verschiebung der starren Körper im leeren Raume vor sich ginge, und gleichzeitig jedes Massenelement dm_1 eines der starren Körper um die Masse dm_0 des verdrängten Wassers vermindern würde.

Man sieht, daß in dem Falle, wo die wirkende Kraft die Schwerkraft ist, dieser Satz mit dem Archimedischen Prinzip vom hydrostatischen Auftrieb übereinstimmt. Denkt man sich die Lage der Körper wie im vorigen Paragraphen durch die unabhängigen Variablen $q_1, q_2, q_3 \ldots$ dargestellt, so wird auch die Funktion U eine Funktion dieser Variablen sein. Eine virtuelle Verschiebung des Systems der Körper wird ausgedrückt durch ein System von Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \ldots$ dieser Variablen, und so wird

$$\delta U = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3 + \cdots, \tag{15}$$

worin die Koeffizienten $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ nur noch von den Variablen $q_1, q_2, q_3 \ldots$ abhängen, nämlich

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad Q_3 = \frac{\partial U}{\partial q_3}, \ldots \tag{16}$$

Jedes Glied dieser Summe hat seine besondere Bedeutung: es ist nämlich $Q \delta q_1$ die Arbeit der gegebenen Kräfte bei der Veränderung von q_1 in $q_1 + \delta q_1$ mit unverändertem $q_2, q_3, \ldots$ und ähnliche Bedeutung haben die übrigen Glieder.

§ 181.

Variation der Flüssigkeitsbewegung.

Das Hamiltonsche Prinzip bietet uns nun die Mittel, um die Differentialgleichungen der Bewegung eines Körpersystems in einer Flüssigkeit unter dem Einflusse gegebener Kräfte aufzustellen. Diese Anwendung des Hamiltonschen Prinzips ist zuerst von Thomson und Tait[1]) gemacht. Sie ist durch Kirchhoff[2]) weitergeführt und hat eine Berichtigung durch Boltzmann[3]) gefunden; noch vollständiger, auch mit Berücksichtigung mehrwertiger Geschwindigkeitspotentiale bei mehrfach zusammenhängenden Räumen, hat C. Neumann[4]) die Anwendung des Hamiltonschen Prinzips begründet. Eine klare Einsicht in die Berechtigung dieser Anwendung erfordert eine etwas eingehendere Entwickelung, wie wir sie hier im Anschluß an die Betrachtungen im Bd. I, § 129 geben wollen.

Wir nehmen, wie in den beiden letzten Paragraphen, ein beliebiges System $\mathfrak{K}$ von eingetauchten Körpern in irgend einer Bewegung begriffen an. Dann wissen wir, daß für jede Lage und jeden Geschwindigkeitszustand des Systems $\mathfrak{K}$ ein einwertiges Geschwindigkeitspotential φ für jeden Punkt x, y, z der Flüssigkeit eindeutig bestimmt ist.

Wir betrachten jetzt den Übergang des Systems $\mathfrak{K}$ aus einer Anfangslage A zur Zeit t_0 in eine Endlage B zur Zeit t_1 und bezeichnen mit C die zu irgend einer Zeit t erreichte Zwischenlage.

Nun nehmen wir einen zweiten, davon unendlich wenig abweichenden, möglichen Übergang von $\mathfrak{K}$ aus der Lage A in die Lage B zwischen denselben Zeitpunkten t_0, t_1 und bezeichnen die zur Zeit t erreichte Lage von $\mathfrak{K}$ mit C'. Es ist dann C' von C unendlich wenig verschieden.

Wir nehmen an, daß bei beiden Bewegungen auch alle Flüssigkeitsteilchen von der gleichen Anfangslage bei A ausgehen, können aber im allgemeinen nicht sagen, daß sie bei B wieder dieselbe Endlage erreicht haben.

Wir denken uns nun für jede der Lagen C und C' das Geschwindigkeitspotential φ und φ' als Funktion der auf ein festes System bezogenen Koordinaten x, y, z bestimmt, und erhalten die Bahn eines Wasserteilchens m, das zur Zeit $t = t_0$ die Ko-

---

[1]) Thomson u. Tait, „Natural Philosophy". Deutsch von Helmholtz und Wertheim, 1, 292 f. Braunschweig 1871.

[2]) Kirchhoff, Crelles Journal der Mathematik 71, 237 (1869). Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Leipzig 1876.

[3]) Boltzmann, Crelles Journal für Mathematik 73, 111 (1870).

[4]) C. Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen.

ordinaten a, b, c hat, beim Übergang von A nach C und C' durch Integration der Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$(2) \qquad \frac{dx'}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}, \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y'}, \quad \frac{dz'}{dt} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z'}.$$

Wenn sich x, y, z und x' y' z' auf dasselbe Wasserteilchen m beziehen, so ist für $t = t_0$

$$x = x' = a, \qquad y = y' = b, \qquad z = z' = c,$$

und durch (1) und (2) werden x, y, z und x', y', z' als Funktionen von a, b, c, t bestimmt.

Setzen wir

$$x' = x + \delta x, \qquad y' = y + \delta y, \qquad z' = z + \delta z,$$
$$\varphi' = \varphi + \delta \varphi,$$

so ist $\delta \varphi$ eine Funktion von x, y, z und es ist bis auf unendlich kleine Größen zweiter Ordnung dasselbe, ob wir $\delta \varphi$ für x y z oder für x' y' z' nehmen. Demnach ergeben die Gleichungen (2):

$$(3) \qquad \frac{d\delta x}{dt} = \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x}, \quad \frac{d\delta y}{dt} = \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y}, \quad \frac{d\delta z}{dt} = \frac{\partial \delta \varphi}{\partial z},$$

mit der Bedingung, daß δx, δy, δz für $t = t_0$ verschwinden. Wenn wir also x, y, z als Funktionen von a, b, c, t darstellen, so ist

$$(4) \qquad \delta x = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} dt, \quad \delta y = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} dt, \quad \delta z = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial z} dt,$$

wodurch δx, δy, δz auch als Funktionen von a, b, c dargestellt sind, und zwar, wenn $\delta \varphi$ bekannt ist, durch Quadraturen.

Diese Größen δx, δy, δz sind die Komponenten der Verschiebung, die nötig sind, um das Teilchen m aus der Lage bei C in die Lage bei C' überzuführen.

Wenn man statt a, b, c die Variablen x, y, z einführt, so kann man δx, δy, δz in einem Augenblick t auch als Funktionen von x, y, z ansehen, und kann dann δx, δy, δz als Komponenten eines für die Lage C bestimmten Vektors $\mathfrak{D}$ betrachten. Dieser Vektor $\mathfrak{D}$ hat folgende Eigenschaften:

Da ein Teilchen m, das anfänglich an der Oberfläche eines der Körper $\mathfrak{K}$ lag, sowohl bei der Bewegung ACB als bei $AC'B$ an der Oberfläche bleibt, so ist

$$D_n = \delta n, \tag{5}$$

wenn δn die Normalkomponente der Verschiebung des Oberflächenpunktes beim Übergang von C nach C' bedeutet.

Da der Vektor $\mathfrak{D}$ die Verschiebung einer inkompressiblen Flüssigkeit darstellt, so muß

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0 \tag{6}$$

oder ausführlich

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

sein. Dies ist zwar nicht ohne weiteres aus den Gleichungen (3) zu ersehen, weil die Differentiationen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{d}{dt}$ nicht vertauschbar sind. Es ist aber, wenn

$$\Theta = \sum \pm \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} \frac{\partial z}{\partial c}$$

ist, eine Folge aus $\Theta = 1$, wonach

$$\delta \Theta = \frac{\partial \delta x}{\partial a} \frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial x}{\partial a}} + \frac{\partial \delta y}{\partial a} \frac{\partial \Theta}{\partial \frac{\partial y}{\partial a}} + \cdots$$

$$= \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \quad [\S\ 165\ (1)]$$

gleich Null sein muß.

§ 182.
Das Hamiltonsche Prinzip.

Wenn die kinetische Energie der Flüssigkeit in der Lage C, C' mit T_2, T_2' bezeichnet wird, und dm ein Massenelement der Flüssigkeit bedeutet, so ist

$$T_2 = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] dm$$

und folglich

$$\delta T_2 = T_2' - T_2 = \int \left(\frac{dx}{dt} \frac{d\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt} \frac{d\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt} \frac{d\delta z}{dt} \right) dm.$$

Es ist aber

$$\frac{dx}{dt} \frac{d\delta x}{dt} = \frac{d\, \delta x \frac{dx}{dt}}{dt} - \delta x \frac{d^2 x}{dt^2} \text{ usw.}$$

und folglich

$$(1) \qquad \delta T_2' = \frac{d}{dt}\int\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)dm$$
$$- \int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dm.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$M = \int\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)dm$$

und führen nun an Stelle der a, b, c die x, y, z als unabhängige Variable ein, integrieren also über den Raum, der bei der Lage C durch die Flüssigkeit ausgefüllt ist, so können wir M so darstellen:

$$M = \varrho_0 \int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z\right)d\tau,$$

und da wegen § 181 (7)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\delta z = \operatorname{div}\varphi\mathfrak{D}$$

ist, so erhalten wir nach dem Gaußschen Theorem:

$$(2) \qquad M = -\varrho_0\int\varphi\,\delta n\,do,$$

wenn die Normalkomponente δn der Oberflächenverschiebung von dem Körper in die Flüssigkeit positiv gerechnet ist. Ebenso setzen wir:

$$N = \int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)dm$$
$$= \varrho_0\int\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)d\tau.$$

Nun ist aber, wenn p der Druck und X, Y, Z die Komponenten der beschleunigenden Kraft sind, nach § 163 (1)

$$\varrho_0\frac{d^2x}{dt^2} = \varrho_0 X - \frac{\partial p}{\partial x}, \ldots$$

und folglich

$$(3) \qquad N = \varrho_0\int(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau$$
$$- \int\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \frac{\partial p}{\partial y}\delta y + \frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)d\tau.$$

Hierin ist nun

$$\varrho_0\int(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau = \delta U_2' \text{ [§ 180 (9)]}$$

die der Verschiebung $\mathfrak{D}$ entsprechende Arbeit der wirkenden Kräfte, und das zweite Integral können wir, ebenso wie M, durch das Gaußsche Theorem in ein Oberflächenintegral verwandeln:

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x+\frac{\partial p}{\partial y}\delta y+\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)d\tau=-\int p\,\delta n\,do,$$

und daraus folgt also nach (1), (2), (3):

$$\begin{aligned}\delta T_2+\delta U_2&=\frac{dM}{dt}-N+\delta U_2=\\ &-\frac{d}{dt}\varrho_0\int\varphi\,\delta n\,\delta o-\int p\,\delta n\,do.\end{aligned}\tag{4}$$

Integrieren wir diesen Ausdruck zwischen den Grenzen t_0 und t_1 und beachten, daß die Anfangs- und Endlagen der Körper nicht variiert sind, daß also δn für $t=t_0$ und $t=t_1$ verschwindet, so folgt

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}(\delta T_2+\delta U_2)\,dt=-\int\limits_{t_0}^{t_1}dt\int p\,\delta n\,do.\tag{5}$$

Jetzt betrachten wir die Bewegung des Systems $\mathfrak{K}$ der eingetauchten Körper unter dem Einfluß der gegebenen Kräfte. Diese können wir uns auch entstanden denken als eine Bewegung derselben Körper im leeren Raume, wenn wir zu den tatsächlich wirkenden äußeren Kräften X, Y, Z noch die Druckkräfte hinzufügen, die von der Flüssigkeit gegen die Körperoberflächen ausgeübt werden. Diese wirken gegen ein Flächenelement do in der Stärke $p\,do$ und in der Richtung der nach innen gekehrten, also negativen Normalen. Die Arbeit δA, die bei einer Verschiebung des Körpersystems gegen alle in Betracht kommenden Kräfte geleistet wird, ist also

$$\delta A=-\int(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)\,dm_1+\int p\,\delta n\,do,$$

worin die Integration nach dm_1 über die Masse, die nach do über die Gesamtoberfläche der Körper $\mathfrak{K}$ auszudehnen ist. Den ersten Teil dieses Ausdruckes haben wir bereits in § 180 (6) mit $-\delta U_1$ bezeichnet, und folglich ist

$$\delta A=-\delta U_1+\int p\,\delta n\,do.\tag{6}$$

Denken wir uns aber die Körper im leeren Raume bewegt, so können wir das Hamiltonsche Prinzip in der Form anwenden, wie wir es im § 130 des ersten Bandes abgeleitet haben, nämlich, wenn δT_1 die Variation der kinetischen Energie der Körper bedeutet:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T_1 - \delta A)\, dt = 0 \quad [\text{Bd. I, § 130 (1)}]$$

oder nach (6)

$$(7) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T_1 + \delta U_1)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \int p\, \delta n\, do.$$

Wenn wir also

$$(8) \qquad \begin{aligned} \delta T &= \delta T_1 + \delta T_2, \\ \delta U &= \delta U_1 + \delta U_2 \end{aligned}$$

setzen, so ergibt sich durch Addition von (5) und (7):

$$(9) \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\, dt = 0,$$

und dies ist das Hamiltonsche Prinzip für das ganze aus Flüssigkeit und starren Körpern zusammengesetzte System.

Wenn wir, wie im § 179, die Lage der Körper durch die unabhängigen Variablen $q_1, q_2, q_3 \ldots$ darstellen, so ist

$$T = F(q'_1, q'_2, q'_3 \ldots)$$

eine homogene Funktion zweiten Grades der q'_i, deren Koeffizienten von den q_i selbst abhängen, und es ist also

$$\delta T = \sum^{i} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q'_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \right),$$

oder, weil $\delta q'_i = d\delta q_i / dt$ ist,

$$(10) \qquad \delta T = \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q_i - \sum \frac{d \dfrac{\partial T}{\partial q'_i}}{dt} \delta q_i + \sum \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Ebenso ist nach § 180 (15), (16)

$$(11) \qquad \delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i,$$

worin U eine Funktion der Variablen q_i ist, die aus der Natur der wirkenden Kräfte gefunden werden kann. Da nun δq_i bei

$t = t_0$ und $t = t_1$ Null sind, so fällt bei der Integration nach t das erste Glied des Ausdruckes (10) weg und es ergibt sich aus (9):

$$(12) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial (T + U)}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} \right) \delta q_i \, dt = 0,$$

und wegen der Willkürlichkeit der δq_i:

$$(13) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_i'} = \frac{\partial (T + U)}{\partial q_i},$$

was vollständig mit der zweiten Lagrangeschen Form der Bewegungsgleichungen übereinstimmt [Bd. I, § 130 (5)].

§ 183.
Anwendung auf die Pendelbewegung.

Wir wollen nun einige Beispiele für die Integration dieser Gleichungen behandeln.

Wir nehmen zunächst die Bewegung eines Pendels in einer Flüssigkeit. Dieses Problem hat wegen des Einflusses der Luft bei Pendelbeobachtungen ein großes Interesse, und unsere Theorie wird, obwohl sie sich auf inkompressible Flüssigkeiten bezieht, wohl einige, wenn auch keine genaue, Gültigkeit bei der Bewegung in Gasen beanspruchen dürfen, besonders, wenn die Bewegungen so langsam vor sich gehen, daß nur geringe Verdünnungen und Verdichtungen der Luft zu erwarten sind. Übrigens hat Bessel bei seinen Pendelbeobachtungen zur Kontrole gewisser Voraussetzungen das Pendel auch Schwingungen im Wasser ausführen lassen [1]).

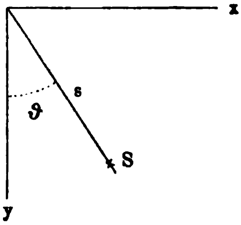
Wir nehmen also zunächst einen Körper von beliebiger Gestalt, der um eine horizontale Achse drehbar ist, und berücksichtigen als wirkende Kraft nur die Schwere. Wir wollen die positive y-Achse vertikal nach unten, die x-Achse horizontal, die z-Achse mit der festen Drehungsachse zusammenfallend nehmen.

Unter dem Schwerpunkt S verstehen wir jetzt nicht den Schwerpunkt des Körpers, sondern den Mittelpunkt der Schwerkräfte und des hydrostatischen Auftriebes. Es ist der Punkt, den man als Schwerpunkt erhalten würde, wenn die Dichtigkeit ϱ im Körper überall auf $\varrho - \varrho_0$ herabgemindert wäre. Er fällt

[1]) Bessel, „Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels", Abhandlungen der Berliner Akademie 1826, Art. 13, 14.

mit dem geometrischen Schwerpunkt des Körpers zusammen, wenn der Körper homogen, also ϱ konstant ist. Die Entfernung dieses Punktes von der Drehungsachse bezeichnen wir mit s, und den Winkel, den die Richtung s in einer augenblicklichen Lage mit der Vertikalen bildet, von der positiven y-Achse nach der positiven x-Achse positiv gerechnet, mit ϑ (Fig. 56). Ist M die Masse des Körpers, m die Masse der verdrängten Flüssigkeit, so ist die Funktion U, durch deren Veränderung die Arbeit gemessen wird,

Fig. 56.



$$U = (M - m) g s \cos\vartheta. \tag{1}$$

Um die kinetische Energie nach § 177 (4) zu berechnen, haben wir

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad r = \frac{d\vartheta}{dt}$$

zu setzen, und erhalten

$$2T = \mu \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

worin μ eine Konstante ist, die wir als das Trägheitsmoment des ganzen Systems bezeichnen können. Diese Konstante setzt sich aus zwei Teilen zusammen

$$\mu = \mu' + \mu'',$$

worin μ' das Trägheitsmoment des Körpers, μ'' eine nur von der Gestalt des Körpers abhängige und der Dichtigkeit ϱ_0 der Flüssigkeit proportionale Größe ist, die wir als Trägheitsmoment der mitgeführten Flüssigkeitsmasse bezeichnen können. Die Differentialgleichung der Bewegung wird also nach § 182 (13):

$$\mu \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -(M - m) g s \sin\vartheta, \tag{2}$$

und stimmt der Form nach mit der für ein gewöhnliches einfaches Pendel überein:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\vartheta,$$

so daß sich für die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels der Ausdruck ergibt:

$$l = \frac{\mu' + \mu''}{s(M - m)}. \tag{3}$$

Diese Länge vergrößert sich also gegenüber der Schwingung im leeren Raume aus einem doppelten Grunde, erstens durch eine Verminderung der Schwere durch den hydrostatischen Auftrieb, und zweitens durch Vergrößerung des Trägheitsmomentes durch die mitgeführte Flüssigkeit.

Der letztere Einfluß ist zuerst von Bessel bei seinen Pendelbeobachtungen bemerkt und berücksichtigt worden. Man kann ihn aus den Beobachtungen ermitteln, wenn man die Schwingungen von Pendeln von verschiedener Substanz, aber gleicher Form, bei dem μ' verschieden, aber μ'' gleich ist, miteinander vergleicht.

Wenn das Pendel aus einer homogenen Kugel besteht, die an einem Faden, dessen Masse nicht berücksichtigt wird, aufgehängt ist, so können wir μ', μ'' aus § 178 (9) und (10) berechnen, müssen dabei aber berücksichtigen, daß dort der Koordinatenanfangspunkt nicht der Aufhängepunkt, sondern der Kugelmittelpunkt ist, der jetzt mit dem Schwerpunkt S zusammenfällt.

Man hat daher in den dort angegebenen Formeln

$$u^2 + v^2 + w^2 = s^2 \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad r = \frac{d\vartheta}{dt}$$

zu setzen und erhält:

$$\mu = Ms^2 + \frac{2M}{5} c^2 + \tfrac{1}{2} m s^2,$$

also:

$$\mu' = Ms^2 + \frac{2M}{5} c^2,$$

$$\mu'' = \tfrac{1}{2} m s^2.$$

Bessel hat die hiermit übereinstimmende Annahme gemacht, daß die Korrektion μ'' des Trägheitsmomentes proportional sei mit dem Trägheitsmoment der im Kugelmittelpunkt vereinigten Masse der verdrängten Flüssigkeit, also $\mu = kms^2$ gesetzt. Den Koeffizienten k hat er durch verschiedene Messungen bestimmt, auch durch Schwingungen im Wasser, hat ihn aber freilich nicht gleich $1/2$, sondern größer (0,9459) gefunden, was im Hinblick auf die mannigfachen Umstände, die in der Theorie nicht berücksichtigt sind, und die alle auf Vergrößerung der mitgeführten Massen wirken, nicht zu verwundern ist.

Schon Dirichlet hat darauf hingewiesen[1]), daß die Ergeb-

[1]) Gesammelte Werke, Bd. II, S. 120.

nisse der Theorie nicht mit der Vorstellung übereinstimmen, die man sich von dem Widerstand einer Flüssigkeit bildet.

Danach würde man z. B. erwarten, daß der Widerstand der Flüssigkeit die Amplitude des Pendels allmählich verkleinert, wie es ja tatsächlich eintritt, aus der Theorie aber nicht zu schließen ist. Auch dies erklärt sich daraus, daß der eigentliche Widerstand einer Flüssigkeit ohne Zweifel auf Kräften nach Art der Reibung beruht, die in dieser Theorie nicht berücksichtigt sind.

§ 184.
Schraubenbewegung.

Wir nehmen einen Körper an, dessen Beweglichkeit bis auf zwei Freiheitsgrade gemindert ist. Seine Beweglichkeit soll nur bestehen in einer Parallelverschiebung längs der x-Achse und in einer Drehung um diese Achse; diese beiden Beweglichkeiten sollen aber unbeschränkt sein, so daß der Körper jede Schraubenbewegung um die x-Achse ausführen kann. Die Lage des Körpers werde bestimmt durch die Abszisse x eines seiner Punkte auf der Achse und durch den Winkel ϑ, den eine durch die x-Achse gehende Ebene des Körpers mit der xy-Ebene einschließt. Dieser Körper bewege sich in einer inkompressiblen Flüssigkeit. Ist

$$x' = \frac{dx}{dt}, \qquad \vartheta' = \frac{d\vartheta}{dt},$$

so ist die doppelte lebendige Kraft des Systems nach § 177

$$2\,T = a x'^2 + 2\,b\,x'\vartheta' + c\,\vartheta'^2,$$

worin a, b, c Konstanten sind. Es ist $\frac{1}{2}a$ die lebendige Kraft, die einer Parallelverschiebung, $\frac{1}{2}c$ die lebendige Kraft, die einer reinen Drehung mit der Geschwindigkeit 1 entspricht.

Setzen wir $x' = +1$, $\vartheta' = +1$ oder $\vartheta' = -1$, so beschreibt der Körper eine Rechtsschraubung oder eine Linksschraubung mit der Schraubengeschwindigkeit 1, und der Unterschied zwischen diesen beiden lebendigen Kräften ist gleich $2\,b$.

Hat der Körper selber die Gestalt einer Rechtsschraube, so wird offenbar mehr Masse bewegt bei einer Linksschraubung, bei der die Breitseite vorangeht, als bei einer Rechtsschraubung, bei der sich der Körper gewissermaßen durch die Flüssigkeit hindurchschraubt, und folglich ist b bei einer Rechtsschraube negativ, und bei einer Linksschraube positiv, und der absolute Wert von b wird um so größer sein, je stärker der Unterschied zwischen rechts und links, d. h. je deutlicher der Schraubencharakter in der Gestalt des Körpers ausgeprägt ist.

Wenn auf den Körper eine Kraft α in der Richtung der x-Achse und ein Drehungsmoment β um die x-Achse wirken, die konstant oder nur von der Zeit abhängig sind, so ist $\alpha \delta y + \beta \delta \vartheta$ die bei der Verschiebung δx, $\delta \vartheta$ geleistete Arbeit dieser Kräfte, und in den Formeln § 182 (13) ist $U = \alpha x + \beta \vartheta$ zu setzen. Demnach erhalten wir die Gleichungen:

$$\frac{d(ax' + b\vartheta')}{dt} = \alpha,$$
$$\frac{d(bx' + c\vartheta')}{dt} = \beta,$$

oder, wenn die Bewegung von der Ruhe ausgeht:

$$ax' + b\vartheta' = \int_{t_0}^{t} \alpha\, dt, \quad bx' + c\vartheta' = \int_{t_0}^{t} \beta\, dt.$$

Nehmen wir an, daß α und β nur in der Zeit von t_0 bis t_1 von Null verschieden sind und setzen

$$\int_{t_0}^{t_1} \alpha\, dt = A, \quad \int_{t_0}^{t_1} \beta\, dt = B,$$

so sind A und B Konstanten, und es ergibt sich, wenn $t > t_1$ ist:

$$x' = \frac{Ac - Bb}{ac - b^2}, \quad \vartheta' = \frac{-Ab + Ba}{ac - b^2}, \tag{1}$$

worin $ac - b^2$ stets positiv ist. Wenn etwa $A = 0$ ist, also

$$x' = -\frac{Bb}{ac - b^2}, \quad \vartheta' = \frac{Ba}{ac - b^2},$$

so ergibt sich, daß das Drehungsmoment B nicht bloß eine Drehung, sondern gleichzeitig eine fortschreitende Geschwindigkeit hervorruft. Ist B positiv, so ist ϑ' positiv und x' bei der Rechtsschraube gleichfalls positiv. Das Fortschreiten geschieht also im Sinne der Schraube.

Das Verhältnis der beiden Geschwindigkeiten ist

$$x' : \vartheta' = -b : a.$$

Dies ist der Fall der Schiffsschraube, die also um so wirksamer ist, je größer das Verhältnis $b:a$.

Ebenso würde sich ergeben, wenn wir $B = 0$ annehmen, daß eine der Achse parallele Kraft nicht nur eine Geschwindigkeit in ihrer Richtung, sondern eine gleichzeitige Drehung bewirkt, wobei das Verhältnis beider Geschwindigkeiten $c : b$ ist. Dies ist der Fall der Windmühlen und Turbinen.

§ 185.

Bewegung eines schweren Rotationskörpers mit unveränderlicher Achsenrichtung.

Wir betrachten noch die Bewegung eines Körpers, der etwa von einer Rotationsfläche begrenzt sei, der in seiner Bewegung so beschränkt ist, daß die Achse in einer vertikalen Ebene und sich selbst immer parallel bleibt. Wir wollen außerdem annehmen, daß der Körper der Schwerkraft unterworfen sei. Diese Voraussetzungen sind mit einer gewissen Annäherung bei der Bewegung eines Geschosses durch die Luft erfüllt.

Wir erhalten, wenn wir die Vertikalebene, in der die Bewegung stattfindet, zur xy-Ebene wählen, für die lebendige Kraft nach § 178 (7):

$$2T = au^2 + bv^2 + Ap^2. \tag{1}$$

Hierin sind u und v die Komponenten der Geschwindigkeit in der Richtung der Körperachse und senkrecht dazu, während p die Geschwindigkeit der Rotation um die Körperachse bedeutet. Bei einem abgeplatteten Körper ist $a > b$, bei einem eiförmigen $b > a$.

Bezeichnen wir den konstanten Winkel, den die Achse mit der Horizontalen bildet, mit ϑ und legen die y-Achse vertikal nach oben, so ist, wenn x, y die Koordinaten des Bewegungszentrums (§ 178) und folglich dx/dt, dy/dt die Komponenten der Geschwindigkeit nach der x- und y-Achse sind:

$$u = \frac{dx}{dt}\cos\vartheta + \frac{dy}{dt}\sin\vartheta,$$

$$v = -\frac{dx}{dt}\sin\vartheta + \frac{dy}{dt}\cos\vartheta.$$

In den Differentialgleichungen § 182 (13) hat man, wenn man x, y und den Winkel $\int p\,dt$ als die die Lage des Körpers bestimmenden Variablen einführt und mit G das Gewicht des Körpers in der Flüssigkeit bezeichnet, $U = -Gy$ zu setzen und erhält:

$$A \frac{dp}{dt} = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(au\cos\vartheta - bv\sin\vartheta)}{dt} &= 0, \\ \frac{d(au\sin\vartheta + bv\cos\vartheta)}{dt} &= -G, \end{aligned} \tag{3}$$

woraus folgt, daß p konstant bleibt, während sich für x, y durch Integration von (3) die Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} (a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta)x + (a-b)\sin\vartheta\cos\vartheta\, y &= c_1 t + c_1', \\ (a-b)\sin\vartheta\cos\vartheta\, x + (a\sin^2\vartheta + b\cos^2\vartheta)y &= -\tfrac{1}{2}Gt^2 + c_2 t + c_2, \end{aligned} \tag{4}$$

in denen c_1, c_2, c_1', c_2' die Integrationskonstanten sind.

Die Elimination von t ergibt hier für die Bahn die Gleichung einer schiefen Parabel. Wenn wir die linke Seite der ersten Gleichung (4) $= 0$ setzen, so erhalten wir die Gleichung einer zur Parabelachse parallelen Geraden und wenn also Θ den Winkel bedeutet, den die Parabelachse mit der Horizontalen einschließt, so ist

$$\operatorname{tang}\Theta = -\frac{a\cos^2\vartheta + b\sin^2\vartheta}{(a-b)\sin\vartheta\cos\vartheta}. \tag{5}$$

Nehmen wir ϑ zwischen 0 und 90° an, so sind $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ positiv; a und b sind gleichfalls positiv, und es ist also der Winkel Θ spitz, wenn $a < b$, stumpf, wenn $a > b$ ist. Die

Fig. 57.

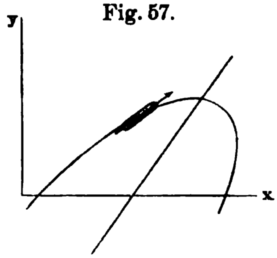
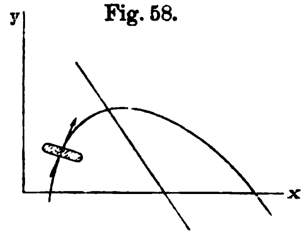


Fig. 58.



Parabelachse ist also beim eiförmigen Körper gegen die Körperachse hin, beim abgeplatteten Körper im entgegengesetzten Sinne geneigt (Fig. 57 und 58).

§ 186.

Oszillationen der Achse eines Rotationskörpers.

Wenn der eingetauchte Körper eine Symmetrieebene hat, so wird, wenn die Bewegungen der Körperpunkte in einem Augenblick alle mit dieser Symmetrieebene parallel sind, die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen symmetrisch zu dieser Ebene sein, und wenn also von der Wirkung äußerer Kräfte abgesehen wird, so wird die Bewegung auch im weiteren Verlaufe diesen Charakter behalten, da kein Grund vorhanden ist, daß eine Änderung eher im einen wie im anderen Sinne erfolgen sollte. Wenn wir also die Symmetrieebene, die dann auch im Raume fest bleibt, zur xy-Ebene machen, so wird ein Zustand, bei dem $w = 0$, $p = 0$, $q = 0$ ist, erhalten bleiben, und der Ausdruck § 178 (5) gibt für die lebendige Kraft den Ausdruck

$$2T = au^2 + bv^2 + 2\alpha ur + 2\beta vr + Cr^2.$$

Nehmen wir noch eine zweite auf der ersten senkrechte Symmetrieebene an, so kann die Änderung des Vorzeichens von r diesen Ausdruck nicht verändern und wir erhalten:

$$2T = au^2 + bv^2 + Cr^2. \tag{1}$$

Wir beschränken die Allgemeinheit jetzt nicht weiter, wenn wir annehmen, daß

$$a > b$$

sei. Nur ist dann, wenn der Körper z. B. ein Rotationskörper ist, bei einem abgeplatteten Körper u und bei einem ovalen Körper v in der Richtung der Rotationsachse zu messen.

Wir behalten nun die Bezeichnung wie im vorigen Paragraphen bei, nur daß jetzt der Winkel ϑ nicht konstant ist, und setzen also, wenn die Differentiation nach der Zeit durch Akzente angedeutet wird,

$$\begin{aligned} u &= \quad x' \cos\vartheta + y' \sin\vartheta, \\ v &= -x' \sin\vartheta + y' \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{2}$$

Es ist dann noch $r = \vartheta'$ zu setzen, und x, y, ϑ bestimmen die Lage des Körpers. Die Differentialgleichungen der Bewegung lauten jetzt, da T nicht von den Variablen x, y abhängt:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y'} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = \frac{\partial T}{\partial \vartheta}. \tag{4}$$

Die Integration der beiden Gleichungen (3) ergibt, wenn α, β Integrationskonstanten sind:

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x'} &= a u \cos\vartheta - b v \sin\vartheta = \alpha \\
\frac{\partial T}{\partial y'} &= a u \sin\vartheta + b v \cos\vartheta = \beta.
\end{aligned}
$$

Die Konstanten α, β sind durch die Anfangswerte u_0, v_0, ϑ_0 von u, v, ϑ bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right)_0 &= a u_0 \cos\vartheta_0 - b v_0 \sin\vartheta_0 = \alpha, \\
\left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right)_0 &= a u_0 \sin\vartheta_0 + b v_0 \cos\vartheta_0 = \beta,
\end{aligned}
$$

und da hier keine Richtung in der xy-Ebene vor der anderen ausgezeichnet ist, so können wir die x-Achse so wählen, daß $\beta = 0$ wird. Dadurch ist die Allgemeinheit der Voraussetzungen nicht beschränkt. Es hat aber die x-Achse eine durch den Anfangszustand bestimmte Richtung bekommen. Wir können sagen, die x-Achse hat die Richtung des anfänglichen Impulses, durch den die Bewegung eingeleitet ist, und α ist die Größe dieses Impulses. Denn läßt man während einer unendlich kurzen Zeit τ auf den ruhenden Körper eine Kraft wirken, deren Komponenten α/τ, β/τ sind, so ist die Bewegung von der Ruhelage aus durch die Gleichungen § 182 (13) bestimmt:

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x'} = \frac{\alpha}{\tau}, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial y'} = \frac{\beta}{\tau},
$$

woraus durch Integration über den Zeitraum τ:

$$
\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right)_0 = \alpha, \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial y'}\right)_0 = \beta.
$$

Aus (5) ergibt sich also:

$$
(6) \qquad \begin{aligned}
a u \cos\vartheta - b v \sin\vartheta &= \alpha, \\
a u \sin\vartheta + b v \cos\vartheta &= 0,
\end{aligned}
$$

und hieraus:

$$
(7) \qquad a u = \alpha \cos\vartheta, \qquad b v = -\alpha \sin\vartheta.
$$

Nun ergibt die Gleichung (4) nach (1):

$$
C \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = a u \frac{\partial u}{\partial\vartheta} + b v \frac{\partial v}{\partial\vartheta},
$$

und nach (2) ist

$$
\frac{\partial u}{\partial\vartheta} = v, \qquad \frac{\partial v}{\partial\vartheta} = -u,
$$

also

$$
C \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = (a - b) u v,
$$

und nach (7)

$$C\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{a-b}{ab}\alpha^2 \sin\vartheta \cos\vartheta. \tag{8}$$

Führen wir durch die Gleichung

$$\varphi = 2\vartheta \tag{9}$$

einen neuen Winkel ein, so erhält die Gleichung (8) die Form:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{(a-b)\alpha^2}{abC}\sin\varphi, \tag{10}$$

und dies geht über in die Gleichung für die Bewegung des einfachen Pendels:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \tag{11}$$

wenn

$$l = \frac{abCg}{(a-b)\alpha^2} \tag{12}$$

gesetzt wird.

Die Oszillationen um das Bewegungszentrum vollziehen sich also nach dem Pendelgesetz, nur daß der Winkel ϑ jederzeit nur die Hälfte des Ausschlagswinkels φ des Pendels ist. Den beiden Gleichgewichtslagen des Pendels $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ entsprechen die Werte $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, und es ergeben sich hiernach zwei Richtungen, in denen sich der Körper ohne Drehung mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegen kann.

Von diesen beiden Bewegungen ist aber nur die eine, für die $\vartheta = 0$ ist, stabil. Eine kleine Ablenkung hat hier nur kleine Oszillationen zur Folge, während bei dem Falle $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, entsprechend dem labilen Gleichgewichtszustande des Pendels, die kleinste Störung ein vollständiges Umschlagen zur Folge hat. Die Bewegung ist also dann stabil, wenn die mitbewegte flüssige Masse so groß wie möglich ist, wenn also die Breitseite bei der Bewegung voran geht.

Im allgemeinen sind, wie beim Pendel, zweierlei Arten der Bewegung zu unterscheiden: nämlich eine Oszillation um die Lage $\vartheta = 0$ und eine umwälzende Bewegung. Welche dieser beiden Arten eintritt, das hängt von dem Wert ϑ'_0 ab, den ϑ' in dem Augenblick hat, wo $\vartheta = 0$ ist; der erste oder zweite Fall tritt ein, wenn (dem absoluten Werte nach)

$$\vartheta'_0 < \alpha\sqrt{\frac{a-b}{abC}} \text{ oder } > \alpha\sqrt{\frac{a-b}{abC}}. \tag{13}$$

Um die Bewegung des Zentrums zu erhalten, haben wir aus den Gleichungen (7)

$$x' \cos\vartheta + y' \sin\vartheta = \frac{\alpha}{a} \cos\vartheta,$$

$$x' \sin\vartheta - y' \cos\vartheta = \frac{\alpha}{b} \sin\vartheta$$

x' und y' zu bestimmen. Man erhält:

$$(14) \qquad \begin{aligned} x' &= \alpha\left(\frac{\cos^2\vartheta}{a} + \frac{\sin^2\vartheta}{b}\right) = \alpha\left(\frac{1}{a} + \frac{a-b}{ab}\sin^2\vartheta\right) \\ y' &= -\frac{\alpha(a-b)}{ab}\sin\vartheta\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, daß x' sein Vorzeichen nicht ändert, daß also x, je nach dem Vorzeichen von α, fortwährend wächst oder fortwährend abnimmt.

Die zweite Gleichung ergibt nach (8):

$$(15) \qquad y' = \frac{C}{\alpha}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

und durch Integration, wenn wir den Anfangspunkt der y passend bestimmen:

$$(16) \qquad y = \frac{C\vartheta'}{\alpha}.$$

Durch die Differentialgleichung (8) werden die Funktionen ϑ', $\sin\vartheta$, $\cos\vartheta$ als elliptische Funktionen der Zeit bestimmt, und damit ist zugleich y' und x' bestimmt. Durch (16) ist zugleich y gegeben, während x erst durch ein elliptisches Integral zweiter Gattung dargestellt wird. Nach (16) bleibt die Ordinate y immer zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen.

Stellen wir die Bahnkurve dar, indem wir y als Funktion von x ansehen, so ergibt sich aus (14):

$$(17) \qquad \frac{dy}{dx} = -(a-b)\frac{\sin\vartheta\cos\vartheta}{b\cos^2\vartheta + a\sin^2\vartheta},$$

$$(18) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\vartheta'(a-b)ab}{\alpha}\frac{b\cos^2\vartheta - a\sin^2\vartheta}{(b\cos^2\vartheta + a\sin^2\vartheta)^3},$$

und hieraus lassen sich die wesentlichsten geometrischen Eigenschaften der Kurve ableiten.

Wenn der Körper oszilliert, so durchkreuzt er nach (16) die x-Achse, wenn $\vartheta' = 0$ ist, also in den äußersten Lagen. y erreicht abwechselnd ein Maximum und ein Minimum, wenn ϑ durch 0 geht. Die Bahnkurve hat einen Wendepunkt, wenn $\vartheta' = 0$ ist, und sie hat, wenn Θ die Amplitude der Schwingung ist, noch weitere Wendepunkte, wenn

$$\operatorname{tg}^2 \Theta > \frac{b}{a}$$

ist, weil dann $b \cos^2 \vartheta - a \sin^2 \vartheta$ im Verlauf der Bewegung Null wird.

Wenn vollständige Umwälzungen stattfinden, so ändert ϑ' sein Vorzeichen nicht, es geht also die Kurve nicht durch die x-Achse. Sie erreicht ihren höchsten und tiefsten Stand y_0 und

Fig. 59.

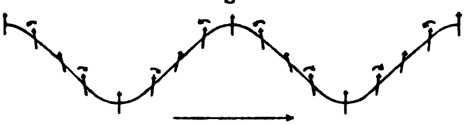
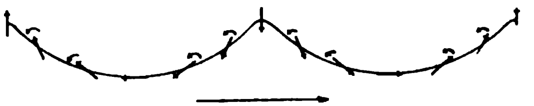


Fig. 60.



y_1, wenn sich ϑ um ein Vielfaches von π von 0 oder von $\frac{1}{2}\pi$ unterscheidet. Die Kurve hat Wendepunkte, wenn $\operatorname{tg}^2 \vartheta = b/a$ ist, und für die höchsten und tiefsten Stellen ist

$$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_0 = -\frac{\vartheta_0' (a-b) a}{\alpha b},$$

$$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_1 = \frac{\vartheta_1' (a-b) b}{\alpha a}.$$

Da $\vartheta_0' > \vartheta_1'$ und $a > b$, so ist hiernach die Kurve an dem höchsten Punkte stärker gekrümmt, als an dem tiefsten. Die Fig. 59 und 60 geben ein ungefähres Bild von dieser Bewegung.

Die gleichzeitige Bewegung mehrerer starrer Körper in einer Flüssigkeit bietet selbst unter den einfachsten Voraussetzungen der mathematischen Behandlung große Schwierigkeiten. Am leichtesten zugänglich ist die Bewegung zweier Kugeln, die infolge der hydrodynamischen Druckkräfte Anziehungen aufeinander auszuüben scheinen, die von Bjerknes auch experimentell nachgewiesen sind, auch unter der Voraussetzung, daß die Radien der Kugeln pulsierende Veränderungen erleiden. (Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie von V. Bjerknes, Bd. I. Leipzig 1900).

Die mathematische Theorie der Bewegung unveränderlicher Kugeln in der Flüssigkeit ist eingehend untersucht von C. Neumann (Hydrodynamische Untersuchungen. Leipzig 1883).

Zweiundzwanzigster Abschnitt.

Unstetige Bewegung von Flüssigkeiten.

§ 187.

Grenzbedingung an Unstetigkeitsflächen.

Die Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$, von der das Geschwindigkeitspotential φ der wirbelfreien Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit abhängt, ist dieselbe, von der das Potential einer stationären elektrischen Strömung abhängt. Trotzdem zeigen die beiden Arten der Bewegung einen sehr wesentlichen Unterschied, der erst durch Helmholtz mit den Formeln der Theorie in Einklang gebracht worden ist[1]).

Wenn nämlich ein räumlich ausgedehnter Leiter von elektrischen Strömungen durchflossen ist, so gibt es niemals einen Teil des Leiters, der stromfrei wäre. Die Strömungen verbreiten sich von den Elektroden aus nach allen Teilen des Leiters. Bei den Flüssigkeitsbewegungen ist das anders. Wenn z. B. einem Strome der Flüssigkeit eine Wand mit einer engen Öffnung entgegengestellt wird, so wird sich der Strom hinter dieser Öffnung nicht sofort allseitig ausbreiten, sondern die Flüssigkeit wird in einem Strahle, dessen Querschnitt kleiner wird als die Fläche der Öffnung, aus dieser heraustreten.

Daß Bewegungen der ersten Art, wie sie bei elektrischen Strömen vorkommen, bei Flüssigkeiten unmöglich sind, hat darin seinen Grund, daß da, wo die Flüssigkeit um eine scharfe Kante herumströmen würde, die Geschwindigkeit unendlich groß und damit der Druck negativ unendlich werden müßte. Ein negativer Druck bedeutet aber eine Tendenz auf Zerreißen, der eine

[1]) Helmholtz: Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. Monatsberichte der Berliner Akademie vom 23. April 1868; Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Crelles Journ. 70 (1869).

Flüssigkeit nach der Vorstellung, die wir uns von dem Wesen der Flüssigkeit machen, entweder gar nicht oder doch nur bis zu einer gewissen Höhe widerstehen kann. Ein negativer Druck ist also entweder gar nicht oder doch nur bis zu einer gewissen Größe möglich. Dagegen sind bei Flüssigkeiten nach der Theorie auch Bewegungen möglich, bei denen die Geschwindigkeit eine unstetige Funktion des Ortes ist, und von dieser Art ist der Ausfluß eines Strahles aus einer Öffnung. Wir haben zunächst die Grenzbedingung für eine solche Unstetigkeitsfläche aufzusuchen. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Betrachtung **wirbelfreier stationärer Bewegungen inkompressibler Flüssigkeiten.**

Wir gehen aus von der allgemeinen Gleichung § 167 (5):

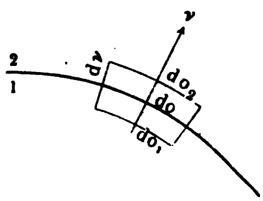
$$(1)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = V - \int\frac{dp}{\varrho} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right\} + C,$$

in der φ das Geschwindigkeitspotential, V das Potential der äußeren Kräfte und C eine Konstante oder eine Funktion der Zeit allein bedeutet. Nehmen wir $\varrho = 1$ an und bezeichnen mit v die Geschwindigkeit, so können wir diese Gleichung für den stationären Fall, wo $\partial\varphi/dt = 0$ ist, so darstellen:

$$(2)\qquad p + \tfrac{1}{2}v^2 = V + C.$$

Das Potential V setzen wir als **stetige Funktion des Ortes** voraus. Wenn nun v an einer Fläche unstetig ist, so denken wir uns einen Elementarzylinder vom Volumen $do\,dv$, dessen beide Endflächen do zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche liegen (Fig. 61). Unterscheiden wir die Werte, die eine Funktion auf beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche hat, durch die Indices 1 und 2, so ist nach der Voraussetzung

Fig. 61.



$$(3)\qquad V_1 = V_2.$$

Ist N die Normalkomponente der Geschwindigkeit (von 1 nach 2 positiv gerechnet), so ist, wenn wir dv in Vergleich zu den Dimensionen von do als unendlich klein annehmen, die in der Zeiteinheit in das Element einströmende Flüssigkeitsmenge $(N_1 - N_2)\,do$, und da diese Größe verschwinden muß, so ist

$$(4)\qquad N_1 = N_2\,[1].$$

[1]) Dies würde anders sein bei Gasen, wo die Dichtigkeit an derselben Fläche unstetig sein kann (vgl. Abschnitt ~~XXII~~).
XXIII

Die Druckkraft, die auf das Element wirkt, ist $(p_1 - p_2)\,do$, und folglich wirkt auf die Masseneinheit die Druckkraft $(p_1 - p_2)/dv$. Da diese Druckkraft aber nicht unendlich sein kann, so muß

$$(5) \qquad p_1 = p_2$$

sein. Hieraus ergibt sich nach der Formel (2), in der die Konstante C auf beiden Seiten verschiedene Werte haben kann:

$$(6) \qquad v_1^2 - v_2^2 = \text{Const.}$$

Wenn also angenommen wird, daß die Flüssigkeit auf der Seite 2 der Unstetigkeitsfläche in Ruhe sei, so folgt aus (4)

$$(7) \qquad N_1 = 0,$$

und aus (6)

$$(8) \qquad v_1^2 = \text{Const.}$$

Da also die Normalkomponente auch auf der Seite der bewegten Flüssigkeit Null ist, so findet die Strömung längs der Unstetigkeitsfläche nur in tangentialer Richtung statt, und wegen (8) ist die Geschwindigkeit über die ganze Fläche konstant[1]).

§ 188.

Zweidimensionale Bewegungen.

Wir schaffen uns Fälle, in denen die Integration möglich ist, durch dasselbe Mittel, das wir im ersten Bande mehrfach auf elektrische Probleme angewandt haben, indem wir annehmen, daß die gesuchten Funktionen nur von zwei Variablen x, y abhängen, daß also der Zustand der Flüssigkeit an allen Stellen einer jeden zur xy-Ebene senkrechten Geraden derselbe sei. Dann können wir die Hilfsmittel der Funktionentheorie nutzbar machen.

---

[1]) Wir haben hier nicht, wie es gewöhnlich geschieht, $V = 0$ angenommen, und sind zu Grenzbedingungen gelangt, die von V unabhängig sind. Anders würde es sein, wenn zu beiden Seiten der Unstetigkeitsfläche verschiedene Dichtigkeiten wären. So ergeben sich z. B. für den in der Luft oder im leeren Raum austretenden Strahl die Bedingungen für die Oberfläche des Strahles, daß der Druck p konstant, und zwar gleich dem äußeren Drucke (Atmosphärendruck oder Null) sein muß, daß die Normalkomponente der Geschwindigkeit Null sein muß, und daß

$$\frac{1}{2} v^2 = V + \text{const.}$$

sei. Die Schwierigkeit, die die Integration bietet, besteht darin, daß die Grenze, an der diese Bedingungen gelten sollen, nicht gegeben ist.

Ist nämlich φ nur von x, y abhängig, so besagt die Gleichung $\Delta\varphi = 0$, daß φ der reelle Teil einer Funktion

$$\chi = \varphi + i\psi = f(z) \tag{1}$$

des komplexen Argumentes

$$z = x + iy \tag{2}$$[1]

ist, wenn ψ aus den Gleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{3}$$

bestimmt wird. Wir erhalten in der xy-Ebene zwei orthogonale Kurvenscharen $\varphi =$ const. und $\psi =$ const., von denen die erste die Äquipotentialkurven, die zweite die Stromkurven darstellt. Alle Linien in der xy-Ebene sind die Spuren von Zylinderflächen im Raume.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß die bewegte Flüssigkeit teils von festen Wänden, teils von freien Grenzen begrenzt ist, wobei unter freien Grenzen solche Flächen im Raume oder Kurven in der xy-Ebene zu verstehen sind, wo der Strom unmittelbar an ruhender Flüssigkeit herfließt. Das Flächengebiet in der xy-Ebene, das von der bewegten Flüssigkeit überdeckt ist, nennen wir die Fläche Z.

Die Bewegung in diesem Gebiete Z ist durch das Geschwindigkeitspotential φ bestimmt. Ist Z mehrfach zusammenhängend, so kann φ mehrwertig sein, es wird dann einwertig in einem einfach zusammenhängenden Gebiete Z', das durch Querschnitte aus Z entstanden ist; weil aber die Differentialquotienten $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$ in Z einwertig und stetig sein müssen, so ist φ selbst an den Querschnitten entweder stetig oder hat zu beiden Seiten konstante Wertdifferenzen.

Die Funktion ψ wird aus φ durch eine Quadratur abgeleitet:

$$\psi = \int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\, dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\, dx\right),$$

auch ψ kann an den Querschnitten konstante Wertdifferenzen erhalten, und zwar auch dann, wenn φ daselbst stetig ist.

Betrachten wir φ und ψ als Koordinaten in einer χ-Ebene, so erhalten wir ein konformes Abbild X des Flächenstückes Z. Während aber Z seiner Bedeutung nach über der z-Ebene

[1]) Es ist hier natürlich z nicht zu verwechseln mit der dritten Raumkoordinate.

einfach ausgebreitet ist, kann X die χ-Ebene auch mehrfach bedecken.

1. Da die Begrenzung von Z immer durch Stromlinien gebildet ist, so kann die Begrenzung von X nur aus geraden Linien bestehen, die der φ-Achse parallel sind.

Die festen Grenzen des Gebietes Z sind durch die Aufgabe selbst gegeben. Für sie ist die einzige Grenzbedingung $\psi = \text{const.}$ Die freien Grenzen dagegen sind nicht gegeben, sondern sollen erst bestimmt werden. Für sie haben wir noch die Bedingung, daß die Geschwindigkeit konstant sein soll. Führen wir also noch eine dritte komplexe Variable $w = u + iv$ ein, deren reeller Teil u die x-Komponente, während der Koeffizient v von i die mit negativem Zeichen genommene y-Komponente der Geschwindigkeit ist, also:

$$(4) \qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

so ist

$$(5) \qquad w = u + iv = \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial x} = \frac{d\chi}{dz},$$

und die Grenzbedingung für die freien Grenzen besteht darin, daß der absolute Wert von w

$$(6) \qquad |w| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

konstant sein muß.

Wir erhalten also auch in der w-Ebene ein konformes Abbild W von Z und X, in welchem den freien Grenzen Stücke von konzentrischen Kreisen entsprechen, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkte $w = 0$ liegt.

Dagegen ist über die Gestalt der Begrenzungsstücke von W, die den festen Grenzen entsprechen, im allgemeinen nichts bekannt. Wenn man also lösbare Aufgaben finden will, so muß man das Flächenstück W beliebig annehmen, und erhält dann durch konforme Abbildung das Flächenstück Z, bei dem die Begrenzungsteile, denen in der Fläche W Kreise um den Nullpunkt entsprechen, freie Grenzen sein können, während die übrigen Begrenzungsteile von Z feste Grenzen sind.

Nur in einem Falle können wir die Natur der Begrenzungslinien in W von vornherein angeben. Denken wir uns nämlich eine feste Grenze der Fläche Z dadurch gegeben, daß y eine gegebene Funktion von x ist, so ist an dieser Grenze $\psi =$ const., also

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

oder nach (4)

$$v + u\frac{dy}{dx} = 0. \tag{7}$$

Wenn nun die Begrenzung von Z, um die es sich handelt geradlinig ist, so ist $dy/dx = \alpha$ konstant, und wir erhalten aus (7):

$$v + \alpha u = 0. \tag{8}$$

Dies ist aber die Gleichung einer vom Nullpunkt auslaufenden geraden Linie in der W-Ebene.

2. Wenn also die festen Grenzen in der z-Ebene gerade Linien sind, so ist die Begrenzung von W gebildet durch konzentrische Kreise und radiale Linien.

Die Begrenzung von X ist ihrer Natur nach ebenfalls bekannt (parallele gerade Linien) und wir erhalten also zur Bestimmung der Abhängigkeit zwischen χ und w ein Abbildungsproblem. Ist dieses gelöst, also w als Funktion von χ bestimmt, so erhält man aus (5) z durch die Quadratur:

$$z = \int \frac{d\chi}{w} \tag{9}$$

gleichfalls als Funktion von χ. Es sind also hier nicht direkt φ und ψ als Funktionen von x, y bestimmt, sondern umgekehrt x, y als Funktionen von φ und ψ. Um aber die Stromlinien, und damit also auch die Grenzen von Z zu erhalten, hat man ψ gleich einer Konstanten zu setzen, und erhält dann die Kurve in sogenannter „Parameterdarstellung", d. h. x und y als Funktionen einer Variablen φ.

Die Gleichung § 187 (2) ergibt hier:

$$p = -\tfrac{1}{2}|w|^2 + V + C,$$

und sie zeigt, daß, wenn w unendlich wird, der Druck p negativ unendlich wird, was nicht zulässig ist. Hieraus folgt:

3. Das Flächenstück W darf nur einen endlichen Teil der w-Ebene bedecken.

Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß W Teile der w-Ebene mehrfach bedeckt. Die Funktion w ist in Z überall stetig und eindeutig, und wenn also Z mehrfach zusammenhängend ist, so muß W dieselbe Ordnung des Zusammenhanges haben.

Wenn auf der Begrenzung von Z bei einem Punkte $z = c$ eine Ecke vom Winkel $\alpha\pi$ vorkommt, so läßt sich die Funktion χ in der Umgebung des Punktes $z = c$ nach Potenzen von $(z - c)^{\frac{1}{\alpha}}$ entwickeln. Ist aber

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 (z - c)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots,$$

so folgt

$$w = \frac{\chi_1}{\alpha} (z - c)^{\frac{1}{\alpha} - 1} + \cdots \tag{10}$$

Ist die Ecke gegen die strömende Flüssigkeit konvex, so ist α größer als 1, und w wird nach (10) unendlich bei $z = c$. Dies darf nicht vorkommen.

4. Wenn daher die feste Wand, an der die Flüssigkeit zu bleiben gezwungen ist, eine gegen die Flüssigkeit konvexe Ecke hat, so muß von dieser eine freie Grenze auslaufen.

Die Fläche Z kann sich nach verschiedenen Seiten ins Unendliche erstrecken. Den verschiedenen Zweigen im Unendlichen werden verschiedene Geschwindigkeiten, also verschiedene Punkte in der w-Ebene entsprechen. Ist irgendwo die Flüssigkeit in Ruhe, so entspricht dieser Stelle der Nullpunkt der w-Ebene. Dies findet, wie man aus der Formel (10) für $\alpha < 1$ ersieht, immer an solchen Stellen statt, wo die Grenze eine konkave Ecke gegen die Flüssigkeit bildet.

5. Eine gegen die Flüssigkeit konkave Ecke der festen Grenzen wird also im Nullpunkte der w-Ebene abgebildet.

Wenn in einem inneren Punkte $w = 0$ ist, so ist ein solcher Punkt ein Kreuzungspunkt. Die Strömung hat den Charakter, wie er auf S. 458 des ersten Bandes dargestellt ist. Ist $z = c$ ein solcher Punkt, so hat die Entwickelung von χ in seiner Umgebung die Form

$$\chi = \chi_0 + \chi_1 (z - c)^2 + \cdots,$$

und der Punkt $\chi = \chi_0$ ist ein **Verzweigungspunkt** in der χ-**Ebene**.

6. **Wenn also dem Nullpunkt der w-Ebene ein Punkt im Endlichen der z-Ebene im Innern von Z entspricht, so entspricht ihm in der χ-Ebene ein Verzweigungspunkt.**

Wenn χ unendlich wird, so muß notwendig z unendlich sein, da in jedem endlichen Punkte ein endliches Geschwindigkeitspotential vorhanden ist. Wird z für einen anderen Wert von χ unendlich, so ist da auch $dz/d\chi$ unendlich, und folglich $d\chi/dz = w = 0$.

Also können wir noch beifügen:

7. **Die unendlich fernen Punkte der Fläche Z entsprechen entweder dem Punkte $\chi = \infty$ oder dem Punkte $w = 0$.**

§ 189.

Beispiel I.

Als erstes Beispiel nehmen wir für das Flächenstück W den Einheitskreis in der w-Ebene. Wir erhalten dann in der z-Ebene eine freie Grenze und keine festen Grenzen.

Da der Punkt $w = 0$ dem Innern des Gebietes W angehört, so müssen wir in dem Flächenstück X einen **Verzweigungspunkt** annehmen. Wir legen diesen Verzweigungspunkt auf die imaginäre Achse der χ-Ebene in den Punkt

$$\varphi = 0, \qquad \psi = i$$

und nehmen für die Fläche X die **doppelt bedeckte Halbebene** in der χ-Ebene, in der ψ positive Werte hat. Die beiden (im Unendlichen zusammenhängenden) Linien $\psi = 0$ sollen der Begrenzung von W entsprechen. Wir denken uns die χ-Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung mit einer Doppelfläche X' überdeckt, die in den beiden Punkten $\chi = \pm i$ je einen Verzweigungspunkt hat. Diese Doppelfläche, deren beide Blätter im Unendlichen nicht zusammenhängen, ist **einfach zusammenhängend**.

Wir haben im § 54 des ersten Bandes die Abbildung eines Kreises auf eine einfache Halbebene kennen gelernt. Danach ist, wenn wir eine neue komplexe **Variable**

$$\zeta = \xi + i\eta$$

einführen und

(1)
$$w = \frac{1+\zeta}{1-\zeta},$$

setzen, der absolute Wert von w gleich 1, wenn ζ rein imaginär ist. Es ist $w = 0$, wenn $\zeta = -1$, und $w = \infty$, wenn $\zeta = +1$ ist, und folglich ist der Einheitskreis W auf die Halbebene ζ abgebildet, in der ξ negativ ist. Wir erhalten also die Abbildung von W auf die Fläche X, wenn wir die einfache ζ-Ebene so auf die doppelte χ-Ebene abbilden, daß rein imaginären Werten von ζ reelle Werte von χ entsprechen, und daß den Punkten $\zeta = \mp 1$ die Punkte $\chi = \pm i$ als Verzweigungspunkte der χ-Ebene entsprechen. Diese Abbildung aber wird vermittelt durch folgende Substitution:

(2)
$$w^2 = \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2 = \frac{\chi - i}{\chi + i}$$

oder nach χ aufgelöst:

(3)
$$\chi = -i\,\frac{1+\zeta^2}{2\zeta}.$$

Es ist also $\chi = \infty$ für $\zeta = 0$ und $\zeta = \infty$, und es ist $\chi = 0$ für $\zeta = \pm i$.

Um nun z als Funktion von χ zu bestimmen, hat man die Formel

(4)
$$dz = \frac{d\chi}{w} = d\chi \sqrt{\frac{\chi + i}{\chi - i}}$$

zu integrieren, und erhält, wenn man die Konstante so wählt, daß z für $\chi = i$ verschwindet:

(5)
$$z = \sqrt{\chi^2 + 1} + i \log \frac{\sqrt{\chi^2+1} + \chi}{i},$$

und der Logarithmus ist dann durch die Bedingung, daß sein imaginärer Teil zwischen $-i\pi$ und $+i\pi$ liegen soll, in der ganzen Fläche X eindeutig bestimmt [weil ψ in der ganzen Fläche X nicht negativ und folglich $i\left(\sqrt{\chi^2+1} + \chi\right)$ nicht reell und positiv ist].

Wir erhalten aus (5) die Gleichungen der freien Grenze, wenn wir $\chi = \varphi$ reell annehmen, und erhalten für die beiden

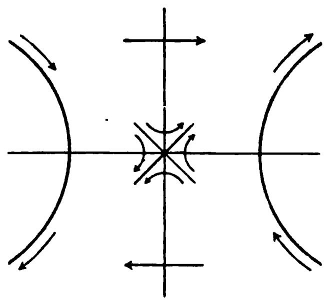
Vorzeichen der Wurzel zwei symmetrisch gelegene Kurvenzweige, deren Bilder die beiden Geraden $\psi = 0$ in der Fläche X sind:

$$
(6) \qquad \begin{aligned} x &= \sqrt{\varphi^2+1} + \frac{\pi}{2}, & x &= -\sqrt{\varphi^2+1} - \frac{\pi}{2}, \\ y &= \log\left(\sqrt{\varphi^2+1} + \varphi\right), & y &= \log\left(\sqrt{\varphi^2+1} - \varphi\right), \end{aligned}
$$

worin $\sqrt{\varphi^2+1}$ positiv zu nehmen ist.

Da die Strömung die Richtung der wachsenden φ hat, so ist sie, wie der Ausdruck $dy = \pm\, d\varphi / \sqrt{\varphi^2+1}$ zeigt, auf dem ersten Zweig von negativen zu positiven, auf dem zweiten von positiven zu negativen y gerichtet. Der Koordinatenanfangspunkt in der xy-Ebene ist der Punkt, in dem die Geschwindigkeit Null ist; ihm entspricht in der Fläche X ein Verzweigungspunkt, in dem $\chi = i$ ist, und in seiner Umgebung hat die Strömung die in der Fig. 62 durch die Pfeile angedeutete Richtung.

Fig. 62.



Den Linien $\varphi = 0$, $\psi > 1$ in beiden Blättern der Fläche X entspricht in der z-Ebene die positive und negative y-Achse. Den beiden Strecken $\varphi = 0$, $0 < \psi < 1$ entsprechen die Strecken $\overline{0a}$ und $\overline{0a'}$ der x-Achse, deren Enden die Abszissen

$$\pm\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

haben.

Allgemeinere Fälle dieser Bewegung kann man bilden, wenn man in X statt eines einfachen einen $n$fachen Verzweigungspunkt annimmt. Es ist dann zu setzen:

$$
(7) \qquad w = \sqrt[n]{\frac{\chi - i}{\chi + i}},
$$

und man erhält die Gleichungen der freien Grenze aus dem Integral:

$$z = \int \sqrt[n]{\frac{\varphi + i}{\varphi - i}}\, d\varphi.$$

Macht man die Substitution

$$\varphi = \operatorname{cotang} \vartheta, \qquad d\varphi = -\frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta},$$

so ergibt sich:

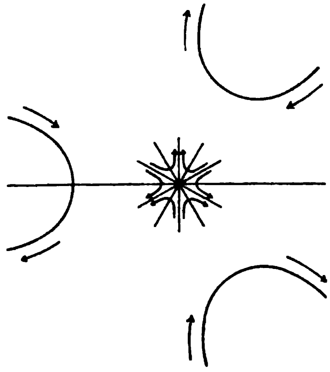
$$z = -\int \frac{e^{\frac{2i\vartheta}{n}} d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}$$

oder

$$x = -\int \frac{\cos \frac{2\vartheta}{n}\, d\vartheta}{\sin^2 \vartheta},$$

$$y = -\int \frac{\sin \frac{2\vartheta}{n}\, d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}.$$

Fig. 63.



Die Kurve besteht hier aus n kongruenten Zweigen, die durch Drehung um den Winkel $2\pi/n$ ineinander übergehen (in Fig. 63 ist $n = 3$ angenommen).

§ 190.

Beispiel II.

Wenn wir in der w-Ebene irgend eine Figur W nehmen, die von konzentrischen Kreisbögen und radialen Linien begrenzt ist, und diese Figur auf die einfache Halbebene χ abbilden, so erhalten wir in der z-Ebene einen Flüssigkeitsstrom, der eine einzige Linie zur Grenze hat, längs der die Strömung aus dem Unendlichen ins Unendliche überall in demselben Sinne erfolgt. Diese Grenze ist teils aus geradlinigen festen, teils aus freien Grenzen gebildet, entsprechend den radialen und den kreisförmigen Begrenzungsstücken.

Interessantere Fälle erhält man aber, wenn man eine solche Figur nicht auf die ganze χ-Halbebene, sondern nur auf einen Teil von ihr abbildet, und da die Begrenzung in der χ-Ebene immer durch parallele Gerade gebildet sein muß, so ist hier der einfachste Fall, der zugleich die meisten der bisher gemachten Anwendungen umfaßt, der, daß wir einen Streifen, der von zwei zur reellen Achse parallelen Geraden begrenzt ist, als Fläche X wählen. Durch Verfügung über die Einheiten können wir erreichen, daß die Grenzen eines solchen Streifens durch die beiden

Geraden $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ gebildet sind (Fig. 64, 65). Diesen Streifen können wir zunächst auf eine Halbebene X_1 in einer χ_1-Ebene abbilden, wenn wir setzen:

$$\chi_1 = \varphi_1 + i\,\psi_1 = e^{\chi} = e^{\varphi + i\psi}. \tag{1}$$

Den beiden Grenzen des Streifens χ entspricht die Achse der reellen χ_1, und zwar der Linie $\psi = 0$ die positiven der Linie

Fig. 64.

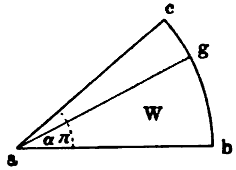
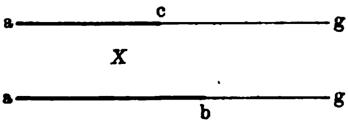


Fig. 65.



$\psi = \pi$ die negativen Werte von φ_1. Die Punkte 0 und ∞ in der χ_1-Ebene entsprechen negativ und positiv unendlichen Werten von φ. Verstehen wir noch unter A, B, C, D reelle Konstanten und setzen

$$\chi_1 = \frac{A\chi_2 + B}{C\chi_2 + D}, \tag{2}$$

so erhalten wir ein weiteres Abbild X_2 von X_1, und wir können die Konstanten so wählen, daß drei beliebig gegebenen reellen Werten von χ_1 drei ebenfalls beliebig gegebene reelle Werte von χ_2 entsprechen.

Für die Fläche W wollen wir zunächst einen Kreissektor a, b, c annehmen, der von einem Bogen bc des Einheitskreises

Fig. 66.

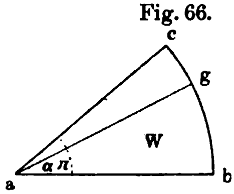
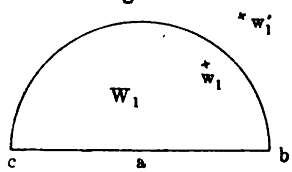


Fig. 67.



und zwei Radien ab, ac begrenzt ist (Fig. 66). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß der eine dieser Radien in die u-Achse falle.

Den Winkel des Kreissektors bei a bezeichnen wir mit $\alpha\pi$.

Da wir in der Fläche X keinen Verzweigungspunkt haben, so muß $w = 0$ einem unendlichen Wert von χ entsprechen (§ 188, 6.), und wenn wir annehmen, daß die Flüssigkeit von daher strömt, so haben wir die Bedingung:

$$\text{für } w = 0 \quad \text{ist} \quad \chi = -\infty, \quad \chi_1 = 0. \tag{3}$$

Wenn der Strahl ins Unendliche abfließen soll, so können wir auf dem Kreisbogen einen beliebigen Punkt g annehmen, in dem $\chi = +\infty$ werden soll. Also haben wir

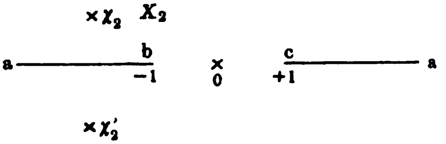
(4) $$\text{für } w = g \quad \text{ist} \quad \chi = +\infty, \quad \chi_1 = \infty.$$

Wir können die Aufgabe weiter dadurch vereinfachen, daß wir den Kreissektor (a, b, c) auf einen Halbkreis W_1 (Fig. 67) abbilden durch die Substitution

(5) $$w = w_1^{\alpha},$$

und es bleibt uns also die Aufgabe, den Halbkreis W_1 auf die Halbebene X_1 abzubilden. Wir suchen zunächst eine Abbildung χ_2, bei der den Punkten b, c, d. h. $w_1 = \pm 1$ die Werte $\chi_2 = \pm 1$ und dem Punkt $w_1 = 0$ der Punkt $\chi_2 = \infty$ entspricht. Wir

Fig. 68.



wollen die Funktion w_1 dadurch über die ganze χ_2-Ebene ausdehnen, daß wir zwei symmetrisch gelegenen Punkten χ_2, χ_2' zwei harmonische Pole w_1, w_1' entsprechen lassen. Diese Funktion ist dann an bc (Fig. 68) stetig, während an den Strecken ab und ca die Beziehung $w_1' = 1/w_1$ besteht. Folglich ist die Funktion

$$w_1 + \frac{1}{w_1}$$

in der ganzen χ_2-Ebene stetig und also eine rationale Funktion von χ_2. Sie wird nur unendlich in der ersten Ordnung für $\chi_2 = \infty$ und wird gleich ± 1 für $w_1 = \pm 1$.

Daraus folgt:

(6) $$\chi_2 = \frac{1}{2}\left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right),$$

und daraus:

(7) $$w_1 = \chi_2 + \sqrt{\chi_2^2 - 1}.$$

Daraus leiten wir mittels der Bedingungen (3), (4) die Funktion χ_1 her, nämlich:

(8) $$\chi_1 = \frac{C}{w_1 + w_1^{-1} - g_1 - g_1^{-1}},$$

worin $g = g_1^\alpha$ und C eine Konstante ist.

Bezeichnen wir den Bogen (bg) (Fig. 66) mit γ, so können wir

(9) $$g = e^{i\gamma}, \quad g_1 = e^{i\gamma_1} = e^{\frac{i\gamma}{\alpha}}$$

setzen. Für die Punkte des Kreisbogens ist

$$w = e^{i\vartheta}, \quad w_1 = e^{\frac{i\vartheta}{\alpha}},$$

und demnach ergibt die Formel (8):

(10) $$\chi_1 = \frac{\frac{1}{2}C}{\cos\frac{\vartheta}{\alpha} - \cos\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\frac{1}{4}C}{\sin\frac{\gamma+\vartheta}{2\alpha}\sin\frac{\gamma-\vartheta}{2\alpha}}.$$

Da χ reell und folglich χ_1 reell und positiv sein soll, solange ϑ zwischen 0 und γ liegt, so muß die Konstante C reell und positiv sein.

Um z als Funktion von χ oder von w zu erhalten, wendet man die Formel § 188 (9) an:

$$dz = \frac{d\chi}{w} = \frac{d\log\chi_1}{w}.$$

Fügt man noch eine ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung der Figur in der z-Ebene hinzu, so kann man auch setzen

$$dz = h\frac{d\log\chi_1}{w},$$

worin h eine reelle Konstante bedeutet.

Die Einführung von w_1 als unabhängige Variable ergibt nach (8):

(11) $$dz = h\frac{w_1^{-1} - w_1}{w_1^{-1} + w_1 - 2\cos\gamma_1}\frac{dw_1}{w_1^{\alpha+1}}.$$

Für die freie Grenze kann man auch die Variable ϑ anwenden, und findet:

(12) $$dz = h\frac{e^{-i\vartheta}\sin\frac{\vartheta}{\alpha}\,d\vartheta}{2\alpha\sin\frac{\gamma+\vartheta}{2\alpha}\sin\frac{\gamma-\vartheta}{2\alpha}},$$

und durch Trennung des reellen vom imaginären Bestandteil:

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
x &= h \int \frac{\cos\vartheta \sin\frac{\vartheta}{\alpha}\, d\vartheta}{2\alpha \sin\frac{\gamma+\vartheta}{2\alpha} \sin\frac{\gamma-\vartheta}{2\alpha}},\\
y &= -h \int \frac{\sin\vartheta \sin\frac{\vartheta}{\alpha}\, d\vartheta}{2\alpha \sin\frac{\gamma+\vartheta}{2\alpha} \sin\frac{\gamma-\vartheta}{2\alpha}}.
\end{aligned}
$$

Ist der Kreissektor abc und der Punkt g gegeben, so findet man die Richtungen der festen Grenzen in der z-Ebene nach

Fig. 69.

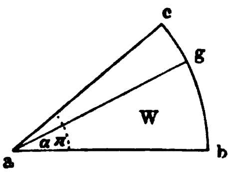
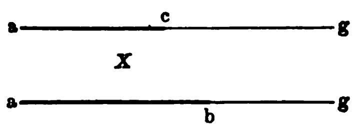
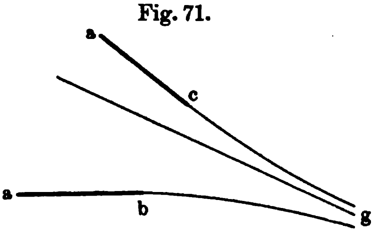


Fig. 70.



§ 188 (8) daraus, daß sie mit der x-Achse den entgegengesetzten Winkel bilden müssen, wie der entsprechende Radius ab oder ac mit der u-Achse, und ebenso findet man die Richtung, mit der der Strahl ins Unendliche geht aus $dy/dx = -\operatorname{tang}\gamma$. Den Punkt b in der z-Ebene kann man in den Koordinatenanfangspunkt legen, indem man $z = 0$ annimmt für $w = 1$. Der Punkt c in der z-Ebene ist aber durch α und γ bestimmt. Man erhält aus (11) durch Integration:

Fig. 71.



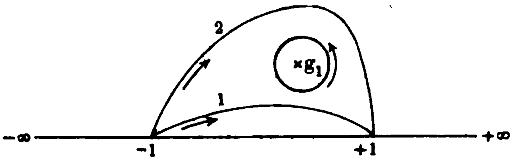
$$
(14)\qquad z_b - z_c = h \int_{-1}^{+1} \frac{w_1^{-1} - w_1}{w_1^{-1} + w_1 - 2\cos\gamma_1} \frac{dw_1}{w_1^{\alpha+1}},
$$

wobei der Integrationsweg im Innern des Halbkreises W_1 verlaufen muß, und weder den Punkt 0 noch den Punkt g_1 berühren darf.

Sind die festen Wände mit ihren Endpunkten in der z-Ebene gegeben, so ist dadurch zunächst α direkt bestimmt, und aus (14) erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung von γ und h.

Das Integral (14) kann man etwa über den in der Fig. 72 mit 1 bezeichneten Weg nehmen. Man kann es statt dessen aber auch nach dem Cauchyschen Satze über den Weg 2

Fig. 72.



nehmen, und ein um den Punkt g_1 herumgeführtes Integral hinzufügen. Man erhält so, wenn man der Einfachheit halber $h = 1$ setzt [Bd. I, § 51, (2)]:

$$(15)\quad z_b - z_c = -2\pi i g_1^{-\alpha} + \int_{-1}^{+1} \frac{(w_1^{-1} - w_1)}{w_1^{-1} + w_1 - 2\cos\gamma_1} \frac{dw_1}{w_1^{\alpha+1}},$$

wo jetzt das Integral über den Weg (2) zu nehmen ist. Dieses Integral kann aber in ein geradliniges verwandelt werden, das von -1 bis $-\infty$ und dann von $+\infty$ bis $+1$ geht. Macht man die Substitution

$$(16)\quad w_1 = \frac{1}{t},$$

so geht t auf reellem Wege von -1 bis $+1$ und man erhält nach (9):

$$(17)\quad z_b - z_c = -2\pi i e^{-i\gamma} - \int_{-1}^{+1} \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-t} - 2\cos\frac{\gamma}{\alpha}} t^{\alpha-1}\,dt.$$

Hierin ist die Potenz t^α für positive Werte von t reell und positiv zu nehmen, während $t^\alpha e^{\alpha\pi i}$ für negative t reell und positiv ist [nach (16), weil $we^{-\alpha\pi i}$ auf dem Radius ac (Fig. 69) positiv ist]. Man kann demnach das Integral (17) auch so zerlegen:

$$(18)\quad z_b - z_c = -2\pi i e^{-i\gamma}$$

$$-\int_0^1 \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1} - 2\cos\frac{\gamma}{\alpha}} t^{\alpha-1}\,dt + e^{-\alpha\pi i}\int_0^1 \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1} + 2\cos\frac{\gamma}{\alpha}} t^{\alpha-1}\,dt,$$

und durch Trennung des reellen von dem imaginären Bestandteil:

$$x_b - x_c = -2\pi\sin\gamma + \cos\alpha\pi\int_0^1 \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1} + 2\cos\frac{\gamma}{\alpha}}\, t^{\alpha-1}\, dt,$$

$$(19) \qquad - \int_0^1 \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1} - 2\cos\frac{\gamma}{\alpha}}\, t^{\alpha-1}\, dt,$$

$$y_b - y_c = -2\pi\cos\gamma - \sin\alpha\pi\int_0^1 \frac{t - t^{-1}}{t + t^{-1} + 2\cos\frac{\gamma}{\alpha}}\, t^{\alpha-1}\, dt.$$

§ 191.

Besondere Fälle.

Im allgemeinen lassen sich die Integrationen, auf die wir im vorigen Paragraphen die Aufgabe zurückgeführt haben, nicht weiter reduzieren. Ist aber $\alpha = m/n$ eine rationale Zahl, so erhält man aus § 190 (11), wenn man $h = 1$ setzt, und die Substitution

$$(1) \qquad w_1 = t^{-n}$$

macht:

$$(2) \qquad z = -n\int \frac{t^n - t^{-n}}{t^n + t^{-n} - 2\cos\frac{n\gamma}{m}}\, t^{m-1}\, dt,$$

also ein Integral einer rationalen Funktion von t. Der Ausdruck durch Logarithmen wird aber um so komplizierter, je größer die ganzen Zahlen m und n sind.

Um den einfachsten Fall zu betrachten, nehmen wir $\alpha = 1$, also $m = n = 1$, $w = w_1 = t^{-1}$, und erhalten durch Integration mittels Zerlegung in Partialbrüche ($g = e^{i\gamma}$):

$$(3) \qquad z = -t - g\log(t - g) - g^{-1}\log(t - g^{-1}),$$

und hieraus erhält man die Gleichungen für die freie Grenze, wenn man $t = e^{-i\vartheta}$ setzt.

Aus § 190 (19) ergibt sich für diesen Fall:

$$(4) \qquad x_b - x_c = -2 - \pi\sin\gamma - 2\cos\gamma\log\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2},$$

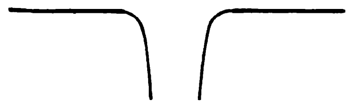
$$y_b - y_c = -2\pi\cos\gamma,$$

und es ist also, wenn γ zwischen 0 und $\pi/2$ liegt, $y_b < y_c$, und wenn γ zwischen $\pi/2$ und π liegt, $y_b > y_c$. Für $\gamma = \pi/2$ ist

$y_b = y_c$. Die Differenz $x_b - x_c$ wird für $\gamma = 0$ positiv unendlich und ist negativ für $\gamma = \pi/2$ und auch für $\gamma = \pi/4$. Die Fig. 73, 74 zeigen die Art der Strömung, von denen die erste etwa für $\gamma = \pi/4$, die zweite für $\gamma = \pi/2$ gilt.

Fig. 73.

Fig. 74.



Der Grenzfall $\gamma = 0$ (ebenso $\gamma = \pi$) bedarf noch einer besonderen Betrachtung; in diesem Falle bleibt nur eine ins Unendliche verlaufende freie Grenze übrig. Betrachten wir der Einfachheit halber nur den Fall $\alpha = 1$, so können wir das Resultat aus der Formel (3) ableiten:

$$z = -t - 2\log(t-1) = -\frac{1}{w} - 2\log\frac{1-w}{w}. \tag{5}$$

Solange w reell ist und zwischen 0 und 1 liegt, ist $z = x + iy$ reell, und x geht von $-\infty$ zu $+\infty$. Ist w zwischen 0 und -1 gelegen, so erhält man den Wert von z, wenn man einen Halbkreis im positiven Sinne um den Nullpunkt beschreibt, und findet also

$$x = -\frac{1}{w} - 2\log\frac{1-w}{-w}, \quad y = 2\pi.$$

Wenn w von -0 bis -1 geht, so geht x von $+\infty$ bis $1 - 2\log 2$, und y bleibt konstant $= 2\pi$. Setzen wir endlich $w = e^{i\vartheta}$, so ergeben sich die Gleichungen der freien Grenze:

$$\begin{aligned} x &= -\cos\vartheta - 2\log\left(2\sin\frac{\vartheta}{2}\right), \\ y &= \sin\vartheta + \pi + \vartheta. \end{aligned} \tag{6}$$

Für $\vartheta = \pi$ wird $y = 2\pi$ und $x = 1 - 2\log 2$, und für $\vartheta = 0$ wird $x = +\infty$ und $y = \pi$. Die Strömung wird durch Fig. 75 veranschaulicht.

Fig. 75.

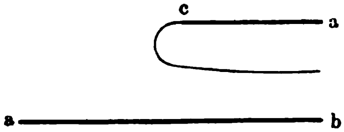
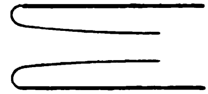


Fig. 76.



Fügt man das Spiegelbild dieser Strömung an der Ebene $y = 0$ hinzu, so kann man die feste Grenze ab weglassen und erhält so den von Helmholtz zuerst behandelten Fall (Fig. 76), wo ein Flüssigkeitsstrom aus einem unendlichen Behälter in einen von zwei parallelen Wänden begrenzten Kanal einströmt.

§ 192.
Beispiel III.

Wir betrachten noch einen Fall, in dem die Geschwindigkeit im ganzen Felde nirgends verschwindet. Wir nehmen für die Fläche W ein Viereck, das von zwei konzentrischen Kreisbögen und zwei Radien begrenzt ist.

Die Fig. 77 bis 80 zeigen die Gestalt der Fläche W und ihre Abbildung auf die Flächen X und X_1 und endlich die

Fig. 77.

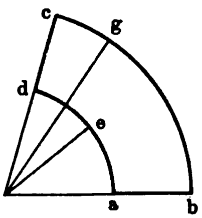


Fig. 78.

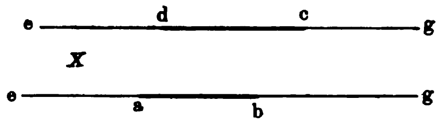


Fig. 79.

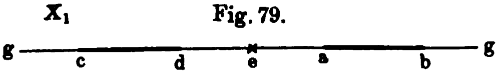


Fig. 80.

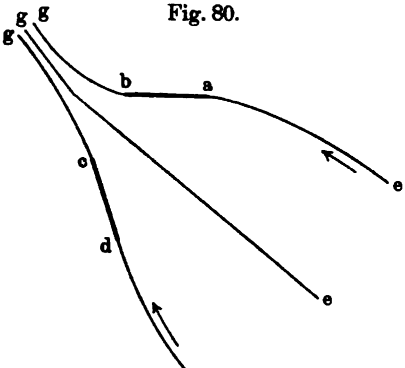
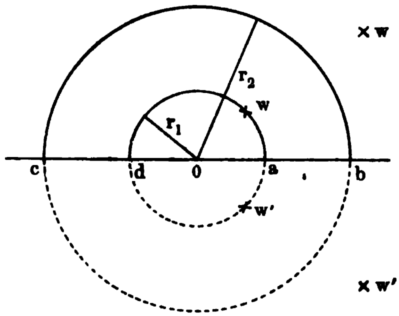


Fig. 81.



wahre Strömung durch die Abbildung in der z-Ebene. Es strömt hier ein aus dem Unendlichen kommender Strahl in einen trichterartig verengten Kanal, den er mit vergrößerter Geschwindigkeit wieder verläßt. Die analytische Lösung des Problems verlangt die Abbildung des Vierecks W auf eine χ_2-Halbebene. Wenn man diese hat, so kann man durch eine lineare Substitution mit reellen Koeffizienten

$$\chi_1 = \frac{A\chi_2 + B}{C\chi_2 + D}$$

erreichen, daß den Punkten 0 und ∞ in der χ_1-Ebene die gegebenen Punkte g und e entsprechen. Dann erhält man $\chi = \log \chi_1$ und z durch Quadratur.

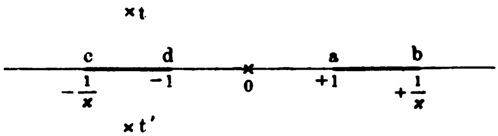
Wir beschränken die Aufgabe nicht wesentlich, wenn wir annehmen, daß die begrenzenden Bögen von W Halbkreise seien, weil wir durch die Substitution $w = w_1^a$ andere Fälle auf diesen zurückführen können.

Eine solche Halb-Ringfläche wollen wir so auf eine t-Halbebene abbilden, daß den Punkten $abcd$ die Punkte

$$t = +1, \qquad +1/\varkappa, \qquad -1/\varkappa, \qquad -1$$

entsprechen, worin $\varkappa$ ein echter Bruch ist (Fig. 81, 82). Diese Abbildungsaufgabe ist nahe verwandt mit der, die wir im § 150

Fig. 82.



des ersten Bandes behandelt haben, und läßt sich wie diese durch Theta-Funktionen lösen. Wir wollen hier aber einen anderen — gewissermaßen den umgekehrten — Weg einschlagen, indem wir nicht t als Funktion von w, sondern w als Funktion von t darzustellen suchen.

Wenn die Abbildung gelungen ist, so ist w als Funktion von t für die obere t-Halbebene bestimmt. Wir setzen diese Funktion dadurch auf die untere Halbebene fort, daß wir konjugiert imaginären Werten t, t' von t konjugiert imaginäre Werte w, w' von w entsprechen lassen. Dadurch ist w für alle Werte von t bestimmt. Diese Funktion ist in der ganzen t-Ebene stetig, mit Ausnahme der den Kreisbögen entsprechenden Strecken

$$(-1, \ +1) \quad \text{und} \quad \left(-1/\varkappa, \ \infty, \ +\frac{1}{\varkappa}\right);$$

auf diesen ist, wenn r_1 und r_2 die Radien der Kreise sind:

$$ww' = r_1^2 \quad \text{und} \quad ww' = r_2^2.$$

Es ist also, wenn wir längs der reellen t-Achse, wobei r_1 und r_2 konstant bleiben, differentiieren:

$$\frac{d \log w}{dt} = -\frac{d \log w'}{dt},$$

und folglich ist

$$(1)\qquad \left(\frac{d \log w}{dt}\right)^2 = \Phi(t)$$

in der ganzen t-Ebene stetig und mithin eine rationale Funktion von t.

Da w in der ganzen t-Ebene nicht verschwindet, so kann $\Phi(t)$ nur in den Stellen unendlich werden, in denen dw/dt unendlich wird, und dies kann nur eintreten in den Verzweigungspunkten ± 1, $\pm 1/\varkappa$. Es ist aber z. B. die Entwickelung von w in der Umgebung des Punktes 1 von der Form:

$$w - r_1 = \sqrt{1-t}\,[a_0 + a_1(1-t) + \cdots],$$

worin a_0 von Null verschieden ist, weil einem halben Umlaufe in der t-Ebene um den Punkt 1 ein Viertel Umlauf um den Punkt a in der w-Ebene entspricht. Daraus aber ergibt sich, daß

$$\sqrt{1-t}\,\frac{dw}{dt}$$

für $t = 1$ endlich bleibt. Da Ähnliches für die anderen drei Punkte b, c, d gilt, so folgt, daß

$$(2)\qquad (1-t^2)(1-\varkappa^2 t^2)\Phi(t)$$

in der ganzen t-Ebene endlich und stetig ist.

Für $t = \infty$ hat, wie aus der Symmetrie hervorgeht, w den Wert ir_2, und da dieser Punkt kein Verzweigungspunkt ist, so beginnt die Entwickelung von $w - ir_2$ nach fallenden Potenzen von t mit der -1ten Potenz, folglich die von dw/dt mit der -2ten Potenz, und die von $\Phi(t)$ mit der -4ten Potenz von t. Die Funktion (2) ist also im Unendlichen endlich, und muß daher gleich einer Konstanten C^2 sein.

Wir erhalten folglich aus (1):

$$(3)\qquad \frac{d \log w}{dt} = \frac{C}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2 t^2)}}.$$

Zur Bestimmung der Konstanten C und $\varkappa$ und einer additiven Konstante der Integration hat man die zusammengehörigen Werte

$$(4)\qquad \begin{aligned} t &= \pm 1, & w &= \pm r_1,\\ t &= \pm \frac{1}{\varkappa}, & w &= \pm r_2. \end{aligned}$$

Dazu kommt noch, wie man wieder aus der Symmetrie schließen kann, das zusammengehörige Wertepaar

$$(5)\qquad t = 0, \qquad w = ir_1.$$

Demnach erhalten wir:

$$(6)\qquad \log\frac{w}{i r_1} = C\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2 t^2)}}.$$

Setzt man noch in üblicher Weise

$$(7)\qquad \begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2 t^2)}}, \\ iK' &= \int_1^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2 t^2)}} \end{aligned}$$

und bestimmt die Vorzeichen so, daß K und K' positiv sind, so folgt aus (4) und (6):

$$(8)\qquad \begin{aligned} iCK &= \frac{\pi}{2}, \\ iCK' &= \log\frac{r_2}{r_1}, \end{aligned}$$

also:

$$(9)\qquad \frac{\pi K'}{K} = \log\frac{r_2^2}{r_1^2}, \qquad e^{-\frac{\pi K'}{K}} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = q.$$

In der Bezeichnungsweise der elliptischen Funktionen wird nach (6)

$$(10)\qquad t = \sin\operatorname{am}\left(\frac{1}{C}\log\frac{w}{i r_1}\right),$$

woraus man Ausdrücke für t durch $\log w$ mit Hilfe der Theta-Funktionen erhalten kann.

Hat man so die Abbildung der Fläche W auf die t-Ebene gefunden, so erhält man χ_1 als lineare gebrochene Funktion von t und endlich χ und z nach § 190 (1) und § 188 (9).

Dreiundzwanzigster Abschnitt.

Fortpflanzung von Stößen in einem Gase.

§ 193.

Thermodynamik.

Die hydrodynamischen Differentialgleichungen § 163, 164 genügen allein noch nicht, die unbekannten Funktionen zu bestimmen. Denn wir haben zur Bestimmung der fünf Funktionen u, v, w, ϱ, p nur vier Gleichungen [bei Voraussetzung der Eulerschen Form die Gleichungen § 164 (2) (4)]. Es muß anderswoher noch eine Gleichung kommen, die man in einer Relation zwischen Druck und Dichtigkeit sucht. Bei tropfbaren Flüssigkeiten hilft man sich dadurch, daß man die Dichtigkeit konstant nimmt. Bei der Bewegung von Gasen spielt aber gerade die Dichtigkeitsänderung eine wesentliche Rolle. Die Dichtigkeit hängt außer von dem Druck noch von der Temperatur ab, und wenn wir auch zwischen Druck, Dichtigkeit und Temperatur das Boyle-Mariotte-Gay-Lussacsche Gesetz haben, so wird eben hierdurch noch eine weitere unbekannte Funktion, die Temperatur, eingeführt und bei einer allgemeinen Behandlung des hydrodynamischen Problems müßte auch noch die Wärmeleitung berücksichtigt werden. Ob hier mit einiger Annäherung noch die Gesetze der Wärmeleitung in festen Körpern angewandt werden könnten, ist sehr fraglich. Zum mindesten müßte die Leitfähigkeit der Gase für Wärme als Funktion der Dichtigkeit betrachtet werden, worüber wir wiederum kein Gesetz kennen.

In manchen Fällen kann man mit einer gewissen Annäherung die Temperatur als konstant, d. h. die Wärmeleitung als unendlich groß annehmen und dann gibt uns eben das Boylesche Gesetz die gesuchte Abhängigkeit zwischen Druck und Dichtigkeit. In anderen Fällen, z. B. in dem Fall schneller Luftschwingungen, wird man mit der entgegengesetzten Annahme der Wirklichkeit näher kommen, nach der bei solchen Bewegungen überhaupt kein Wärmeaustausch stattfindet, der Vorgang also, wie man sich ausdrückt, adiabatisch ist. Unter dieser Voraussetzung gewinnt man die noch fehlende Gleichung aus der Thermodynamik[1]).

Bezeichnen wir mit p den Druck, mit ϱ die Dichtigkeit, mit T die Temperatur in Zentesimalgraden von dem sogenannten absoluten Nullpunkt, d. h. von -273^0 an gerechnet, mit R eine Konstante, so gibt uns das Boyle-Gay-Lussacsche Gesetz die Beziehung:

$$p = RT\varrho \tag{1}$$

oder, wenn $v = 1/\varrho$ das spezifische Volumen ist:

$$pv = RT. \tag{2}$$

Hiernach ist der Zustand des ruhenden Gases durch zwei der Größen T, p, ϱ oder v bestimmt.

Wenn dem Gase eine unendlich kleine Wärmemenge dQ zugeführt wird, so ist dQ eine lineare Funktion der zwei unabhängigen Differentiale, aber kein vollständiges Differential. Man kann also nicht von einem Wärmeinhalt Q als Funktion des Zustandes des Gases reden. Dagegen ist nach dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie der Quotient $dQ:T$ ein vollständiges Differential einer Funktion S, die die Entropie genannt wird:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\partial S}{\partial p}\,dp + \frac{\partial S}{\partial v}\,dv, \tag{3}$$

und nach (2) hat man

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v}. \tag{4}$$

Um $\partial S/\partial p$ und $\partial S/\partial v$ zu bestimmen, nehmen wir einmal p konstant, also $dp = 0$, das andere Mal v konstant, also $dv = 0$, und erhalten:

$$d_p Q = v\,\frac{\partial S}{\partial v}\,d_p T = c_p d_p T,$$

$$d_v Q = p\,\frac{\partial S}{\partial p}\,d_v T = c_v d_v T,$$

[1]) Über eine neue Anschauung über die Grundbegriffe der Thermodynamik, besonders des Begriffes der Wärmemenge, sehe man die Abhandlung von Caratheodory: „Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik, Mathematische Annalen, Bd. 67 (1909).

wenn

$$v \frac{\partial S}{\partial v} = c_p$$

(5)

$$p \frac{\partial S}{\partial p} = c_v$$

gesetzt ist. Es sind dann c_p und c_v die Wärmemengen, die erforderlich sind, um in der Masseneinheit die Temperatur bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen um einen Grad zu erhöhen und heißen die spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen. Nach Versuchen von Regnault sind die beiden spezifischen Wärmen von Druck und Temperatur unabhängig, also Konstanten des Gases.

Ihr Verhältnis

(6)
$$k = \frac{c_p}{c_v},$$

das in der Folge eine besonders wichtige Rolle spielt, hat nach den neuesten Versuchen von Masson u. a.[1]) für atmosphärische Luft und wahrscheinlich auch für alle zweiatomigen Gase den Wert 1,405.

Für die Entropie erhält man hiernach:

(7)
$$\frac{dQ}{T} = dS = c_v d \log p + c_p d \log v$$
$$= c_v (d \log p + k d \log v) = c_v d \log (p v^k)$$

und folglich:

(8)
$$S = c_v \log p v^k + \text{const.}$$

Die zugeführte Wärmemenge dQ wird zum Teil zur Temperaturerhöhung, zum Teil zur Arbeitsleistung verwandt. Die Erfahrung rechtfertigt bei idealen Gasen die Annahme, daß die zugeführte Wärme eine andere Energievermehrung als die Temperaturerhöhung und die äußere Arbeit nicht bewirkt[2]). Wenn also zunächst die Temperatur bei konstantem Volumen, also ohne Arbeitsleistung, um dT erhöht wird, so ist dazu die Wärmemenge $c_v dT$ erforderlich, der übrige Teil der Wärme wird auf die Arbeitsleistung gegen den Druck verwendet und diese Arbeit ist $p dv$. Wenn wir also die Wärmemenge in mechanischem Maße messen, so ist nach dem ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie:

---

[1]) Ann. de chim. et de phys., III. Ser., T. 53.

[2]) Riemann beruft sich zur Rechtfertigung dieser Annahme auf Versuche von Regnault und Joule.

(9) $$dQ = p\,dv + c_v\,dT$$

und hieraus ergibt sich, wenn man aus (7) den Wert von dQ substituiert:

$$p\,dv = -c_v\,dT + (c_v\,d\log p + c_p\,d\log v)\,T,$$

und wenn man aus (4) den Wert

$$dT = T(d\log p + d\log v)$$

entnimmt:

$$p\,dv = (c_p - c_v)\,T\,d\log v,$$

also, wenn man $dv = v\,d\log v$ setzt:

$$p\,v = (c_p - c_v)\,T$$

und folglich nach (2):

$$R = c_p - c_v.$$

Wird dem Gase die Wärmemenge dQ und die Arbeit dA zugeführt, so wächst die Energie des Gases um

$$de = dQ + dA,$$

und da die zugeführte Arbeit $-p\,dv$ ist, um

$$de = dQ - p\,dv$$

und nach (9):

(10) $$de = c_v\,dT.$$

Die Energiezunahme ist also allgemein mit der Temperaturerhöhung proportional.

Nach (10) ist de ein vollständiges Differential und man kann daher eine Funktion e, die mit der Temperatur proportional ist, als Energie des Gases erklären.

Ist der Vorgang adiabatisch, d. h. geht er ohne Wärmeabgabe vor sich, so ist $dQ = 0$ und folglich:

(11) $$de = -p\,dv.$$

Es ist dann auch $dS = 0$ und folglich S konstant.

Wir können daher einen adiabatischen Vorgang auch als Vorgang konstanter Entropie (isentropisch) bezeichnen.

Nach (8) ist unter dieser Voraussetzung:

(12) $$pv^k = a^2$$

eine Konstante, oder mit Einführung der Dichtigkeit ϱ:

(13) $$p = a^2\varrho^k.$$

Wenn man die additive Konstante in (8) gleich Null setzt, so ergibt sich für die Entropie:

$$S = c_v \log a^2, \tag{14}$$

und für die Temperatur:

$$RT = pv = a^2 \varrho^{k-1}, \tag{15}$$

und endlich für die Energie nach (11) und (13):

$$e = c_v T = \frac{a^2 \varrho^{k-1}}{k-1} = \frac{p}{(k-1)\varrho}. \tag{16}$$

Dieser Ausdruck e bezieht sich auf die Masseneinheit. Es ist danach die Energie der Masse m vom Volumen v

$$me = \frac{pv}{k-1}. \tag{17}$$

Diese Begriffsbildungen, die aus der Betrachtung ruhender oder langsam bewegter Gase gewonnen sind, werden nun auf jeden Bewegungsvorgang angewandt.

§ 194.

Differentialgleichungen für ebene Luftwellen.

Wir wenden uns nun zu den Problemen der Bewegung gasförmiger Flüssigkeiten, in denen die Dichte ϱ als eine gegebene Funktion des Druckes betrachtet wird.

Die Differentialgleichungen, die in diesem Falle die unbekannten Funktionen, nämlich die Dichte und die Komponenten der Geschwindigkeit, bestimmen, sind nicht linear, und ihre Integration bietet daher große Schwierigkeiten. Es sind zwei Wege eingeschlagen worden, um diese Differentialgleichungen zugänglich zu machen, und physikalisch verwendbare Resultate daraus zu ziehen. Bei dem ersten werden die Geschwindigkeiten und die Dichtigkeitsänderungen der Gasteilchen als unendlich klein angesehen, und man führt durch diese Annahme die Differentialgleichungen auf lineare zurück, die in speziellen Fällen eine Integration gestatten, durch die dann die wahren Vorgänge mit einer gewissen Annäherung dargestellt werden. Die mathematischen Hilfsmittel, die hierbei anzuwenden sind, sind wesentlich dieselben, die wir im fünfzehnten Abschnitte auf die elektromagnetischen Schwingungen angewandt haben, und wir gehen hier nicht mehr darauf ein.

Mathematisch von weit höherem Interesse ist der Weg, den uns Riemann eröffnet hat, der in gewissen, besonders einfachen Fällen die allgemeinen Differentialgleichungen ohne Vernachlässigung integriert hat[1]). Wir versuchen, im folgenden ein Bild und einige spezielle Anwendungen dieser Untersuchungen zu geben.

Die vereinfachenden Voraussetzungen, die wir machen, sind die folgenden. Wir sehen zunächst von der Wirkung äußerer Kräfte, wie z. B. der Schwerkraft, gänzlich ab. Der Einfluß solcher Kräfte wird in der Tat bei Vorgängen, wie es die Schallschwingungen in der Luft sind, unmerklich sein.

Wir nehmen ferner an, daß alle Bewegungen nur parallel mit der x-Achse erfolgen (longitudinale Wellen) und daß der Bewegungszustand in allen Punkten einer Ebene, die auf der x-Achse senkrecht steht, derselbe sei, daß also Geschwindigkeit und Dichtigkeit nur von einer räumlichen Koordinate x abhängen. Wir brauchen hierbei diese Ebenen nicht als unbegrenzt anzunehmen, sondern es paßt diese Annahme auch, sofern man von der Reibung des Gases an den Wänden absieht, auf die Bewegung der Luft in zylindrischen Röhren, z. B. in Orgelpfeifen.

Von dem Einflusse einer Begrenzung in der x-Richtung sehen wir gleichfalls ab, denken uns also die Röhre, in der eine solche Bewegung vor sich geht, als unendlich lang.

Wenn wir den Vorgang als adiabatisch voraussetzen, so ist nach § 193 (13):

$$p = a^2 \varrho^k, \tag{1}$$

und damit ist die Anzahl der unbekannten Funktionen mit der Anzahl der Gleichungen in Übereinstimmung gebracht.

Dann ergeben sich aus § 164 (2) und (4) für die unbekannten Funktionen u, ϱ und p die Differentialgleichungen:

$$\text{(I.)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial \log \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \log \varrho}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

---

[1]) Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. VIII, 1860. Riemanns Werke, zweite Auflage, S. 156. Vgl. ein Referat von Christoffel, Fortschritte der Physik **15**, 123.

Unabhängig von Riemann und ungefähr gleichzeitig ist eine Untersuchung von Earnshaw (Philosophical Transactions 1860), die das Problem in ähnlicher Weise angreift, aber nicht so weit führt. Ein Versuch einer Verallgemeinerung ist von Lipschitz gemacht (Crelles Journal **100**, 1885).

Nimmt man für $t = 0$ die Funktionen u und $\log \varrho$ als Funktionen von x als gegeben an, so erhält man aus (I) die Differentialquotienten $\partial u / \partial t$, $\partial \log \varrho / \partial t$ für $t = 0$ gleichfalls als gegebene Funktionen von x, und durch fortgesetzte Differentiation nach t kann man auch die höheren Differentialquotienten bilden. Demnach kann man unter der Voraussetzung des Taylorschen Lehrsatzes diese Funktionen nach Potenzen von t entwickeln und die Entwickelungskoeffizienten sind eindeutig bestimmt. Die Eindeutigkeit der Lösung ist hierdurch aber nur so weit erwiesen, als diese Voraussetzungen zutreffen, und wenn Unstetigkeiten eintreten, so wird es in der Tat unter Umständen mehrere Zustände geben, die den Bedingungen der Aufgabe formal genügen, wenn auch von diesen voraussichtlich nur einer physisch möglich ist.

§ 195.

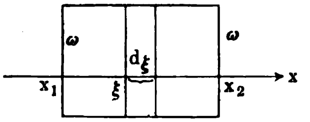
Fortpflanzung von Unstetigkeiten.

Aus den Differentialgleichungen (I) sind u und ϱ als Funktionen von x und t zu bestimmen, wenn diese Größen in einem Augenblick $t = 0$ als Funktionen von x gegeben sind. Sind diese Anfangswerte stetige Funktionen von x, so werden sie sich zunächst diesen Differentialgleichungen gemäß ändern, aber es wird, wie wir später noch sehen werden, in den meisten Fällen eintreten, daß sie im Laufe der Zeit in unstetige Funktionen von x übergehen. Von da an genügen dann die Differentialgleichungen allein nicht mehr, um den ferneren Verlauf der Funktionen zu bestimmen. Es muß für diesen Fall durch besondere Betrachtungen das Gesetz der Fortpflanzung der Unstetigkeiten ermittelt werden.

Es sei also zur Zeit t bei $x = \xi$ eine Stelle, wo sich die Funktionen u und ϱ unstetig ändern und wir nehmen zunächst an, daß sich eine solche Unstetigkeitsstelle einheitlich, d. h. ohne sich in mehrere Unstetigkeitsstellen zu teilen, mit der Zeit fortbewege. Das Gesetz dieser Fortbewegung ist aufzustellen, und dies gelingt durch Betrachtungen, die denen ganz analog sind, aus welchen die Differentialgleichungen selbst abgeleitet worden sind.

Wir bezeichnen mit u_1, ϱ_1 die Werte der Funktionen u, ϱ für $x = \xi - 0$ und mit u_2, ϱ_2 die Werte derselben Funktionen an der Stelle $\xi + 0$. Im Zeitelemente dt habe sich die Unstetigkeitsstelle um die Strecke $d\xi$ fortbewegt. Die erste der aufzustellenden Bedingungen drückt die Kontinuität der Masse aus. Wir betrachten einen der x-Richtung parallelen Zylinder $(x_1\, x_2)$ vom Querschnitt ω, der die Stellen ξ und $\xi + d\xi$ in sich enthält, von beliebiger, aber unendlich kleiner Höhe $x_2 - x_1$ (Fig. 83). Durch die Grundfläche ω bei x_1 fließt in der Zeit dt die Gasmasse $u_1 \varrho_1 \omega dt$ in den Zylinder ein, und durch die Endfläche ω bei x_2 fließt die Gasmasse $u_2 \varrho_2 \omega dt$ aus. Der Gewinn an Masse in dem ganzen Zylinder ist daher

Fig. 83.



$$(u_1 \varrho_1 - u_2 \varrho_2)\omega dt.$$

Ist $d\xi$ positiv, so bleibt die Dichtigkeit ϱ zwischen x_1 und ξ (bis auf eine unendlich kleine Größe) ungeändert gleich ϱ_1 und ebenso zwischen $\xi + d\xi$ und x_2 gleich ϱ_2. In der Strecke $d\xi$ ist aber die Dichtigkeit von ϱ_2 auf ϱ_1 gestiegen, und demnach muß die zugeströmte Masse gleich

$$(\varrho_1 - \varrho_2)\omega d\xi$$

sein. Hieraus ergibt sich die erste Bedingung:

$$u_1 \varrho_1 - u_2 \varrho_2 = (\varrho_1 - \varrho_2)\frac{d\xi}{dt}, \tag{1}$$

die auch für negative $d\xi$ unverändert gültig bleibt.

Die Geschwindigkeiten der Gasmasse sind (bis auf unendlich kleine Größen) in dem Zylinder $(x_1\, x_2)$ ungeändert geblieben, abgesehen von der Schicht $d\xi$.

Setzen wir

$$v = u - \frac{d\xi}{dt}, \tag{2}$$

so ist v die relative Geschwindigkeit, mit der sich ein Gasteilchen, das die Geschwindigkeit u hat, gegen die Unstetigkeitsstelle hin bewegt[1]). Die Bedingung (1) läßt sich dann auch so schreiben:

$$\varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2, \tag{3}$$

oder auch, weil $v_2 - v_1 = u_2 - u_1$ ist:

$$(\varrho_1 - \varrho_2) v_1 = \varrho_2 (u_2 - u_1), \tag{4}$$

und es ist

$$\varrho_1 v_1 \omega dt = \varrho_2 v_2 \omega dt = \mu$$

---

[1]) v hat hier eine andere Bedeutung wie oben, wo es, wie in der Thermodynamik üblich, das spezifische Volumen bedeutete.

die Gasmasse, die in der Zeit dt in der positiven Richtung durch die Unstetigkeitsstelle während deren Bewegung von ξ nach $\xi + d\xi$ hindurchgedrungen ist.

Die Geschwindigkeit dieser Gasmasse ist von u_1 in u_2 übergegangen, und sie hat also die Geschwindigkeitszunahme $u_2 - u_1 = v_2 - v_1$ erfahren. Die Kraft, die diesen Geschwindigkeitsunterschied bewirkt hat, ist aber der Druckunterschied

$$(p_1 - p_2)\,\omega.$$

Nach einem Grundgesetz der Mechanik ist, wenn eine Stoßkraft während einer unendlich kleinen Zeit auf eine Masse wirkt, das Produkt aus der Kraft und der Zeit gleich dem Produkte aus der Masse und dem Geschwindigkeitszuwachse, und es ist also aus (3) und (4)

$$(p_1 - p_2)\,\omega\,dt = (v_2 - v_1)\,\varrho_1 v_1\,\omega\,dt,$$

woraus sich die zweite Bedingung ergibt:

$$(5) \qquad p_1 - p_2 = (v_2 - v_1)\,\varrho_1 v_1 = (u_2 - u_1)\,\varrho_1 v_1.$$

Die Bedingung (1) heißt die Kompatibilitätsbedingung, (5) die Impulsbedingung.

Es kommt eine dritte Bedingung hinzu, die wir die Energiebedingung nennen wollen.

Nach § 193 ist die auf die Masseneinheit bezogene äußere und innere Energie eines bewegten Gasteilchens:

$$\frac{1}{2}\,u^2 + \frac{p}{(k-1)\,\varrho}$$

und folglich ist der Energieverlust der Masse μ, im Zeitelement dt, beim Durchdringen der Unstetigkeitsfläche:

$$\left[\tfrac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2) + \frac{1}{(k-1)}\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right)\right]\mu.$$

Die Arbeit, der dieser Energieverlust entspricht, besteht nun darin, daß die vordere Fläche der Schicht μ gegen die Druckkraft $p_2\,\omega$ um $u_2\,dt$ verschoben ist und die hintere Fläche in der Richtung des Druckes $p_1\,\omega$ um $u_1\,dt$. Die Gesamtarbeit, die geleistet ist, findet sich daher:

$$(p_2 u_2 - p_1 u_1)\,\omega\,dt.$$

Der Satz von der Energie gibt also:

$$(6) \quad \left[\tfrac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2) + \frac{1}{k-1}\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right)\right]\varrho_1 v_1 = p_2 u_2 - p_1 u_1,$$

und dies ist die Energiebedingung.

Wenn wir $\varrho_1 v_1$ aus (4), (5), (6) eliminieren, so erhalten wir zwei Bedingungen, die nur noch die Unstetigkeiten von u, p, ϱ enthalten, nicht mehr die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche. Schreibt man nämlich (4) und (5) in die Form:

$$\begin{aligned}(\varrho_1 - \varrho_2) v_1 \varrho_1 &= \varrho_1 \varrho_2 (u_2 - u_1),\\ (p_1 - p_2) &= (u_2 - u_1) \varrho_1 v_1,\end{aligned}$$

so erhält man durch Multiplikation:

$$(\varrho_1 - \varrho_2)(p_1 - p_2) = \varrho_1 \varrho_2 (u_2 - u_1)^2,$$

und wenn man (6) mit $u_2 - u_1$ multipliziert und (5) benutzt:

$$\left[u_1^2 - u_2^2 + \frac{2}{k-1}\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right)\right](p_1 - p_2) = 2(p_2 u_2 - p_1 u_1)(u_2 - u_1).$$

Ordnet man diese Ausdrücke, so erhält man die gesuchten Bedingungen:

$$\text{II.}\qquad \begin{aligned}(u_1 - u_2)^2 &= (p_1 - p_2)\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\\ \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2)(u_1 - u_2)^2 &= \frac{1}{k-1}\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right)(p_1 - p_2).\end{aligned}$$

Eliminiert man $(u_1 - u_2)^2$ und hebt $p_1 - p_2$ heraus, so ergibt sich:

$$(7)\qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{(k+1)\varrho_1 - (k-1)\varrho_2}{(k+1)\varrho_2 - (k-1)\varrho_1},$$

wodurch das Verhältnis $p_1 : p_2$ durch das Verhältnis $\varrho_1 : \varrho_2$ ausgedrückt werden kann.

Mit der Unstetigkeit von p und ϱ ist eine Unstetigkeit in der Temperatur verbunden, für die man aus

$$(8)\qquad RT = \frac{p}{\varrho}$$

$$(9)\qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 \varrho_2}{p_2 \varrho_1} = \frac{\varrho_2[(k+1)\varrho_1 - (k-1)\varrho_2]}{\varrho_1[(k+1)\varrho_2 - (k-1)\varrho_1]}$$

erhält. Da die Temperatur weder Null, noch unendlich oder negativ werden kann, so folgt hieraus:

$$\frac{k-1}{k+1} < \frac{\varrho_1}{\varrho_2} < \frac{k+1}{k-1}$$

Wenn wir jetzt mit Hugoniot die Annahme machen, daß die Konstante a in dem Poissonschen Gesetz zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle verschiedene Werte habe, also

$$p_1 = a_1^2 \varrho_1^k, \qquad p_2 = a_2^2 \varrho_2^k$$

sei, so ergibt sich aus (7), wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = q$$

setzen:

$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{(k+1)q - (k-1)}{(k+1) - (k^2-1)q}\, q^{-k},$$

und nach § 193 (14) folgt hieraus für die Entropie:

$$(10)\quad \frac{S_1 - S_2}{c_v} = \log\frac{a_1^2}{a_2^2} = -k\log q + \log[(k+1)q - (k-1)] \\ - \log[(k+1) - (k-1)q].$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn $q = 1$ ist und seine Derivierte in bezug auf q ist

$$\frac{k(q-1)^2(k^2-1)}{q[(q+1)^2 - k^2(q-1)^2]},$$

also positiv wenigstens solange als

$$k > 1, \qquad q < \frac{k+1}{k-1}.$$

Es wächst also $S_1 - S_2$ mit q und es ist

$$S_1 - S_2 > 0, \quad \text{wenn} \quad q > 1, \quad \varrho_1 > \varrho_2,$$
$$S_1 - S_2 < 0, \quad \text{„} \quad q < 1, \quad \varrho_1 < \varrho_2.$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsstelle erhalten wir aus (3) und (5):

$$(11)\quad \begin{aligned} v_1 &= \mp\sqrt{\frac{\varrho_2(p_1-p_2)}{\varrho_1(\varrho_1-\varrho_2)}}, \\ v_2 &= \mp\sqrt{\frac{\varrho_1(p_1-p_2)}{\varrho_2(\varrho_1-\varrho_2)}}, \end{aligned}$$

und in diesen beiden Ausdrücken muß das Vorzeichen nach (3) übereinstimmen. Aus (11) erhält man endlich durch (2):

$$\text{III.}\quad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= u_1 \pm \sqrt{\frac{\varrho_2(p_1-p_2)}{\varrho_1(\varrho_1-\varrho_2)}} \\ &= u_2 \pm \sqrt{\frac{\varrho_1(p_1-p_2)}{\varrho_2(\varrho_1-\varrho_2)}}, \end{aligned}$$

woraus folgt, in Übereinstimmung mit der ersten Gleichung II:

$$(12)\quad u_1 - u_2 \pm (\varrho_2 - \varrho_1)\sqrt{\frac{(p_1-p_2)}{\varrho_1\varrho_2(\varrho_1-\varrho_2)}} = 0.$$

Gelten die oberen Zeichen, so ist $d\xi/dt$ größer als u_1 und u_2 und die Unstetigkeitsstelle bewegt sich, relativ zu der Gasmasse, in der Richtung der positiven x-Achse. Aus (12) folgt, daß $u_1 - u_2$ und $\varrho_1 - \varrho_2$ das gleiche Zeichen haben. Wir nennen in diesem Falle die Unstetigkeit einen vorwärts schreitenden Stoß, womit nicht gesagt sein soll, daß $d\xi/dt$ positiv sein müßte.

Gelten in III. die unteren Zeichen, so sprechen wir in demselben Sinne von einem rückwärts schreitenden Stoße. In diesem Falle haben $u_1 - u_2$ und $\varrho_1 - \varrho_2$ entgegengesetzte Zeichen. Wir haben hiernach vier Fälle zu unterscheiden:

Vorwärts schreitende Stöße:

1. $u_1 - u_2 > 0, \quad \varrho_1 - \varrho_2 > 0,$ Verdichtungsstoß,
2. $u_1 - u_2 < 0, \quad \varrho_1 - \varrho_2 < 0,$ Verdünnungsstoß.

Rückwärtsschreitende Stöße:

3. $u_1 - u_2 > 0, \quad \varrho_1 - \varrho_2 < 0,$ Verdichtungsstoß,
4. $u_1 - u_2 < 0, \quad \varrho_1 - \varrho_2 > 0,$ Verdünnungsstoß.

In den Fällen 1., 3. bewegen sich die Gasteilchen zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle gegeneinander, und die dichteren Teile folgen den weniger dichten (in der Richtung des Fortschreitens des Stoßes). Es werden die Gasteile, die von dem Stoße erreicht werden, eine plötzliche Verdichtung erfahren.

In den Fällen 2. und 4. bewegen sich die Gasteilchen zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle auseinander. Im Fortschreiten des Stoßes erfahren die Gasteile eine plötzliche Verdünnung.

Bei einem vorwärts schreitenden Stoß treten die Gasteilchen nach rückwärts, also von 2 nach 1, durch die Stoßstelle hindurch. Nach dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie muß hierbei die Entropie wachsen. Also muß $\varrho_1 > \varrho_2$ sein [nach (10)]. Ebenso ergibt sich, daß bei einem rückwärts schreitenden Stoß $\varrho_1 < \varrho_2$ sein muß.

Verdünnungsstöße können also nicht vorkommen.

§ 196.

Erste Partikularlösung.

Wir beginnen mit einem speziellen Fall, aus dem Lord Rayleigh seinen Einwand gegen die Riemannschen Bedingungen hergeleitet hat.

Die Differentialgleichungen § 194 I. sind offenbar erfüllt, wenn wir u, ϱ, p konstant annehmen. Die Konstanten können aber, wenn Unstetigkeit vorhanden ist, in verschiedenen Intervallen verschieden sein. Wir nehmen eine ruhende Unstetigkeitsfläche bei $\xi = 0$ an. Dadurch wird der von dem Gas erfüllte Raum in zwei Teile, τ_1, τ_2, zerlegt und es sei

$$\begin{aligned} &\text{in } \tau_1: x < 0 \quad u = u_1, \quad \varrho = \varrho_1, \quad p = p_1, \\ &\text{in } \tau_2: x > 0 \quad u = u_2, \quad \varrho = \varrho_2, \quad p = p_2. \end{aligned}$$

Können wir mit diesen Annahmen den Bedingungen II, III § 195 genügen?

Zunächst ergibt sich, wenn wir $d\xi/dt = 0$ setzen und in III. das obere Zeichen nehmen:

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_1 &= -\sqrt{\frac{\varrho_2(p_1 - p_2)}{\varrho_1(\varrho_1 - \varrho_2)}} \\ u_2 &= -\sqrt{\frac{\varrho_1(p_1 - p_2)}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}}, \end{aligned}$$

wodurch zugleich die erste Bedingung II (1) und

$$(2) \qquad \varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2$$

befriedigt ist, und wenn wir zwischen p_1, ϱ_1, p_2, ϱ_2 die zweite Relation II festsetzen:

$$(3) \qquad \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2)(\varrho_1 - \varrho_2) = \frac{1}{k - 1}(p_1 \varrho_2 - p_2 \varrho_1),$$

so sind alle Bedingungen der Aufgabe befriedigt.

Wenn die Quadratwurzel in (1) das positive Zeichen hat, so fließt das Gas in der Richtung der abnehmenden x, und wir haben bei $x = 0$ einen zwar absolut ruhenden, relativ zur Gasmasse aber vorwärts schreitenden Stoß, und wenn $\varrho_1 > \varrho_2$ ist, einen Verdichtungsstoß.

Wir betrachten eine Gassäule τ vom Querschnitt ω, die im Augenblick t von x_1 bis x_2 reicht und die Unstetigkeitsfläche enthält, also:

$$(4) \qquad x_1 < 0 < x_2.$$

Wenn man will, kann man sich die Gasmasse in eine Röhre eingeschlossen denken, die bei x_1 und x_2 durch zwei Stempel abgeschlossen ist, die sich mit den Geschwindigkeiten u_1, u_2 bewegen. Hat diese Gasmasse in einem Augenblick den hier angenommenen, durch die konstanten Werte u_1, ϱ_1, p_1; u_2, ϱ_2, p_2 charakterisierten Bewegungszustand, dann kann dieser Zustand erhalten bleiben. Wenn wir $\omega = 1$ setzen, so erhalten wir

für die äußere (hier kinetische) Energie:

$$A = -\tfrac{1}{2} x_1 \varrho_1 u_1^2 + \tfrac{1}{2} x_2 \varrho_2 u_2^2 \text{ (Bd. I, § 127)}; \tag{5}$$

für die innere Energie:

$$B = \frac{-p_1 x_1 + p_2 x_2}{k - 1} \text{ [§ 193 (16)]}; \tag{6}$$

für die Arbeit der äußeren Druckkräfte:

$$C = p_1 u_1 - p_2 u_2. \tag{7}$$

Verschiebt sich x_1 und x_2 im Zeitelement dt um dx_1 und dx_2, so ist

$$dx_1 = u_1 dt, \qquad dx_2 = u_2 dt$$

$$-\varrho_1 dx_1 = -\varrho_2 dx_2 = d\mu$$

die in dem Zeitelement dt durch jeden Querschnitt, also auch durch die Unstetigkeitsfläche hindurchgedrungene Gasmasse. Aus (5), (6) und (7) folgt, daß

$$dA = \tfrac{1}{2} d\mu (u_1^2 - u_2^2),$$

$$dB = \frac{d\mu}{k-1}\left(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right),$$

$$C dt = d\mu \left(\frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1}\right),$$

woraus nach (1), (3) der Satz von der Energie:

$$d(A + B) = C dt \tag{8}$$

folgt.

§ 197.

Zweite Partikularlösung.

Wir nehmen jetzt an, daß der Druck p eine beliebige Funktion $\varphi(\varrho)$ der Dichtigkeit sei, von der nur angenommen zu werden braucht, daß sie mit ϱ zugleich wachse, daß also ihr Differentialquotient $\varphi'(\varrho)$ positiv sei. Es ist dann auch für irgend zwei Werte ϱ_1, ϱ_2 von ϱ nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)}{\varrho_1 - \varrho_2} = \varphi'(\varrho') \quad (\varrho_1 < \varrho' < \varrho_2)$$

positiv.

Wir wollen den allgemeinen Differentialgleichungen I. für die Bewegung des Gases:

$$\text{(1)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} &= -\,\varphi'(\varrho)\,\frac{\partial \log \varrho}{\partial x},\\ \frac{\partial \log \varrho}{\partial t} + u\,\frac{\partial \log \varrho}{\partial x} &= -\,\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

unter der speziellen Annahme zu genügen suchen, daß u eine Funktion von ϱ allein sei. Unter dieser Voraussetzung ergeben die Gleichungen (1):

$$\text{(2)}\qquad \begin{aligned} \frac{du}{d\log\varrho}\left(\frac{\partial \log \varrho}{\partial t} + u\,\frac{\partial \log \varrho}{\partial x}\right) &= -\,\varphi'(\varrho)\,\frac{\partial \log \varrho}{\partial x},\\ \frac{\partial \log \varrho}{\partial t} + u\,\frac{\partial \log \varrho}{\partial x} &= -\,\frac{du}{d\log\varrho}\,\frac{\partial \log \varrho}{\partial x}, \end{aligned}$$

und daraus folgt, wenn nicht ϱ konstant ist:

$$\text{(3)}\qquad \left(\frac{du}{d\log\varrho}\right)^2 = \varphi'(\varrho).$$

Wir führen eine Funktion $f(\varrho)$ durch die Gleichung ein:

$$\text{(4)}\qquad f(\varrho) = \int \sqrt{\varphi'(\varrho)}\,d\log\varrho,$$

worin die Quadratwurzel positiv genommen und die Integrationskonstante irgendwie festgelegt ist. Es wird z. B. für das Boylesche Gesetz $\varphi(\varrho) = a^2\varrho$:

$$\text{(5)}\qquad f(\varrho) = a\log\varrho,$$

oder für das Poissonsche $\varphi(\varrho) = a^2\varrho^k$:

$$\text{(6)}\qquad f(\varrho) = \frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}.$$

Dann ergibt sich aus (3), wenn wir mit C eine Konstante bezeichnen:

$$\text{(7)}\qquad u = \pm f(\varrho) + C,$$

worin jedes der beiden Zeichen zulässig ist. Für das obere wird u mit wachsendem ϱ wachsen, für das untere abnehmen. Der eine Fall geht in den anderen über, wenn die x-Richtung entgegengesetzt genommen wird, und beide Fälle sind also nicht wesentlich verschieden.

Führen wir nun diese Annahme in die zweite Gleichung (2) ein, so ergibt sich:

$$\text{(8)}\qquad \frac{\partial \log \varrho}{\partial t} + \left[u \pm \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right]\frac{\partial \log \varrho}{\partial x} = 0,$$

worin das Vorzeichen mit dem Vorzeichen in (7) übereinstimmen muß. Führen wir hierin die Funktion

$$(9) \qquad \eta = u \pm \sqrt{\varphi'(\varrho)} = \pm f(\varrho) \pm \sqrt{\varphi'(\varrho)} + C$$

ein, so erhalten wir, wenn wir (8) mit $d\eta / d \log \varrho$ multiplizieren, für η die Differentialgleichung:

$$(10) \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

Hierin ist η eine gegebene Funktion von ϱ, die unter den beiden Annahmen (5) und (6) die Ausdrücke erhält:

$$(11) \qquad \eta = \pm a \{\log \varrho + 1\} + C,$$

$$(12) \qquad \eta = \pm a \sqrt{k} \frac{k+1}{k-1} \varrho^{\frac{k-1}{2}} + C.$$

Daraus wird, wenn η gefunden ist, ϱ erhalten, und dann ergibt sich u aus (7).

Die Differentialgleichung (10) ist von derselben Form wie die, die wir im § 199 und § 200 des ersten Bandes diskutiert haben. Man erhält ihr allgemeines Integral in der Form:

$$(13) \qquad \eta = F(x - \eta t),$$

worin F das Zeichen für eine willkürliche Funktion ist oder auch

$$(14) \qquad x = \eta t + G(\eta),$$

wenn G die Umkehrung von F, also gleichfalls eine willkürliche Funktion ist.

Zur Veranschaulichung denken wir uns x und t als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene, und verlangen, daß η als Funktion des Ortes in der den positiven Werten von t entsprechenden Halbebene bestimmt werde. Dann können wir der Gleichung (13) den Ausdruck geben, daß jedem konstanten η eine Gerade (14) entspricht, daß also die Funktion η einen konstanten Wert η', den sie in einem Punkte x', t' hat, auf einer geraden Linie von der Gleichung

$$(15) \qquad x - \eta' t = x' - \eta' t'$$

unverändert behalten soll. Auf dieser Geraden erhält sich nach (9) auch ein konstanter Wert ϱ' von ϱ, und also nach (7) auch ein konstanter Wert u' von u.

Bildet diese Linie mit der x-Achse den Winkel ϑ'; so ist

$$\eta' = \operatorname{cotang} \vartheta'.$$

Diese Gerade ist also um so stärker gegen die x-Achse geneigt, je größer η' ist.

Nach unserer Voraussetzung ist $\eta = \eta_0$ auf der x-Achse gegeben. Konstruieren wir also von jedem Punkte x_0 dieser Achse aus eine Gerade unter dem durch

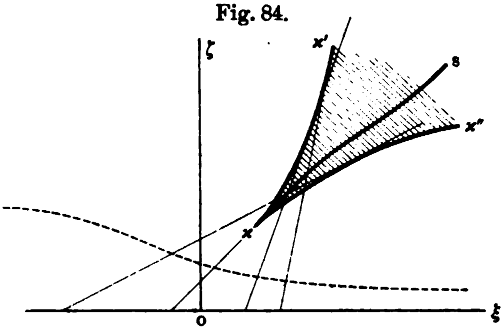
$$\operatorname{cotang} \vartheta_0 = \eta_0$$

bestimmten Winkel, so bleibt der gegebene Wert η_0 auf dieser Geraden erhalten und η ist in jedem Punkte eindeutig bestimmt, solange sich nicht zwei solche Geraden in einem Punkte schneiden. Dies tritt auf der Seite der positiven t niemals ein, wenn η_0 eine mit wachsendem x wachsende Funktion ist, und dann ist also η eindeutig und allgemein bestimmt. In anderen Fällen werden die Geraden für positive t eine Enveloppe haben, die nach (14) durch die beiden Gleichungen

$$t = - G'(\eta),$$
$$x = G(\eta) - \eta G'(\eta)$$

dargestellt ist, und die Lösung ist nur in dem außerhalb der Enveloppe gelegenen Stücke der xt-Ebene eindeutig bestimmt.

Fig. 84.



Im Innern der Enveloppe würde unser Verfahren zwei verschiedene Werte von η geben, und in diesem Teile der Ebene sind also u und ϱ noch nicht bestimmt. Wir können im allgemeinen nicht einmal sagen, daß in diesem Stücke die Voraussetzung, daß u eine Funktion von ϱ ist, noch aufrecht erhalten werden kann.

Wir wollen noch den besonderen Fall betrachten, daß η auf der x-Achse eine gegebene Unstetigkeit bei $x = 0$ hat, und

$$\text{für } t = 0, \quad x < 0 \quad \text{sei} \quad \eta = \eta_1,$$
$$\text{„} \quad t = 0, \quad x > 0 \quad \text{„} \quad \eta = \eta_2,$$

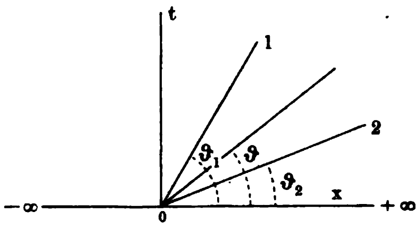
dabei wollen wir annehmen, daß η_1 und η_2 Konstanten seien, und daß die anfängliche Unstetigkeit so beschaffen sei, daß die in dem Poissonschen Gesetz vorkommende Konstante a in beiden Teilen denselben Wert hat. Dies ist nur dadurch möglich, daß in dem Anfangszustand eine durch § 193 (15) bestimmte Unstetigkeit der Temperatur angenommen wird.

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

Erste Annahme $\eta_1 < \eta_2$.

Bestimmen wir die Funktion η durch Konstruktion der geraden Linien (15), so erhalten wir zwei Gerade (0, 1) und (0, 2), deren Neigungswinkel ϑ_1, ϑ_2 gegen die x-Achse durch

Fig. 85.



$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{cotang} \vartheta_1 &= \eta_1, \\ \operatorname{cotang} \vartheta_2 &= \eta_2 \end{aligned}$$

bestimmt sind (Fig. 85). Es ist η konstant $= \eta_1$ in dem Sektor $(-\infty, 0, 1)$ und $= \eta_2$ in dem Sektor $(2, 0, +\infty)$. In dem Sektor $(1, 0, 2)$ bleibt η noch unbestimmt.

Man findet aber sehr leicht (vgl. Bd. I, § 202), daß man der Differentialgleichung (10) in diesem Sektor durch die Annahme

$$\text{(17)} \qquad \eta = \frac{x}{t} = \operatorname{cotang} \vartheta$$

genügt, und diese Werte von η schließen sich an den Linien (0, 1) und (0, 2) stetig an die konstanten Werte η_1, η_2 an. Hier können wir also eine für die ganze Halbebene stetige Lösung finden. Nach (8) ist

$$\text{(18)} \qquad \frac{d \log \varrho}{dt} = \frac{\partial \log \varrho}{\partial t} + u \frac{\partial \log \varrho}{\partial x} = \mp \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, \frac{\partial \log \varrho}{\partial x},$$

und dies ist nach § 164 (1) die Änderung von $\log \varrho$, auf die Zeiteinheit berechnet, die ein bestimmtes Gasteilchen erleidet. Nach (9) ist aber $\log \varrho$ eine Funktion von η, und es ist

$$\frac{d\eta}{d \log \varrho} = \pm \left(\sqrt{\varphi'(\varrho)} + \frac{d \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} \right),$$

und daraus folgt nach (18):

$$\frac{d \log \varrho}{dt} = \mp \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, \frac{\partial \log \varrho}{\partial x} = \frac{-\sqrt{\varphi'(\varrho)}\, \frac{\partial \eta}{\partial x}}{\sqrt{\varphi'(\varrho)} + \frac{d \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho}};$$

folglich, wenn η durch (17) bestimmt ist:

$$\frac{d \log \varrho}{d t} = -\frac{1}{t\left(1 + \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho}\right)},$$

also nach dem Boyleschen Gesetz:

$$\frac{d \log \varrho}{d t} = -\frac{1}{t}$$

und nach dem Poissonschen Gesetz:

$$\frac{d \log \varrho}{d t} = -\frac{2}{(k+1) t};$$

in beiden Fällen ist also $d \log \varrho / d t$ negativ, d. h. die Dichtigkeit nimmt in jedem Gasteilchen ab, und es breitet sich also von der Unstetigkeitsstelle eine stets breiter werdende Verdünnungswelle aus, deren vorderes und hinteres Ende mit konstanter Geschwindigkeit fortschreiten.

Damit dieser Bewegungszustand möglich sei, können die Anfangswerte $u_1, \varrho_1, u_2, \varrho_2$ nicht ganz willkürlich gegeben sein, sondern es muß zufolge der Gleichung (9), die in dem ganzen Sektor (1, 0, 2) und also auch an dessen Grenzen erfüllt sein muß:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= u_1 \pm \sqrt{\varphi'(\varrho_1)} = \pm f(\varrho_1) \pm \sqrt{\varphi'(\varrho_1)} + C, \\ \eta_2 &= u_2 + \sqrt{\varphi'(\varrho_2)} = \pm f(\varrho_2) \pm \sqrt{\varphi'(\varrho_2)} + C, \end{aligned} \tag{19}$$

also

$$u_1 - u_2 = + [f(\varrho_1) - f(\varrho_2)] \tag{20}$$

und außerdem wegen $\eta_1 < \eta_2$:

$$u_1 - u_2 < \mp \left(\sqrt{\varphi'(\varrho_1)} - \sqrt{\varphi'(\varrho_2)}\right) \tag{21}$$

sein.

Für das Poissonsche Gesetz haben wir:

$$u_1 - u_2 = \pm [f(\varrho_1) - f(\varrho_2)] \tag{22}$$

$$\frac{\pm 2 a \sqrt{k}}{k-1}\left(\varrho_1^{\frac{k-1}{2}} - \varrho_2^{\frac{k-1}{2}}\right) < \mp a \sqrt{k}\left(\varrho_1^{\frac{k-1}{2}} - \varrho_2^{\frac{k-1}{2}}\right);$$

also ist, da $2/(k-1) > 1$ ist, nach beiden Annahmen $u_1 - u_2$ negativ und für den Fall der oberen Zeichen ϱ_1 kleiner als ϱ_2, für den Fall der unteren ϱ_1 größer als ϱ_2.

Die Gasteilchen werden sich also an der Unstetigkeitsstelle voneinander entfernen; die Unstetigkeit löst sich auf, und es geht von ihr, je nachdem die oberen oder die unteren Zeichen gelten, eine vorwärtsschreitende oder eine rückwärtsschreitende Verdünnungswelle aus.

Damit ist wieder nicht gemeint, daß diese Welle im absoluten Raume vorwärts oder rückwärts schreitet, sondern nur, daß die Verdünnung im Fortschreiten die vor ihr oder die hinter ihr liegenden Gasmassen ergreift.

Zweite Annahme $\eta_1 > \eta_2$.

In diesem Falle würde die Konstruktion mit den geraden Linien in dem Sektor (1, 0, 2) zwei verschiedene Werte von η ergeben. Dieser Widerspruch kann nur dadurch gelöst werden, daß von der Unstetigkeitsstelle eine Unstetigkeitslinie, also ein Verdichtungsstoß, ausgeht, der den Bedingungen des § 195 genügen muß. Diesen Fall werden wir im nächsten Paragraphen allgemeiner erledigen, und brauchen daher hier nicht näher darauf einzugehen.

§ 198.

Das Riemannsche Beispiel.

Diese Resultate gewähren die Mittel, um das von Riemann gegebene Beispiel (Art. 7 der Riemannschen Abhandlung, gesammelte Werke, S. 168) allgemein durchzuführen. Die Riemannsche Annahme besteht darin, daß zur Zeit $t = 0$ zwei Gasmassen mit den konstanten Geschwindigkeiten und Dichtigkeiten u_1, ϱ_1; u_2, ϱ_2 an einer Ebene $x = 0$ zusammenstoßen. Wir werden im folgenden für alle Annahmen über diese Größen eine Lösung der Differentialgleichungen finden, die für $t = 0$ stetig in diesen Anfangszustand übergeht, und die überall, wo sie unstetig ist, den im § 195 entwickelten Gesetzen gehorcht.

Zur Erleichterung der Anschauung behalten wir die Darstellung von x und t durch rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene bei.

Die Lösung dieser Aufgabe erhalten wir aus der einfachen Bemerkung, die teils evident ist, teils sich aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen ergibt, daß die allgemeinen Differentialgleichungen I. des Problems in einem Teile der xt-Ebene befriedigt sind, wenn

a) u und ϱ konstant sind,

b) die beiden Gleichungen

$$u = \pm f(\varrho) + C,$$

$$u = \mp \sqrt{\varphi'(\varrho)} + \frac{x}{t},$$

worin

$$f(\varrho) = \int \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, d \log \varrho, \quad [\S\,197\ (4), (7), (9), (17)]$$

zugleich befriedigt sind, und wir zeigen nun, daß sich alle Möglichkeiten unter den folgenden vier Fällen unterbringen lassen.

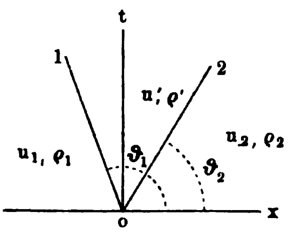
I. Zwei Verdichtungsstöße:

Annahme: Von der Unstetigkeitsstelle laufen zwei Verdichtungsstöße mit konstanter Geschwindigkeit, der eine vorwärts, der andere rückwärts.

Vor dem einen Verdichtungsstoße bleiben die konstanten Werte u_2, ϱ_2, hinter dem anderen die konstanten Werte u_1, ϱ_1, zwischen diesen herrschen konstante Werte u', ϱ' der Funktionen u, ϱ, die noch zu bestimmen sind.

Sind ξ_1, ξ_2 die Abszissen dieser Verdichtungsstöße, so ist (Fig. 86):

Fig. 86.



$$\frac{d\xi_1}{dt} = \text{cotang}\,\vartheta_1, \tag{1}$$
$$\frac{d\xi_2}{dt} = \text{cotang}\,\vartheta_2.$$

Nach § 195 (III) ergeben sich hierfür die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \text{cotang}\,\vartheta_1 &= u_1 - \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho_1}\frac{p'-p_1}{\varrho'-\varrho_1}} \\ &= u' - \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho'}\frac{p'-p_1}{\varrho'-\varrho_1}}, \\ \text{cotang}\,\vartheta_2 &= u_2 + \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho_2}\frac{p'-p_2}{\varrho'-\varrho_2}} \\ &= u' + \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho'}\frac{p'-p_2}{\varrho'-\varrho_2}}, \end{aligned} \tag{2}$$

und zugleich muß, da wir Verdichtungsstöße haben, ϱ' größer als ϱ_1 und ϱ_2 sein. Demnach ergibt sich aus (2):

$$\begin{aligned} u_1 - u' &= \sqrt{\frac{(\varrho'-\varrho_1)(p'-p_1)}{\varrho'\,\varrho_1}}, \\ u' - u_2 &= \sqrt{\frac{(\varrho'-\varrho_2)(p'-p_2)}{\varrho'\,\varrho_2}}, \end{aligned} \tag{3}$$

und daraus durch Addition:

$$(4)\qquad \begin{aligned} u_1 - u_2 = \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_1)(p' - p_1)}{\varrho' \varrho_1}}, \\ + \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_2)(p' - p_2)}{\varrho' \varrho_2}} \end{aligned}$$

mit positiven Quadratwurzeln. Man bemerkt nun, daß die Funktion

$$\frac{(\varrho - \varrho_1)(p - p_1)}{\varrho \varrho_1} = \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)(p - p_1),$$

wenn p mit ϱ zugleich wächst, ebenfalls mit ϱ wächst. Es wächst also die rechte Seite von (4) zugleich mit ϱ' und es folgt, daß, wenn die Gleichung (4) erfüllbar sein soll:

$$\text{I.}\quad u_1 - u_2 > \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(p_1 - p_2)}{\varrho_1 \varrho_2}}$$

sein muß. Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es einen und nur einen Wert von ϱ', der größer ist als der größte der beiden ϱ_1, ϱ_2 und der der Bedingung (4) genügt. Hat man ϱ', so findet man aus einer der beiden Gleichungen (3) den zugehörigen Wert von u'.

Es ist hier $u_1 - u_2$ positiv; es müssen sich also, damit dieser Fall eintrete, zu Anfang die beiden Gasmassen einander entgegen bewegen, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die eine von den Anfangswerten der Dichtigkeit abhängige Grenze überschreiten muß.

Aus den zweiten Darstellungen von cotang ϑ_1, cotang ϑ_2 in (2) ergibt sich:

$$\text{cotang}\,\vartheta_2 > \text{cotang}\,\vartheta_1,$$

wie es in der Fig. 86 angenommen ist.

Als Grenzfall ist noch der zu erwähnen, wo

$$(5)\qquad u_1 - u_2 = \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(p_1 - p_2)}{\varrho_1 \varrho_2}}$$

ist. Ist dann $\varrho_1 > \varrho_2$, so genügen wir den Bedingungen (3), wenn wir $\varrho' = \varrho_1$, $u' = u_1$ setzen, und es bleibt also nur ein vorwärtsschreitender Verdichtungsstoß übrig. Ist aber $\varrho_1 < \varrho_2$, so bleibt nur der rückwärts schreitende Verdichtungsstoß.

Damit aber diese Lösung auch der Energiebedingung genüge, muß noch eine Relation zwischen den Anfangswerten T_1, T_2 der Temperaturen bestehen. Ist nämlich T' die (konstante) Temperatur in dem Raume zwischen den beiden Stößen, so folgt aus § 195 (9):

$$\frac{T_1}{T'} = \frac{\varrho' [(k+1)\varrho_1 - (k-1)\varrho']}{\varrho_1 [(k+1)\varrho' - (k-1)\varrho_1]},$$
$$\frac{T'}{T_2} = \frac{\varrho_2 [(k+1)\varrho' - (k-1)\varrho_2]}{\varrho' [(k+1)\varrho_2 - (k-1)\varrho']},$$

woraus durch Multiplikation:

$$(6) \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{[(k+1)\varrho_1 - (k-1)\varrho'] \cdot [(k+1)\varrho' - (k-1)\varrho_2]}{[(k+1)\varrho' - (k-1)\varrho_1] \cdot [(k+1)\varrho_2 - (k-1)\varrho']},$$

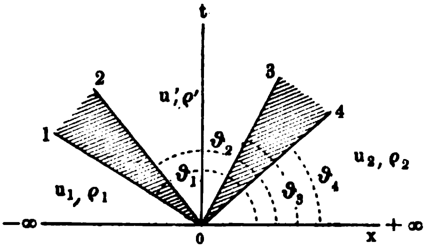
was sich wegen (4) auf eine Beziehung zwischen T_1, T_2, ϱ_1, ϱ_2, $u_1 - u_2$ reduziert. Nehmen wir den besonderen Fall $\varrho_1 = \varrho_2$, nehmen also an, daß sich die ursprüngliche Unstetigkeit nur auf die Geschwindigkeit, nicht auf die Dichte bezieht, so ergibt sich $T_1 = T_2$, so daß auch die anfängliche Unstetigkeit in der Temperatur wegfällt. Zwischen den beiden Stößen steigt dann die Temperatur auf den größeren Wert T'.

II. Zwei Verdünnungswellen.

Annahme: Von der Unstetigkeitsstelle laufen zwei Verdünnungswellen, die eine vorwärts, die andere rückwärts.

Wir lassen vom Nullpunkt (Fig. 87) vier gerade Linien 1, 2, 3, 4 unter den Winkeln ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 gegen die positive x-Achse auslaufen und nehmen an, in dem Sektor $(-\infty, 0, 1)$ seien u, ϱ konstant gleich den gegebenen Anfangswerten u_1, ϱ_1, ebenso in $(4, 0, +\infty)$ gleich u_2, ϱ_2, in $(2, 0, 3)$ seien u, ϱ gleichfalls konstant $= u'$, ϱ', aber noch zu bestimmen. In den Sektoren (1, 0, 2) und (3, 0, 4) werden die Funktionen u, ϱ nach b) bestimmt, und zwar so, daß u, ϱ im ganzen Gebiete stetig sind.

Fig. 87.



Es ist also, wenn C und C' Konstanten sind:

$$(7) \quad \begin{array}{lll} \text{in } (-\infty, 0, 1): & u = u_1, & \varrho = \varrho_1, \\ \text{in } (1, 0, 2): & u = -f(\varrho) + C = \sqrt{\varphi'(\varrho)} + \frac{x}{t}, & \\ \text{in } (2, 0, 3): & u = u', & \varrho = \varrho', \\ \text{in } (3, 0, 4): & u = f(\varrho) + C' = -\sqrt{\varphi'(\varrho)} + \frac{x}{t}, & \\ \text{in } (4, 0, +\infty): & u = u_2, & \varrho = \varrho_2. \end{array}$$

Unstetigkeiten kommen, außer auf der x-Achse ($t = 0$), nicht mehr vor, und die Poissonsche Konstante a^2 hat daher in dem ganzen Raum denselben Wert. Damit dies möglich sei, muß die Temperatur T zu Anfang nach § 195 (9) die durch

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^{k-1}$$

bestimmte Unstetigkeit haben, und wiederum wird nur in dem besonderen Falle, daß die anfängliche Unstetigkeit nur in der Geschwindigkeit, nicht in der Dichtigkeit liegt, die Temperatur im ganzen Raum zu Anfang gleich sein. Wäre diese Bedingung für die Anfangstemperatur nicht erfüllt, so müßte man in den verschiedenen Sektoren verschiedene Werte von a annehmen, und unsere Annahme wäre nicht statthaft.

Die Forderung der Stetigkeit an den Linien (0 1), (0 2), (0 3), (0 4) ergibt nun folgende Bedingungen:

$$(8) \quad \begin{array}{lll} 1. \; u_1 = -f(\varrho_1) + C & = \sqrt{\varphi'(\varrho_1)} & + \operatorname{cotang} \vartheta_1, \\ 2. \; u' = -f(\varrho') + C & = \sqrt{\varphi'(\varrho')} & + \operatorname{cotang} \vartheta_2, \\ 3. \; u' = f(\varrho') + C' & = -\sqrt{\varphi'(\varrho')} & + \operatorname{cotang} \vartheta_3, \\ 4. \; u_2 = f(\varrho_2) + C' & = -\sqrt{\varphi'(\varrho_2)} & + \operatorname{cotang} \vartheta_4, \end{array}$$

und aus diesen acht Gleichungen sind die acht Unbekannten

$$C, \quad C', \quad u', \quad \varrho', \quad \vartheta_1, \quad \vartheta_2, \quad \vartheta_3, \quad \vartheta_4$$

zu ermitteln. Wir eliminieren zunächst die Konstanten C, C' und erhalten:

$$(9) \quad \begin{aligned} u' + f(\varrho') &= u_1 + f(\varrho_1), \\ u' - f(\varrho') &= u_2 - f(\varrho_2), \end{aligned}$$

und daraus:

$$(10) \quad u_1 - u_2 = 2f(\varrho') - f(\varrho_1) - f(\varrho_2).$$

Da es sich hier um Verdünnungswellen handelt, so ist ϱ' kleiner als der kleinere der beiden Werte ϱ_1, ϱ_2. Es ist aber der Differentialquotient

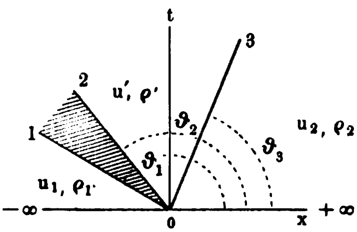
$$(11) \quad f'(\varrho) = \frac{\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{\varrho}$$

positiv und daher $f(\varrho)$ eine mit abnehmendem ϱ abnehmende Funktion. Es folgt also aus (10):

$$\text{II.} \quad \begin{array}{ll} u_1 - u_2 < f(\varrho_2) - f(\varrho_1) < 0, & \text{für } \varrho_1 > \varrho_2, \\ u_1 - u_2 < f(\varrho_1) - f(\varrho_2) < 0, & \quad \text{„} \quad \varrho_2 > \varrho_1, \end{array}$$

also ist $u_1 - u_2$ negativ und dem absoluten Werte nach größer als eine von den Dichtigkeiten abhängige Größe. Es müssen sich also hier die Gasteilchen zu Anfang an der Unstetigkeitsstelle voneinander entfernen. Wenn das Boylesche Gesetz gilt, so ist $f(\varrho) = a \log \varrho$ und kann also, wenn ϱ klein genug ist, unter jeden Wert heruntersinken.

Fig. 88.



Wenn also die Bedingung II. erfüllt ist, so gibt die Gleichung (10) für jeden Wert von $u_1 - u_2$ einen und nur einen Wert von ϱ'[1]).

Wenn ϱ' bestimmt ist, so erhält man aus einer der beiden Gleichungen (9) den zugehörigen Wert von u', der zwischen u_1 und u_2 liegt, und die Gleichungen (8) ergeben die Cotangenten der Winkel $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$, d. h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Grenzen der Verdünnungswellen. Man findet daraus

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{cotang} \vartheta_2 - \operatorname{cotang} \vartheta_1 = u' - u_1 + \sqrt{\varphi'(\varrho_1)} - \sqrt{\varphi'(\varrho')},\\
(12)\quad &\operatorname{cotang} \vartheta_3 - \operatorname{cotang} \vartheta_2 = 2\sqrt{\varphi'(\varrho')},\\
&\operatorname{cotang} \vartheta_4 - \operatorname{cotang} \vartheta_3 = u_2 - u' + \sqrt{\varphi'(\varrho_2)} - \sqrt{\varphi'(\varrho')},
\end{aligned}
$$

und diese Differenzen sind, wie es sein muß, alle positiv[2]). Die Linien 1, 2, 3, 4 folgen also in der Weise aufeinander, wie es die Fig. 88 angibt.

III. Ein Verdichtungsstoß und eine Verdünnungswelle.

Annahme: Von der Unstetigkeitsstelle läuft ein Verdichtungsstoß nach vorwärts und eine Verdünnungswelle nach rückwärts.

---

[1]) Bei der Poissonschen Annahme $\varphi(\varrho) = a^2 \varrho^k$ wird

$$f(\varrho) = \frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}}$$

und nähert sich, weil $k > 1$ ist, mit abnehmendem ϱ der Grenze Null. Demnach hat die Gleichung (10) nur dann eine positive Wurzel ϱ', wenn

$$u_1 - u_2 > -f(\varrho_1) - f(\varrho_2)$$

ist. Nähert sich $u_1 - u_2$ dieser Grenze, so nähert sich ϱ' der Grenze Null, und es treten Verhältnisse ein, bei denen sich unter Voraussetzung des adiabatischen Zustandes die Temperaturen dem absoluten Nullpunkt nähern würden. Hier ist zweifellos die Annahme eines adiabatischen Vorganges nicht mehr zulässig.

[2]) Wenigstens wenn nicht nur $\varphi(\varrho)$, sondern auch $\varphi'(\varrho)$ als eine mit ϱ wachsende oder mit wachsendem ϱ nicht abnehmende Funktion vorausgesetzt wird, wie es bei beiden speziellen Annahmen über $\varphi(\varrho)$ der Fall ist.

Wir ziehen in der xt-Ebene drei Gerade unter den Winkeln ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 gegen die x-Achse. Die Gerade (0 3) entspricht dem Verdichtungsstoße, der Sektor (1, 0, 2) der Verdünnungswelle.

Es sei

in dem Sektor $(-\infty, 0, 1)$: $u = u_1$, $\varrho = \varrho_1$ constant,

" " " $(1, 0, 2)$: $u = -f(\varrho) + C = \sqrt{\varphi'(\varrho)} + \frac{x}{t}$,

" " " $(2, 0, 3)$: $u = u'$, $\varrho = \varrho'$ constant,

" " " $(3, 0, \infty)$: $u = u_2$, $\varrho = \varrho_2$ constant.

An (0 1) und (0 2) sollen u und ϱ stetig sein, an (0 3) ist nach § 195 III:

$$\frac{d\xi}{dt} = \operatorname{cotang} \vartheta_3 = u' + \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho'}\frac{p' - p_2}{\varrho' - \varrho_2}} \tag{13}$$
$$= u_2 + \sqrt{\frac{\varrho'}{\varrho_2}\frac{p' - p_2}{\varrho' - \varrho_2}}$$

und nach § 195 (7) (Energiebedingung):

$$\frac{p'}{p_2} = \frac{(k+1)\varrho' - (k-1)\varrho_2}{(k+1)\varrho_2 - (k-1)\varrho'}. \tag{14}$$

Die Stetigkeit an (0 1), (0 2) verlangt:

$$\begin{aligned} u_1 &= -f(\varrho_1) + C = \sqrt{\varphi'(\varrho_1)} + \operatorname{cotang} \vartheta_1, \\ u' &= -f(\varrho') + C = \sqrt{\varphi'(\varrho')} + \operatorname{cotang} \vartheta_2, \end{aligned} \tag{15}$$

und da es sich um einen Verdichtungsstoß und eine Verdünnungswelle handelt, so muß $\varrho_2 < \varrho' < \varrho_1$ sein.

Aus (13) und (15) ergibt sich:

$$\begin{aligned} u_1 - u' &= f(\varrho') - f(\varrho_1), \\ u' - u_2 &= (\varrho' - \varrho_2)\sqrt{\frac{p' - p_2}{\varrho'\varrho_2(\varrho' - \varrho_2)}} \\ &= \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_2)(p' - p_2)}{\varrho'\varrho_2}} \end{aligned} \tag{16}$$

und daraus:

$$u_1 - u_2 = f(\varrho') - f(\varrho_1) + \sqrt{\frac{(\varrho' - \varrho_2)(p' - p_2)}{\varrho'\varrho_2}}. \tag{17}$$

Man sieht, wie im Falle I, daß der Ausdruck auf der rechten Seite von (17) zugleich mit ϱ' wächst und er wächst also, während ϱ' von ϱ_2 bis ϱ_1 geht, von einer unteren zu einer oberen Grenze. Soll also

(18) $$\varrho_2 < \varrho' < \varrho_1$$
sein, so muß
$$f(\varrho_2) - f(\varrho_1) < u_1 - u_2 < \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)(p_1 - p_2)}{\varrho_1\,\varrho_2}}$$
sein, und wenn diese Bedingung erfüllt ist, so gibt es einen und nur einen der Gleichung (17) genügenden Wert von ϱ'. Ist ϱ' gefunden, so ergibt eine der Gleichungen (16) den zugehörigen Wert von u' und schließlich erhält man aus (13) und (15) die Winkel ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3. Es ergibt sich aus (15):
$$\operatorname{cotang}\vartheta_2 - \operatorname{cotang}\vartheta_1 = f(\varrho_1) - f(\varrho') + \sqrt{\varphi'(\varrho_1)} - \sqrt{\varphi'(\varrho')},$$
also positiv und aus (13) und (15):
$$\operatorname{cotang}\vartheta_3 - \operatorname{cotang}\vartheta_2 = \sqrt{\varphi'(\varrho')} + \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho'}\,\frac{(p' - p_2)}{\varrho' - \varrho_2}},$$
also ebenfalls positiv. Es folgen also, wie wir angenommen haben, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 von links nach rechts aufeinander.

Hier ergibt sich der Grenzfall einer einzigen rückwärtslaufenden Verdünnungswelle, wenn
$$u_1 - u_2 = f(\varrho_2) - f(\varrho_1),$$
und folglich
$$\varrho' = \varrho_2, \qquad u' = u_2.$$

Aus der Energiebedingung folgt noch eine Relation für die Anfangstemperaturen T_1, T_2. Hier kann nämlich die Konstante a^2 in der Poissonschen Formel $p = a^2 \varrho^k$ zwei verschiedene Werte, a_1^2 in $(-\infty, 0, 3)$ und a_2^2 in $(3, 0, +\infty)$ haben.

Es ist
$$R\,T_1 = a_1^2 \varrho^{k-1}, \qquad R\,T_2 = a_2^2 \varrho_2^{k-1},$$
also:
$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{T_1}{T_2}\left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{k-1}$$
und die Formel (14) gibt:
$$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho'}\right)^k \frac{(k+1)\varrho' - (k-1)\varrho_2}{(k+1)\varrho_2 - (k-1)\varrho'},$$
also:

(19) $$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\varrho_1^{k-1}\,\varrho_2}{\varrho'^k}\,\frac{(k+1)\varrho' - (k-1)\varrho_2}{(k+1)\varrho_2 - (k-1)\varrho'},$$
und in (15) ist unter $f(\varrho)$ die Funktion
$$f(\varrho) = \frac{2\,a_1\sqrt{k}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}}}{k-1}$$
zu verstehen.

IV. **Der Fall eines rückwärtslaufenden Verdichtungsstoßes und einer vorwärtslaufenden Verdünnungswelle ist von dem Fall III nicht wesentlich verschieden. Er ergibt sich, wenn die Ungleichungen**

$$f(\varrho_1) - f(\varrho_2) < u_1 - u_2 < \sqrt{\frac{(\varrho_1 - \varrho_2)\,[\varphi(\varrho_1) - \varphi(\varrho_2)]}{\varrho_1\,\varrho_2}}$$

$$\varrho_1 < \varrho_2$$

bestehen.

Die hier besprochenen Fälle, die sich unter der Annahme ergeben haben, daß die Anfangswerte der Funktionen u, ϱ in zwei Abteilungen je die konstanten Werte u_1, ϱ_1; u_2, ϱ_2 haben, geben auch das Verhalten in der Nähe irgend einer Unstetigkeitsstelle im ersten Augenblick, also für unendlich kleine Werte von x und t, wenn u_1, ϱ_1; u_2, ϱ_2 die Werte von u, ϱ zu beiden Seiten der Unstetigkeitsstelle $x = 0$ bedeuten, auch wenn die Anfangswerte von u und ϱ sonst nicht konstant sind. Es laufen von einer solchen Unstetigkeitsstelle, je nach den Werten von u_1, ϱ_1; u_2, ϱ_2, zwei Verdichtungsstöße, zwei Verdünnungswellen oder ein Verdichtungsstoß und eine Verdünnungswelle aus, die aber im allgemeinen nicht konstante Fortpflanzungsgeschwindigkeiten haben.

Die Integration ist in diesen allgemeinen Fällen zurzeit noch nicht möglich, weil es sich um die Erfüllung von Grenzbedingungen an Kurven handelt, die nicht von vornherein gegeben sind, sondern selbst zu den Unbekannten des Problems gehören.

Es hat sich aber hier aus der Energiebedingung eine komplizierte Bedingung für die anfänglichen Temperaturen ergeben, die erfüllt sein müßte, wenn die Riemannschen Resultate gültig sein sollten. Was geschehen würde, wenn anfangs die Temperaturen beliebig gegeben wären, darüber kann ich nichts sagen [1]).

Nur in dem Falle, daß die anfängliche Dichtigkeit beiderseits gleich und die Unstetigkeit nur in der Geschwindigkeit liegt, ist das Resultat einfach. Die anfängliche Temperatur ist dann gleichfalls beiderseits gleich, und es laufen von der Unstetigkeitsstelle zwei Verdichtungsstöße aus, wenn die beiden Gasmassen aufeinanderstoßen (Fall I, $u_1 - u_2 > 0$) oder zwei Verdünnungs-

---

[1]) Sollte es nicht zu erweisen sein, daß diese Bedingungen für die Temperaturen befriedigt sind, wenn die Unstetigkeiten im Verlauf einer adiabatischen Bewegung aus einem stetigen Zustand entstanden sind?

wellen, wenn die Gasmassen sich voneinander entfernen (Fall II, $u_1 - u_2 < 0$). Für die Fälle III, IV bleibt hier kein Raum, weil sich da $u_1 - u_2 = 0$ ergeben würde.

§ 199.

Zurückführung partieller Differentialgleichungen erster Ordnung auf lineare Gleichungen.

Die Integration des Problems der Luftschwingungen, die Riemann gegeben hat, beruht auf der Möglichkeit, die Differentialgleichungen § 194 (1) auf lineare Gleichungen zurückzuführen, und es zeigt sich also auch hier wieder, daß alle unsere Methoden der Integration partieller Differentialgleichungen nur bei linearen Gleichungen Erfolg haben.

Wir wollen hier die Möglichkeit dieser Zurückführung etwas allgemeiner erörtern, wobei sich die Ursache ergeben wird, weshalb eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens bis jetzt nicht zum Ziele geführt hat.

Wir nehmen an, es seien u_1, u_2 zwei gesuchte Funktionen der unabhängigen Variablen x_1, x_2, und zu ihrer Bestimmung seien zwei lineare und homogene Gleichungen zwischen den vier partiellen Ableitungen $\partial u/\partial x$ gegeben:

$$(1)\qquad \begin{aligned} U_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + U_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + U_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + U_4 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0, \\ U_1' \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + U_2' \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + U_3' \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + U_4' \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned}$$

Wir können diese Differentialgleichungen im Jacobischen Sinne linear nennen (Bd. I, § 66), wenn die U_1, U_1', ... gegebene Funktionen der vier Variablen u_1, u_2, x_1, x_2 sind. Die Eigenschaft linearer Differentialgleichungen, die für die Integration so besonders förderlich ist, daß man nämlich aus partikularen Integralen durch Addition allgemeinere zusammensetzen kann, haben sie aber nur dann, wenn die Koeffizienten U_1, U_2, ... nur von den Variablen x_1, x_2 abhängen, und wir nennen sie also nur dann linear im engeren Sinne, in dem wir dieses Wort bisher meist gebraucht haben.

Nun lassen sich die Gleichungen (1) aber auf solche lineare Gleichungen im engeren Sinne auch dann noch zurückführen, wenn die Koeffizienten U_1, U_1', ... nur von den Variablen u_1, u_2, nicht von den x_1, x_2 abhängen, und in diesem Falle befinden sich die Differentialgleichungen § 194 (I). Die Zurückführung beruht einfach auf der Vertauschung der abhängigen und unabhängigen Variablen. Es ist nämlich

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2,$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2,$$

und durch die Auflösung dieser in bezug auf dx_1, dx_2 linearen Gleichungen erhält man, wenn man

$$\Delta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

setzt:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \Delta dx_1 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} du_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} du_2, \\ \Delta dx_2 &= -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} du_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} du_2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \Delta \frac{\partial x_1}{\partial u_1} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \Delta \frac{\partial x_1}{\partial u_2} &= -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \Delta \frac{\partial x_2}{\partial u_1} &= -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \Delta \frac{\partial x_2}{\partial u_2} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Substituiert man die hieraus folgenden Werte der Differentialquotienten $\partial u/\partial x$ in die Differentialgleichungen (1), so läßt sich der Faktor Δ wegheben und man erhält:

$$(4)\qquad \begin{aligned} U_1 \frac{\partial x_2}{\partial u_2} - U_2 \frac{\partial x_2}{\partial u_1} - U_3 \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + U_4 \frac{\partial x_1}{\partial u_1} &= 0, \\ U_1' \frac{\partial x_2}{\partial u_2} - U_2' \frac{\partial x_2}{\partial u_1} - U_3' \frac{\partial x_1}{\partial u_2} + U_4' \frac{\partial x_1}{\partial u_1} &= 0. \end{aligned}$$

Hierin sind nun die u_1, u_2 die unabhängigen Variablen und x_1, x_2 Funktionen von ihnen. Da nach der Voraussetzung auch die Koeffizienten U, U' nur von u_1, u_2 abhängen, so sind die Differentialgleichungen linear im engeren Sinne, und dies ist der Fall der von Riemann integrierten Gleichungen.

Man sieht aber zugleich, daß dieser Weg nicht zum Ziele führt, wenn die Anzahl der abhängigen und der unabhängigen Variablen größer als 2 ist, weil dann auf der rechten Seite der

Formeln, die den Formeln (2), (3) analog sind, nicht mehr einfach die Differentialquotienten $\partial u / \partial x, \ldots$, sondern gewisse aus diesen gebildete Determinanten auftreten.

§ 200.

Stetiger Anfangszustand.

Diese allgemeinen Prinzipien wenden wir nun auf den besonderen Fall der Differentialgleichungen der Luftschwingungen an. Die Resultate, die sich dann ergeben, sind aber nur so lange ausreichend, als der Zustand des Gases in bezug auf Geschwindigkeit und Dichtigkeit stetig ist. Es ergeben sich zwar daraus Kennzeichen für das Eintreten von Unstetigkeiten, und von da an gelten dann die Gesetze für die Fortpflanzung der Unstetigkeiten, die sich in der Differentialgleichung § 195 (III) ausdrücken. Aber selbst die Aufstellung dieser Differentialgleichung würde erst dann möglich sein, wenn diese Probleme in allgemeiner Form gelöst wären. Diese Differentialgleichung spielt die Rolle einer Grenzbedingung, für die aber der Ort der Gültigkeit nicht von vornherein gegeben ist, sondern selbst zu den Unbekannten des Problems gehört. Hier können wir nur in ganz speziellen Fällen, zu denen das Beispiel des § 198 gehört (vgl. auch Bd. I, § 201, 202), die Lösung finden.

Es sei also jetzt $p = \varphi(\varrho)$ das Gesetz der Abhängigkeit des Druckes von der Dichtigkeit ϱ, und

$$f(\varrho) = \int \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, d \log \varrho. \tag{1}$$

Wir führen mit Riemann die beiden neuen Variablen r, s ein durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(\varrho) + u &= 2r, & f(\varrho) &= r + s, \\ f(\varrho) - u &= 2s. & u &= r - s. \end{aligned} \tag{2}$$

Der in § 197 diskutierte besondere Fall tritt ein, wenn in einem Gebiete der Variablen x, t eine der beiden Funktionen r, s konstant ist.

Die Anfangswerte u_0, ϱ_0 nehmen wir als gegebene Funktionen von x an. Es sind daher auch die Anfangswerte r_0, s_0 gegebene Funktionen von x, und wenn wir also zur Veranschaulichung die Werte von r und s als rechtwinklige Koordinaten in einer Hilfsebene betrachten, so wird der Anfang durch eine in der rs-Ebene gelegene gegebene Kurve C dargestellt, deren Koordinaten als Funktionen der einen Variablen x gegeben sind.

Aus (2) sind $f(\varrho)$ und u, und, weil $f(\varrho)$ eine mit ϱ wachsende Funktion ist, auch u und ϱ selbst eindeutig durch r und s bestimmt. Die Kurve C, die den Anfangszustand repräsentiert, wird also nur dann zweimal durch denselben Punkt gehen, wenn u_0 und ϱ_0 beide zugleich für zwei verschiedene Werte von x denselben Wert annehmen.

Es sind nun zunächst aus den allgemeinen Differentialgleichungen § 194 (I):

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= -\varphi'(\varrho)\frac{\partial \log \varrho}{\partial x}, \\ \frac{\partial \log \varrho}{\partial t} + u\frac{\partial \log \varrho}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned}$$

Differentialgleichungen für r und s abzuleiten. Es ergibt sich aber aus (1) und (2):

$$(4)\qquad \begin{aligned} 2\frac{\partial r}{\partial x} &= \sqrt{\varphi'(\varrho)}\frac{\partial \log \varrho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}, & 2\frac{\partial s}{\partial x} &= \sqrt{\varphi'(\varrho)}\frac{\partial \log \varrho}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}, \\ 2\frac{\partial r}{\partial t} &= \sqrt{\varphi'(\varrho)}\frac{\partial \log \varrho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}, & 2\frac{\partial s}{\partial t} &= \sqrt{\varphi'(\varrho)}\frac{\partial \log \varrho}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}, \end{aligned}$$

und wenn man die zweite Gleichung (3) mit $\sqrt{\varphi'(\varrho)}$ multipliziert und zur ersten addiert oder von ihr subtrahiert, so folgt nach (4):

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &= -\left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)\frac{\partial r}{\partial x}, \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= -\left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)\frac{\partial s}{\partial x}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$(6)\qquad \begin{aligned} dr &= \frac{\partial r}{\partial x}\left[dx - \left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)dt\right], \\ ds &= \frac{\partial s}{\partial x}\left[dx - \left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)dt\right]. \end{aligned}$$

Um eine klare Anschauung zu gewinnen, denken wir uns für den Augenblick r und s als Funktionen von x und t bestimmt und begrenzen in der xt-Ebene auf der x-Achse eine Strecke $\alpha\beta$, in der die Differentialquotienten $\partial r_0/\partial x$ und $\partial s_0/\partial x$ keinen Zeichenwechsel haben; wir wollen beispielweise annehmen, daß längs $\alpha\beta$

$$\frac{\partial r_0}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial s_0}{\partial x} < 0 \tag{7}$$

sei, also daß r_0 von α nach β wächst, während s_0 abnimmt.

Die Gleichung

$$r = \text{const.}$$

stellt uns in der xt-Ebene eine Kurve dar, und nach (6) ist längs dieser Kurve

$$dx = \left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) dt, \quad ds = 2\frac{\partial s}{\partial x}\sqrt{\varphi'(\varrho)}\, dt, \tag{8}$$

und ebenso ist für eine Kurve $s = \text{const.}$

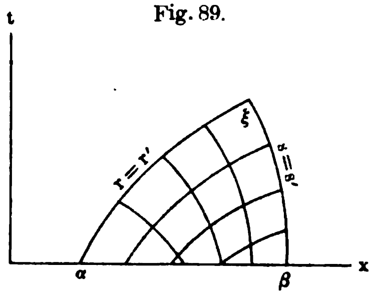
$$dx = \left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) dt, \quad dr = -2\frac{\partial r}{\partial x}\sqrt{\varphi'(\varrho)}\, dt. \tag{9}$$

Beschränken wir unsere Betrachtungen auf ein Flächenstück, in dem $\partial r/\partial x$ und $\partial s/\partial x$ von Null verschieden sind, so zeigt sich aus (7), (8), (9), daß, wenn wir dt positiv nehmen, s auf der Kurve $r = \text{const.}$ und r auf der Kurve $s = \text{const.}$ abnehmen, und zugleich zeigen die Gleichungen (8), (9), daß das Verhältnis dx/dt, d. h. die Cotangente des Neigungswinkels der Kurvenrichtung gegen die x-Achse, in einem Punkte auf der Kurve $r = \text{const.}$ größer ist, als auf der durch denselben Punkt gehenden Kurve $s = \text{const.}$ Es kann also keine Berührung dieser beiden Kurven stattfinden. Ziehen wir also die Kurven $r = \text{const.}$ und $s = \text{const.}$ von jedem Punkte der Strecke $\alpha\beta$ aus, so erhalten wir zwei Kurvenscharen, die sich in der Weise durchschneiden, wie es die Fig. 89 zeigt, und die zusammen ein Dreieck $\alpha\beta\xi$ erfüllen, dessen beide in α, β endigenden Seiten die Gleichungen

$$r = r', \qquad s = s' \tag{10}$$

haben mögen, worin r' der Wert von r_0 in α, s' der Wert von s_0 in β ist.

Fig. 89.



Dieses Dreieck können wir nun durch ein anderes Dreieck in der rs-Ebene abbilden, bei dem die Linie $\alpha\beta$ einem Stück der Kurve C entspricht, und in dem die Kurven

$$r = \text{const.}, \quad s = \text{const.}$$

durch gerade Linien, parallel den Koordinatenachsen, dargestellt werden, wie die Fig. 90 zeigt. Der Punkt ξ hat in dieser Figur die Koordinaten r', s'. Wenn man in der Fig. 89 die Strecke $\alpha\beta$ weiter ausdehnt, so daß z. B. $\partial s_0/\partial x$ sein Zeichen wechselt, dann

Fig. 90.

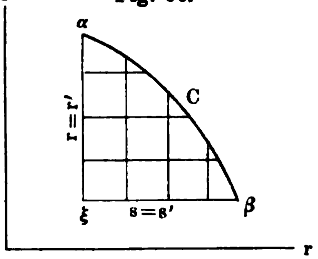
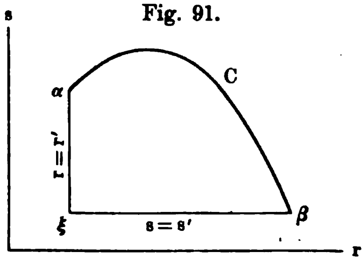


Fig. 91.



würde die Kurve C zwischen α und β ein Maximum oder Minimum haben (Fig. 91). Dann wird, wie wir nachher noch sehen werden, im allgemeinen die Integrationsmethode, die wir anwenden wollen, versagen.

§ 201.

Einführung von r und s als unabhängige Variable.

Die Riemannsche Integrationsmethode beruht auf der Einführung von r und s als unabhängige Variable. Um dies bequem auszuführen setzen wir zunächst die Gleichungen § 200 (6) in die Form

$$(1)\quad \begin{aligned} dr &= \frac{\partial r}{\partial x}\left\{d\left[x-\left(u+\sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)t\right]+t\,d\left(u+\sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)\right\} \\ ds &= \frac{\partial s}{\partial x}\left\{d\left[x-\left(u-\sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)t\right]+t\,d\left(u-\sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Die Funktionen $u+\sqrt{\varphi'(\varrho)}$, $u-\sqrt{\varphi'(\varrho)}$ sind nun nach den Formeln § 200 (2):

$$u = r - s, \qquad \int \sqrt{\varphi'(\varrho)}\, d\log\varrho = r + s$$

als Funktionen von r und s darstellbar, und es ist

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = -1,$$

$$\sqrt{\varphi'(\varrho)}\,\frac{\partial \log\varrho}{\partial r} = \sqrt{\varphi'(\varrho)}\,\frac{\partial \log\varrho}{\partial s} = 1,$$

$$\frac{\partial \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{\partial r} = \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} \sqrt{\varphi'(\varrho)} \frac{\partial \log \varrho}{\partial r} = \frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho},$$

und denselben Wert hat $\partial \sqrt{\varphi'(\varrho)} / \partial s$.

Hiernach ist

$$d\left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) = \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1\right) dr + \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} - 1\right) ds,$$

$$d\left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) = -\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} - 1\right) dr - \left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1\right) ds,$$

und wenn man also dies in (1) substituiert und dann die Koeffizienten von dr, ds auf beiden Seiten einander gleich setzt, so ergeben sich die folgenden vier Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{\partial r}{\partial x}\left\{\frac{\partial\left[x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) t\right]}{\partial r} + t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1\right)\right\} \\ 1 &= \frac{\partial s}{\partial x}\left\{\frac{\partial\left[x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) t\right]}{\partial s} - t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} + 1\right)\right\}. \end{aligned}$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\left[x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) t\right]}{\partial s} &= -t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} - 1\right) \\ \frac{\partial\left[x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) t\right]}{\partial r} &= +t\left(\frac{d \log \sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d \log \varrho} - 1\right). \end{aligned}$$

Aus (3) folgt:

$$\frac{\partial\left[x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) t\right]}{\partial s} + \frac{\partial\left[x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) t\right]}{\partial r} = 0.$$

Diese Gleichung besagt, daß

$$\left[x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) t\right] dr - \left[x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) t\right] ds$$

das vollständige Differential einer Funktion von r und s ist, und daß wir also, wenn wir diese Funktion mit w bezeichnen, setzen können:

$$(4) \qquad \begin{aligned} x - \left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) t &= \frac{\partial w}{\partial r} \\ x - \left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right) t &= -\frac{\partial w}{\partial s}. \end{aligned}$$

Für diese Funktion w, die nach der Definition nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, ergibt sich nun aus einer der Gleichungen (3) eine lineare Differentialgleichung. Es ist nämlich nach (4)

$$(5)\qquad -2\sqrt{\varphi'(\varrho)}\,t = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s},$$

und man erhält also aus jeder der Gleichungen (3):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi'(\varrho)}}\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} - 1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right),$$

oder wenn man zur Abkürzung

$$(6)\qquad \frac{1}{2\sqrt{\varphi'(\varrho)}}\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} - 1\right) = m$$

setzt,

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0.$$

Da nun m eine gegebene Funktion von ϱ, also auch von $r+s$ ist, so haben wir hier eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für die unbekannte Funktion w.

Unter Voraussetzung des Boyleschen Gesetzes $\varphi(\varrho) = a^2\varrho$ ist

$$(8)\qquad m = -\frac{1}{2a},$$

also konstant.

Für das Poissonsche Gesetz $\varphi(\varrho) = a^2\varrho^k$ erhält man:

$$f(\varrho) = \frac{2a\sqrt{k}}{k-1}\varrho^{\frac{k-1}{2}} = r+s,$$

$$\sqrt{\varphi'(\varrho)} = a\sqrt{k}\,\varrho^{\frac{k-1}{2}} = \frac{k-1}{2}(r+s), \quad \frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} = \frac{k-1}{2},$$

woraus

$$(9)\qquad m = \frac{k-3}{2(k-1)(r+s)}.$$

Durch Einführung der Funktion w mittels (4) und (5) nehmen auch die beiden Gleichungen (2) eine einfachere Gestalt an:

$$(10)\qquad \begin{aligned} 1 &= \frac{\partial r}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{2\sqrt{\varphi'(\varrho)}}\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} + 1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right)\right\},\\ -1 &= \frac{\partial s}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{2\sqrt{\varphi'(\varrho)}}\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} + 1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, daß $\partial r/\partial x$ und $\partial s/\partial x$ nicht verschwinden, wenn die Differentialquotienten $\partial^2 w/\partial r^2$, $\partial^2 w/\partial s^2$ endlich sind, und daß $\partial r/\partial x$ oder $\partial s/\partial x$ unendlich werden, wenn die eine oder die andere der beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{2\sqrt{\varphi'(\varrho)}}\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} + 1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{1}{2\sqrt{\varphi'(\varrho)}}\left(\frac{d\log\sqrt{\varphi'(\varrho)}}{d\log\varrho} + 1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0$$

befriedigt ist. Diese Gleichungen geben die kritischen Werte von r und s, in denen die Lösung unstetig zu werden anfängt.

Für den Anfangszustand, also für $t = 0$, erhält man aus (4):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_0 = x, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_0 = -x,$$

und es sind also an der Kurve C die beiden Differentialquotienten von w als Ortsfunktionen gegeben.

Ist dann w bestimmt, so geben die Gleichungen (4) zwei Integrale zwischen den vier Variablen x, t, ϱ, u oder x, t, r, s und damit sind dann auch die Kurven $r =$ const., $s =$ const. (in der Fig. 91) bestimmt.

§ 202.

Integration der Differentialgleichung.

Die Differentialgleichung, um deren Integration es sich jetzt handelt, ist

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0, \tag{1}$$

mit den Nebenbedingungen, daß an der Kurve C

$$\frac{\partial w}{\partial r} = x, \qquad \frac{\partial w}{\partial s} = -x \tag{2}$$

gegebene Funktionen der Stelle sind. Es ist daher auch w selbst auf der Kurve C bis auf eine additive Konstante gegeben.

An dieser Differentialgleichung hat **Riemann** zuerst die Methode der Integration entwickelt, die wir schon früher kennen gelernt und im § 90 auf die Theorie der schwingenden Saite und im § 125 auf die elektromagnetischen Schwingungen angewandt haben[1]).

---

[1]) Die im § 125 (2) gegebene Form der Telegraphengleichung geht durch die Substitution

$$t = \alpha(s + r), \qquad x = c(s - r)$$

geradezu in die Gleichung (1) für ein konstantes m, also für das **Boylesche** Gesetz, über.

Wir wenden den Gaußschen Integralsatz in der Form an:

$$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial s}\right)dr\,ds=\int(U ds - V dr), \tag{3}$$

worin U, V irgend welche stetige Funktionen sein können, und das Doppelintegral sich auf irgend ein Flächenstück der rs-Ebene, das Linienintegral auf der rechten Seite auf die Begrenzung dieses Flächenstückes, in positivem Sinne, bezieht (Bd. I, § 41).

Wir bezeichnen mit v eine einstweilen noch unbestimmte Funktion von r und s und setzen

$$U = v\left(\frac{\partial w}{\partial s} - m w\right), \quad V = -w\left(\frac{\partial v}{\partial r} + m v\right). \tag{4}$$

Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial s} &= v\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s} - m\left(\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right]\\ &\quad - w\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s}+\frac{\partial m v}{\partial r}+\frac{\partial m v}{\partial s}\right),\end{aligned}$$

und wenn wir also für v jetzt die Differentialgleichung festsetzen

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s}+\frac{\partial m v}{\partial r}+\frac{\partial m v}{\partial s}=0, \tag{5}$$

so folgt aus (1) und (5):

$$\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial s}=0,$$

und die Formel (3) ergibt:

$$\int\left[v\left(\frac{\partial w}{\partial s} - m w\right)ds + w\left(\frac{\partial v}{\partial r}+m v\right)dr\right]=0, \tag{6}$$

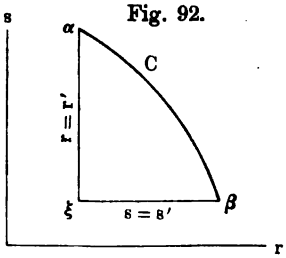


Fig. 92.

worin das Integral in der rs-Ebene über die Begrenzung eines Flächenstückes erstreckt werden kann, in dessen Innern die Funktionen U, V stetig sind.

Das Integral (6) erstrecken wir jetzt über das Flächenstück α, β, ξ (Fig. 92) und erhalten, da dr auf $\alpha\xi$ und ds auf $\beta\xi$ verschwindet:

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^\beta\left\{v\left(\frac{\partial w}{\partial s} - m w\right)ds + w\left(\frac{\partial v}{\partial r}+m v\right)dr\right\} = \\ &\int_\alpha^\xi v\left(\frac{\partial w}{\partial s} - m w\right)ds - \int_\beta^\xi w\left(\frac{\partial v}{\partial r}+m v\right)dr.\end{aligned} \tag{7}$$

Nun ergibt sich durch partielle Integration:

$$\int_\alpha^\xi v \frac{\partial w}{\partial s} ds = (vw)_\xi - (vw)_\alpha - \int_\alpha^\xi w \frac{\partial v}{\partial s} ds,$$

und hierdurch erhält (7) die Form:

$$(8)\quad (vw)_\xi - (vw)_\alpha = \int_\alpha^\xi w \left(\frac{\partial v}{\partial s} + mv\right) ds + \int_\beta^\xi w \left(\frac{\partial v}{\partial r} + mv\right) dr$$

$$+ \int_\alpha^\beta \left[v\left(\frac{\partial w}{\partial s} - mw\right) ds + w\left(\frac{\partial v}{\partial r} + mv\right) dr\right],$$

und wenn wir nun der Funktion v die Grenzbedingungen auferlegen:

an $\alpha\xi$, d. h. für $r = r'$:

$$(9)\quad \frac{\partial v}{\partial s} + mv = 0,$$

an $\beta\xi$, d. h. für $s = s'$:

$$(10)\quad \frac{\partial v}{\partial r} + mv = 0,$$

im Punkt ξ, d. h. für $r = r'$, $s = s'$

$$(11)\quad v = 1,$$

so kommt:

$$(12)\quad w_\xi = (vw)_\alpha + \int_\alpha^\beta \left\{v\left(\frac{\partial w}{\partial s} - mw\right) ds + w\left(\frac{\partial v}{\partial r} + mv\right) dr\right\}.$$

Damit ist die Aufgabe auf die Bestimmung der Funktion v zurückgeführt. Denn wenn v bestimmt ist, so ist w_ξ durch die Formel (12) durch die Werte dargestellt, die w und $\partial w/\partial s$ an der Kurve C haben.

Die Funktion v ist aber durch eine ganz ähnliche Differentialgleichung, wie w selbst [Gleichung (5)], bestimmt. Die Grenzbedingungen für v [(9), (10) und (11)] sind aber wesentlich einfacher, als die für w, da sie gar nichts mehr enthalten, was sich auf die Kurve C bezieht. Es ist daher die Funktion v für alle möglichen Anfangszustände dieselbe.

§ 203.

Bestimmung der Funktion v.

Es bleibt uns also noch übrig, die Funktion v zu bestimmen, die, wenn $r > r'$, $s > s'$ ist, der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial s}+\frac{\partial\, m v}{\partial r}+\frac{\partial\, m v}{\partial s}=0 \tag{1}$$

genügt, mit den Grenzbedingungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial s}+m v=0 \qquad \text{für } r=r',\\
&\frac{\partial v}{\partial r}+m v=0 \qquad \text{für } s=s',\\
&v=1 \qquad \text{für } r=r',\ s=s'.
\end{aligned} \tag{2}$$

Wir betrachten die beiden speziellen Fälle:

$$\begin{aligned}
&\alpha)\ m=-\frac{1}{2a} \quad \text{(Boylesches Gesetz)}\\
&\beta)\ m=\frac{k-3}{2(k-1)(r+s)}=\frac{\lambda}{\sigma} \quad \text{(Poissonsches Gesetz),}
\end{aligned} \tag{3}$$

wenn wir zur Abkürzung

$$\lambda=\frac{k-3}{2(k-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{k-1},$$

$$r+s=\sigma \tag{4}$$

setzen. Es ist also m entweder konstant oder eine Funktion von σ allein.

Um die Bedingungen für die Funktion v zu vereinfachen, setzen wir

$$v=e^{\nu}V, \tag{5}$$

worin ν eine noch näher zu bestimmende Funktion von r und s ist. Führen wir diese Annahme in die Grenzbedingungen (2) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial V}{\partial s}+\left(m+\frac{\partial \nu}{\partial s}\right)V=0 \quad \text{für } r=r',\\
&\frac{\partial V}{\partial r}+\left(m+\frac{\partial \nu}{\partial r}\right)V=0 \quad \text{für } s=s'.
\end{aligned}$$

Wenn wir also

$$v = -\int_{\sigma'}^{\sigma} m\,d\sigma, \qquad v = e^{-\int_{\sigma'}^{\sigma} m\,d\sigma}\, V$$

setzen, so werden diese beiden Bedingungen einfach:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= 0 \quad \text{für } r = r', \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= 0 \quad \text{für } s = s', \end{aligned}$$

und zugleich ist $V = 1$ für $\sigma = \sigma'$, wenn wir $\sigma' = r' + s'$ setzen.

Die Bedingungen (2) reduzieren sich also nach (6) darauf,

(7) daß V konstant gleich 1 sein soll an den beiden Schenkeln des Winkels $\alpha\xi\beta$.

Wir haben noch aus der Differentialgleichung (1) durch die Substitution (5) eine Gleichung für V abzuleiten, und die einfache Rechnung ergibt:

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial s} + \left(\frac{dm}{d\sigma} - m^2\right) V = 0.$$

Diese Gleichung soll nun für das Innere des Quadranten $\alpha\xi\beta$, d. h. für

$$r > r', \qquad s > s'$$

so integriert werden, daß sie an der Grenze dieses Gebietes den konstanten Wert 1 erhält.

Wir wollen eine neue Variable z durch die Gleichung einführen:

$$(9)\qquad z = \mu(s - s')\,(r - r'),$$

worin μ eine noch zu bestimmende Funktion von σ ist. Die Funktion z ist für $r = r'$ und für $s = s'$, also an der Grenze des Gebietes $= 0$, und hat im Innern des Gebietes das Vorzeichen von μ. Nach (6) und (7) ist also V so zu bestimmen, daß es für $z = 0$ den konstanten Wert 1 erhält.

Wir machen den Versuch, der Differentialgleichung (8) durch eine Funktion V von z allein zu genügen. Wenn wir unter dieser Voraussetzung die Differentialquotienten nach r und s bilden, so ergibt sich:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dV}{d\log z}\left(\frac{d\log\mu}{d\sigma} + \frac{1}{r-r'}\right),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial s} = \frac{d^2 V}{d\log z^2}\left(\frac{d\log\mu}{d\sigma} + \frac{1}{r-r'}\right)\left(\frac{d\log\mu}{d\sigma} + \frac{1}{s-s'}\right)$$
$$+ \frac{dV}{d\log z}\frac{d^2\log\mu}{d\sigma^2},$$

und die Gleichung (8) geht also in folgende über:

$$\frac{d^2 V}{d\log z^2}\left(\frac{d\log\mu}{d\sigma} + \frac{1}{r-r'}\right)\left(\frac{d\log\mu}{d\sigma} + \frac{1}{s-s'}\right)$$
$$+ \frac{dV}{d\log z}\frac{d^2\log\mu}{d\sigma^2} + \left(\frac{dm}{d\sigma} - m^2\right)V = 0,$$

oder, indem man die beiden Klammern im ersten Gliede ausmultipliziert und z/μ für $(r-r')(s-s')$ einführt:

$$\frac{d^2 V}{d\log z^2}\left\{\left(\frac{d\log\mu}{d\sigma}\right)^2 + \left[\frac{d\mu}{d\sigma}(\sigma-\sigma') + \mu\right]\frac{1}{z}\right\}$$
$$(10) \qquad + \frac{dV}{d\log z}\frac{d^2\log\mu}{d\sigma^2} + \left(\frac{dm}{d\sigma} - m^2\right)V = 0.$$

Dies geht in eine lineare Differentialgleichung für die Funktion V über, wenn man μ so bestimmen kann, daß die Verhältnisse der Koeffizienten der drei Glieder nur von z, nicht mehr von σ abhängig sind. Man erhält so, wenn c, c_1, c_2 Konstanten sind, die drei Bedingungen:

$$\frac{d^2\log\mu}{d\sigma^2} = c\left(\frac{dm}{d\sigma} - m^2\right),$$

$$(11) \qquad \left(\frac{d\log\mu}{d\sigma}\right)^2 = c_1\left(\frac{dm}{d\sigma} - m^2\right),$$

$$\frac{d\mu}{d\sigma}(\sigma-\sigma') + \mu = \frac{d\mu(\sigma-\sigma')}{d\sigma} = c_2\left(\frac{dm}{d\sigma} - m^2\right),$$

wodurch (10) in

$$(12) \qquad \frac{d^2 V}{d\log z^2}\left(c_1 + \frac{c_2}{z}\right) + c\,\frac{dV}{d\log z} + V = 0$$

übergeht.

Im allgemeinen, d. h. für eine beliebige Funktion m, lassen sich die drei Gleichungen (11) nicht zugleich befriedigen, wohl aber unter den beiden Annahmen α), β). Nehmen wir zunächst nach dem Boyleschen Gesetz m konstant $(= -1/2a)$ an, so ist nach der dritten Gleichung (11) $\mu(\sigma-\sigma')$ eine lineare Funktion von σ, und da nach der zweiten Gleichung (11) auch $\log \mu$ nur eine lineare Funktion von σ sein kann, so muß μ konstant sein. Diese Konstante kann willkürlich genommen werden, und wenn wir sie gleich m^2 setzen, so ergibt sich:

$$c = 0, \qquad c_1 = 0, \qquad c_2 = -1.$$

Es folgt also für V die Differentialgleichung:

$$(13_\alpha) \qquad \frac{1}{z} \frac{d^2 V}{d \log z^2} - V = 0,$$

$$z = \frac{(r - r')(s - s')}{4 a^2}.$$

Nehmen wir ferner nach der Poissonschen Annahme

$$m = \frac{\lambda}{\sigma},$$

so wird

$$\frac{dm}{d\sigma} - m^2 = -\frac{\lambda + \lambda^2}{\sigma^2},$$

und die zweite Gleichung (11) zeigt, daß μ mit einer Potenz von σ proportional, also, wenn h und b Konstanten sind,

$$\mu = b\sigma^h.$$

Nach dieser Annahme geben die Gleichungen (11):

$$\begin{aligned} h &= c(\lambda + \lambda^2), \\ h^2 &= -c_1(\lambda + \lambda^2), \\ b\sigma^{h+1}[h(\sigma - \sigma') + \sigma] &= -c_2(\lambda + \lambda^2), \end{aligned}$$

aus deren letzten man schließt, daß $h = -1$ sein muß. Dann folgt, wenn man noch $b = -1/\sigma'$ setzt, was frei steht,

$$\begin{aligned} 1 &= -c\,(\lambda + \lambda^2), \\ 1 &= -c_1(\lambda + \lambda^2), \\ 1 &= c_2(\lambda + \lambda^2). \end{aligned}$$

Die Gleichung (12) gibt also nach Multiplikation mit $\lambda + \lambda^2$:

$$(13_\beta) \qquad \frac{d^2 V}{d \log z^2}\left(\frac{1}{z} - 1\right) - \frac{dV}{d \log z} + (\lambda + \lambda^2) V = 0,$$

$$z = -\frac{(r - r')(s - s')}{(r + s)(r' + s')}.$$

Die beiden Differentialgleichungen (13_α) und (13_β) lassen sich explizite so darstellen:

$$(14_\alpha) \qquad z\frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{dV}{dz} - V = 0,$$

$$(14_\beta) \qquad z(1-z)\frac{d^2 V}{dz^2} + (1-2z)\frac{dV}{dz} + \lambda(1+\lambda)V = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen wird auf die Differentialgleichung der Besselschen Funktion J [Bd. I, § 72 (13)]

$$\frac{d^2 J}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ}{dx} + J = 0$$

zurückgeführt durch die Substitution $4z = -x^2$. Sie hat also nur eine Lösung, die für $z = 0$ endlich bleibt, und man erhält

$$(15_\alpha) \qquad V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r-r')^n (s-s')^n}{\Pi(n)^2 (2a)^{2n}} \quad \text{[Bd. I, § 71 (1)].}$$

Die Gleichung (14_β) stimmt mit der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe [§ 5 (6)]:

$$z(1-z)\frac{d^2 F}{dz^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\frac{dF}{dz} - \alpha\beta F = 0$$

überein, wenn man

$$\alpha = \lambda + 1, \qquad \beta = -\lambda, \qquad \gamma = 1$$

setzt. Auch diese Gleichung hat nur eine Lösung, die bei $z = 0$ endlich bleibt, und man erhält

$$(15\ ) \qquad V = F\left(\lambda+1,\ -\lambda,\ 1,\ -\frac{(r'-r)(s'-s)}{(r+s)(r'+s')}\right),$$

und hiermit ist also die Integration vollendet.

§ 204.

Das allgemeine Riemannsche Beispiel.

Wir betrachten jetzt den Fall, wo Geschwindigkeit und Dichtigkeit zu Anfang nur in einem endlichen Bereich (α, β) variabel sind. Außerhalb dieses Bereiches sollen beide Größen konstant, aber zu beiden Seiten verschieden sein. Es sei also, wenn $u_1, \varrho_1, u_2, \varrho_2$ Konstanten sind,

$$(1) \qquad \begin{array}{llll} u = u_1, & \varrho = \varrho_1 & \text{für } t = 0, & x < \alpha, \\ u = u_2, & \varrho = \varrho_2 & \text{für } t = 0, & x > \beta. \end{array}$$

In dem Intervall $\alpha < x < \beta$ sollen u, ϱ zu Anfang variabel sein und sich in α und β stetig an die konstanten Werte ϱ_1, u_1 und ϱ_2, u_2 anschließen. Wir setzen wie früher

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2r &= f(\varrho) + u, \\ 2s &= f(\varrho) - u, \end{aligned}$$

und nehmen, wie in § 200, an, daß r im Intervalle $\alpha\beta$ wächst, während s abnimmt.

Dann muß $r_1 < r_2$, $s_1 > s_2$, folglich nach (2)

$$(3)\qquad \begin{aligned} f(\varrho_1) + u_1 &< f(\varrho_2) + u_2, \\ f(\varrho_1) - u_1 &> f(\varrho_2) - u_2, \end{aligned}$$

also

$$u_1 - u_2 < f(\varrho_2) - f(\varrho_1) < u_2 - u_1$$

sein, und wenn wir noch $\varrho_1 > \varrho_2$, also $f(\varrho_2) - f(\varrho_1)$ negativ annehmen, so stimmt diese Bedingung überein mit der, die wir für den Fall II im § 198 abgeleitet haben, wo wir angenommen haben, daß zwei Gasmassen im Anfang in einer Unstetigkeitsfläche zusammenstoßen, nämlich mit II:

$$(4)\qquad u_1 - u_2 < f(\varrho_2) - f(\varrho_1) < 0,$$

und die Anfangstemperaturen T_1, T_2 sind, wie dort, durch das Verhältnis $T_1 / T_2 = (\varrho_1 / \varrho_2)^{k-1}$ bestimmt.

Wir bestimmen nun die Funktion w und damit auch r und s als Funktionen von x und t nach der Methode der beiden letzten Paragraphen. Dadurch ist das Dreieck α, β, ξ und in ihm die Funktionen r, s bestimmt (Fig. 89, § 200), so daß

$$\begin{aligned} r &= r_1 \qquad \text{an } (\alpha\,\xi) \\ s &= s_2 \qquad \text{an } (\beta\,\xi) \end{aligned}$$

ist. Außerhalb dieses Gebietes nehmen wir r oder s (oder auch beide) als konstant an, und erhalten dann den besonderen Fall, dessen Lösung wir im § 197 dargestellt haben, bei dem sich ein konstantes Wertsystem u, ϱ auf einer geraden Linie erhält, die unter dem Winkel

$$\vartheta = \operatorname{arc\,cotg}\left(u \pm \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)$$

gegen die x-Achse geneigt ist. Hierbei gilt das obere Zeichen für $s = \text{const.}$, das untere für $r = \text{const.}$ Wir bestimmen dann u', ϱ' aus den Gleichungen $r' = r_1$, $s' = s_2$ oder, explizite:

$$(5)\qquad \begin{aligned} f(\varrho') + u' &= f(\varrho_1) + u_1, \\ f(\varrho') - u' &= f(\varrho_2) - u_2, \end{aligned}$$

und diese Gleichungen stimmen mit § 198 (9) überein. Wir konstruieren nun in der xt-Ebene vier gerade Linien $(\alpha\,1)$, $(\xi\,2)$, $(\xi\,3)$, $(\beta\,4)$ unter den Winkeln ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ϑ_4 gegen die positive x-Achse, indem wir

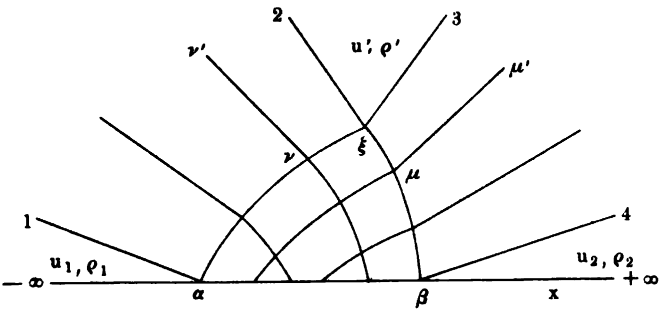
$$(6)\qquad \begin{aligned} \operatorname{cotg}\vartheta_1 &= u_1 - \sqrt{\varphi'(\varrho_1)}, & \operatorname{cotg}\vartheta_2 &= u' - \sqrt{\varphi'(\varrho')}, \\ \operatorname{cotg}\vartheta_3 &= u' + \sqrt{\varphi'(\varrho')}, & \operatorname{cotg}\vartheta_4 &= u_2 + \sqrt{\varphi'(\varrho_2)} \end{aligned}$$

setzen (Fig. 93), und machen über die Funktionen u, ϱ folgende Annahme:

$$\begin{aligned} &\text{in } (-\infty\,\alpha\,1) \text{ ist } u = u_1, && \varrho = \varrho_1, \\ &\text{in } \;(2\;\xi\;3) \;\text{ ist } u = u', && \varrho = \varrho', \\ &\text{in } (4\,\beta + \infty) \text{ ist } u = u_2, && \varrho = \varrho_2; \end{aligned}$$

außerdem setzen wir ein Wertpaar u, ϱ, das in einem Punkt von $(\xi\beta)$, etwa in μ, stattfindet, auf einer geraden Linie $\mu\mu'$ unverändert fort, die unter dem Winkel $\vartheta = \operatorname{arc\,cotg}\left(u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)$ geneigt ist; und ebenso erhalten wir die Werte u, ϱ, die in einem Punkt ν von $(\alpha\,\xi)$ stattfinden, konstant auf einer Geraden $\nu\nu'$ unter dem Winkel $\operatorname{arc\,cotg}\left(u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}\right)$.

Fig. 93.



Dadurch sind die Werte von u, ϱ so weit eindeutig bestimmt, als nicht verschiedene dieser geraden Linien $\mu\mu'$ oder $\nu\nu'$ einander schneiden, solange also diese Linien keine Enveloppe haben. Diese Enveloppen geben Anlaß zu Verdichtungsstößen, die sich noch der Theorie entziehen.

Unter den hier gemachten Voraussetzungen aber ist, wie wir schon im § 198, II gesehen haben, $\varrho' < \varrho_2 < \varrho_1$ und $u_1 < u' < u_2$ und infolgedessen

$$\vartheta_1 > \vartheta_2 > \vartheta_3 > \vartheta_4,$$

und die Linien $(\alpha\,1)$, $(\xi\,2)$, $(\xi\,3)$, $(\beta\,4)$ divergieren also, und wenn wir noch annehmen, daß $u - \sqrt{\varphi'(\varrho)}$ von α bis ξ und $u + \sqrt{\varphi'(\varrho)}$ von ξ bis β stetig wächst[1]), so werden sich die Geraden $(\mu\mu')$

[1]) Dies ist, wenigstens für das Boylesche Gesetz, eine Folge der übrigen Annahmen, nach denen s von α bis ξ abnimmt und r von ξ bis β wächst. Denn nach dem Boyleschen Gesetze ist $u \pm \sqrt{\alpha'(\varrho)} = r - s \pm a$.

$(\nu\nu')$ nirgends schneiden und die Wellen werden also stetig und der Differentialgleichung gemäß verlaufen.

Wir erhalten genau den Fall § 198, II, wenn wir $\alpha\beta$ unendlich klein werden lassen, und wir bekommen daher dasselbe, mögen wir eine Unstetigkeitsebene annehmen oder einen allmählichen Übergang in einem schmalen Gebiet.

Die anderen möglichen Annahmen, die man an Stelle von (3) setzen kann, führen aber zum Teil zu Unstetigkeitsstößen, und unsere Formeln sind nur so lange anwendbar, als noch keine solche Stöße eingetreten sind [1]).

§ 205.
Anfängliche Gleichgewichtsstörung in einem endlichen Intervall.

Da hier zu beiden Seiten der Strecke $\alpha\beta$ Geschwindigkeit und Dichtigkeit verschieden sind, so wird man diesen Fall nicht eigentlich so charakterisieren dürfen, wie es bei Riemann geschieht, daß die anfängliche Gleichgewichtsstörung auf das Intervall $(\alpha\beta)$ beschränkt sei. Die Annahme, die diese Bezeichnung verdient, würde darin bestehen, daß für $x < \alpha$ und $x > \beta$ der Anfangswert von u gleich Null und der von ϱ gleich der normalen Dichtigkeit der Luft ϱ_0, die man etwa gleich 1 setzen kann, sei, und daß nur für das Intervall $\alpha\beta$ die Anfangswerte von u und ϱ davon verschieden seien. Hier werden aber, wenn wir die Anfangswerte als stetig betrachten, die Differentialquotienten $\partial r_0/\partial x$ und $\partial s_0/\partial x$ irgendwo in dem Intervall $(\alpha\beta)$ gleich Null, und daher reicht die Integrationsmethode des § 202 in diesem Falle nicht mehr aus.

Um eine ungefähre Anschauung des Sachverhaltes zu geben, wollen wir annehmen, es sei zu Anfang die Geschwindigkeit überall gleich Null, und in dem Intervall $(\alpha\beta)$ habe ϱ einen von ϱ_0 verschiedenen konstanten Wert ϱ_1. Es ist also der Anfangswert von ϱ bei α und β unstetig, und wenigstens für einen gewissen Zeitraum lassen sich die Bewegungen nach § 198 bestimmen. Sie sind in bezug auf den Mittelpunkt der Strecke $(\alpha\beta)$ symmetrisch und der Anfangszustand genügt den Bedingungen § 198 III oder IV.

[1]) Im Artikel 4 der Riemannschen Abhandlung sind die Linien $\alpha\xi$, $\beta\xi$ irrtümlich als gerade Linien angenommen. Hierauf hat Christoffel in dem erwähnten Bericht in den „Fortschritten der Physik" aufmerksam gemacht.

Wir nehmen außerdem die im § 198 (19) angegebene Bedingung für die Temperaturen als erfüllt an. Ist $\varrho_1 > \varrho_0$, herrscht also in $\alpha\beta$ eine anfängliche Verdichtung, so laufen von den Unstetigkeitsstellen α, β je ein Verdichtungsstoß nach außen und eine Verdünnungswelle nach innen (in bezug auf $\alpha\beta$). Ist $\varrho_1 < \varrho_0$, also eine anfängliche Verdünnung vorhanden, so laufen die Verdünnungswellen nach außen und die Verdichtungsstöße nach innen, wie es die Fig. 94 und 95, die in der xt-Ebene zu denken sind, veranschaulichen. Die Theorie gibt aber die Bewegung des Gases nur so lange, bis die nach innen laufenden Wellen zusammenstoßen. Von da an müßte man den augenblicklichen Zustand als einen neuen Anfangszustand betrachten und könnte, wenigstens im zweiten Falle, wo bei γ eine Unstetigkeit in bezug

Fig. 94.

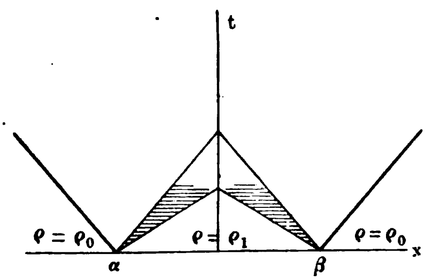
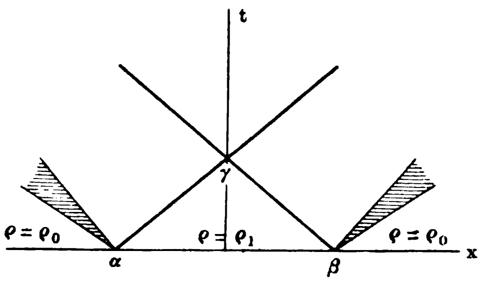


Fig. 95.



auf die Geschwindigkeit eingetreten ist, in derselben Weise noch etwas weiter gehen.

Es laufen dann von γ, d. h. von $x = 0$ aus, zwei weitere Verdichtungsstöße aus, die man als die reflektierten der gegeneinander laufenden Stöße betrachten kann. Von nun an laufen also nach jeder Seite hin eine Verdünnungswelle und ein Verdichtungsstoß, und dazwischen tritt Gleichgewicht ein. Der Verdichtungsstoß kann die Verdünnungswelle einholen, und dann treten wieder neue Verhältnisse ein, die wir nicht weiter verfolgen können. Weniger einfach liegen die Verhältnisse in dem ersten Falle, wo $\varrho_1 > \varrho_0$ ist.

Wenn wir die Geschwindigkeit u und die Schwankungen der Dichtigkeit ϱ um einen mittleren Wert ϱ_0 als unendlich kleine Größen betrachten, so werden die Cotangenten in (6) § 204 alle nur unendlich wenig von $+\sqrt{\varphi'(\varrho_0)}$ abweichen, und es ist also $c = \sqrt{\varphi'(\varrho_0)}$ als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Luft-welle zu betrachten. Für das Boylesche Gesetz ergibt dies den Wert $c = a$, während man für das Poissonsche Gesetz

$$c = a\sqrt{k}\,\varrho_0^{\frac{k-1}{2}}$$

erhält. Um a zu eliminieren, wendet man das Gasgesetz an:

$$p = RT\varrho,$$

also nach der Poissonschen Voraussetzung:

$$a^2\varrho_0^{k-1} = RT$$

und folglich

$$c = \sqrt{kRT}. \tag{1}$$

Nach Riemanns Berechnung (Gesammelte Werke, S. 158) stimmt dieser Ausdruck sehr gut mit den Beobachtungen über die Schallgeschwindigkeit in der Luft überein.

Nimmt man

$$k \doteq 1{,}4101$$

und für atmosphärische Luft bei Null Grad Celsius

$$RT = 783\,750\,000,$$

so erhält man aus (1):

$$c = 332\,44,$$

also 332,44 m in der Sekunde.

Wir schließen mit der historischen Bemerkung, daß die Zurückführung der Differentialgleichung für die Luftschwingungen auf eine lineare Gleichung schon Ampère bekannt gewesen ist. Auf S. 177 der zweiten Abhandlung über partielle Differentialgleichungen im Journal de l'école polytechnique (Cahier XVIII, t. XI, 1820) gibt er dazu einen Weg an, den wir im Anschluß an die von Riemann gebrauchte Bezeichnung kurz so darstellen können:

Wenn man unter Voraussetzung des Boyleschen Gesetzes

$$u = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad a^2 \log\varrho = -\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \tag{2}$$

setzt, so reduzieren sich die beiden Gleichungen § 194, I auf die eine

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t} + \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - a^2\right]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \tag{3}$$

von der Ampère ausgeht. Er setzt dann:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - a\frac{\partial y}{\partial x} = 2a\alpha,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + a\frac{\partial y}{\partial x} = 2a\beta,$$

und nach (2) und § 200 (2) stimmen dann α, β mit $-r$, $-s$ überein.

Es wird ferner eine Funktion η definiert durch

$$\eta = y - (\beta - \alpha)x - [a(\beta + \alpha) - \tfrac{1}{2}(\beta - \alpha)^2]t,$$

die nach § 201 (4) mit Riemanns $-w$ übereinstimmt, und für die sich die partielle Differentialgleichung

$$2a\frac{\partial^2\eta}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{\partial\eta}{\partial\alpha} - \frac{\partial\eta}{\partial\beta} = 0$$

ergibt, in genauer Übereinstimmung mit der Gleichung § 202 (1).

§ 206.

Die Energie des Gases.

Die aus dem Satz von der Erhaltung der Energie abgeleitete Energiebedingung, § 195 (6), ist bei Riemann nicht benutzt, und in der vorigen Auflage dieses Werkes bin ich der Riemannschen Darstellung gefolgt.

Riemann hat unter der Voraussetzung eines adiabatischen Vorganges das Poissonsche Gesetz $p = a^2\varrho^k$ für die Abhängigkeit des Druckes von der Dichtigkeit hergeleitet, und kommt dadurch im Falle unstetiger Bewegung zu Resultaten, die mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie nicht übereinstimmen. Die Annahme eines konstanten Wertes von $a^2 = p\varrho^{-k}$ führt zu einem Gesetz, das man die Erhaltung der Entropie nennen könnte (§ 193). Es zeigt sich also, daß die beiden Gesetze, das der Erhaltung der Energie und der Entropie, nicht immer miteinander verträglich sind, daß beim Durchgang eines Gasteilchens durch eine Unstetigkeitsstelle entweder ein Verlust an Energie oder ein Gewinn an Entropie stattfinden muß. In der Riemannschen Darstellung ist das Energieprinzip preisgegeben, während Hugoniot[1]), Zemplén[2]) u. a. die Erhaltung der Entropie fallen lassen.

[1]) Hugoniot, Journal de l'école polytechnique, Cahier 58, 1889.

[2]) Zemplén, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. IV, S. 3, 1905.

In betreff der Frage, welche von beiden Annahmen die richtige ist, muß man sich klar machen, daß beide Annahmen nur Annäherungen an die Wirklichkeit darstellen. Das Energieprinzip setzt eine reibungslose Bewegung voraus, während das Entropieprinzip jede Wärmeleitung ausschließt. Beides entspricht nicht der Wirklichkeit. Es kommt dazu, daß wir ohne weiteres die Gesetze, wie sie bei ruhenden idealen Gasen gelten, auf bewegte Gase angewandt haben. Ist es doch sogar zweifelhaft, ob bei bewegten Gasen noch das Boylesche und Gay-Lussacsche Gesetz gilt. Es wäre denkbar, daß der Ausgleich zwischen Druck, Volumen und Temperatur eine gewisse Zeit braucht, die noch nicht verstrichen ist, wenn ein neuer Zustand eintritt.

Die hydrodynamischen Gleichungen zeigen, daß auch aus einem stetigen Vorgang im Verlauf der Bewegung Stöße entstehen können. Diese werden sich in der Natur schwerlich glatt fortpflanzen; es wird sich vielmehr, ähnlich wie bei brandenden Wasserwellen, eine Region turbulenter Bewegungen einstellen, wie sie z. B. die Versuche von Mach an fliegenden Projektilen zeigen[1]).

Nach alledem scheint es geboten, die Frage auch noch vom Standpunkt der Riemannschen Theorie zu betrachten, nach der

$$p = a^2 \varrho^k \tag{1}$$

mit einem konstanten Wert von a, der für die ganze Gasmasse für alle Zeit gilt. Wir nehmen also den Vorgang streng adiabatisch an, auch bei Unstetigkeiten.

Wenn wir die Eulerschen Gleichungen für eine bewegte Gasmasse der Reihe nach mit u, v, w multiplizieren und dann addieren, so ergibt sich, wenn wir, wie in § 164 (2), mit d/dt die Differentiation nach der Zeit für ein bestimmtes Gasmolekül bezeichnen, also

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

setzen, und mit

$$U^2 = u^2 + v^2 + w^2 \tag{2}$$

das Quadrat der Geschwindigkeit bezeichnen:

$$\frac{1}{2}\frac{dU^2}{dt} - Xu - Yv - Zw = -\frac{1}{\varrho}\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right). \tag{3}$$

[1]) Mach, Populär-wissenschaftliche Vorlesungen. Leipzig, J. A. Barth, 1903.

Ist V die Kräftefunktion, die wir als bloße Funktion des Ortes voraussetzen, also $\partial V/\partial t = 0$ annehmen, so ist

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

und daher nach (3):

$$(4) \qquad \frac{d(\frac{1}{2}U^2 - V)}{dt} = -\frac{1}{\varrho}\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right).$$

Es sei dm ein bewegtes Massenelement und $d\tau$ das von ihm erfüllte Volumen, also

$$(5) \qquad dm = \varrho\, d\tau,$$

so daß dm von der Zeit unabhängig, $d\tau$ aber mit der Zeit veränderlich ist.

Wir multiplizieren die Gleichung (4) mit dm und integrieren über einen beliebigen Teil m der bewegten Masse, der im Augenblick t den Raum τ einnimmt. Dieser Raum ist durch eine an Gestalt und Lage mit der Zeit veränderliche Fläche O begrenzt deren Elemente wir mit do bezeichnen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(6) \qquad \int\left(\tfrac{1}{2}U^2 - V\right)dm = A,$$

so ergibt sich aus (4) und (5):

$$(7) \qquad \frac{dA}{dt} = -\int\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right)d\tau.$$

Die rechte Seite dieses Ausdruckes formen wir um nach dem Gaußschen Satze. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}$ den Geschwindigkeitsvektor, mit n die nach innen gerichtete Normale an das Element do, und mit U_n die Komponente von $\mathfrak{U}$ in der Richtung n, so ist

$$(8) \quad -\int\left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y} + w\frac{\partial p}{\partial z}\right)d\tau = \int p \operatorname{div}\mathfrak{U}\, d\tau - \int \operatorname{div}(p\mathfrak{U})\, d\tau$$
$$= \int p \operatorname{div}\mathfrak{U}\, d\tau + \int p\, U_n\, do.$$

Nach § 164 (5) ist

$$\operatorname{div}\mathfrak{U} = -\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}$$

und daher

$$(9) \qquad \int p \operatorname{div}\mathfrak{U}\, d\tau = -\int \frac{p}{\varrho^2}\frac{d\varrho}{dt}\, dm.$$

Da nun nach unserer Annahme p eine Funktion $\varphi(\varrho)$ von ϱ ist, so führen wir eine neue Funktion $\psi(\varrho)$ ein, indem wir setzen:

$$\psi(\varrho) = \int \frac{p\,d\varrho}{\varrho^2}, \tag{10}$$

und es ergibt sich, weil dm von der Zeit unabhängig ist, aus (9)

$$\int p \operatorname{div} \mathfrak{U}\, d\tau = -\frac{d}{dt}\int \psi(\varrho)\, dm,$$

und wenn wir also

$$B = \int \psi(\varrho)\, dm, \tag{11}$$

$$C = \int p\, U_n\, do \tag{12}$$

setzen:

$$\frac{d(A+B)}{dt} = C. \tag{13}$$

Hier ist nun A die äußere Energie der Gasmasse m, die sich aus der kinetischen Energie $\int \frac{1}{2} U^2 dm$ und der potentiellen Energie $-\int V dm$ der inneren Volumkräfte zusammensetzt. B ist die innere Energie, die sich im Verlauf der Bewegung in der Gasmasse m angehäuft hat, und $C dt$ ist die Arbeit der gegen die Oberfläche O wirkenden Druckkräfte im Zeitelement dt.

Hiernach ist (13) der Ausdruck für den Satz von der Erhaltung der Energie.

Nach der Annahme (1) ergibt sich:

$$\psi(\varrho) = \frac{a^2 \varrho^{k-1}}{k-1}, \tag{14}$$

was mit dem Ausdruck e für die innere Energie übereinstimmt der im § 193 aus der Thermodynamik hergeleitet ist. Wir setzen also:

$$\psi(\varrho) = e,$$

und nennen e die innere Energie der Masseneinheit des Gases.

§ 207.

Energieverlust durch Stöße.

Um die Energie eines Massenelementes dm zu bestimmen, setzen wir $dm = 1$ und erhalten:

$$A = \tfrac{1}{2} U^2 - V, \tag{1}$$

$$B = \psi(\varrho) = e. \tag{2}$$

Das Oberflächenintegral C müssen wir erst in ein Raumintegral zurückverwandeln, indem wir nach dem Gaußschen Satze

$$\int p\, U_n\, do = -\int \operatorname{div} p\,\mathfrak{U}\, d\tau$$

setzen, und da $dm = \varrho\, d\tau$ ist, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} C &= -\frac{1}{\varrho} \operatorname{div} p\,\mathfrak{U} \\ &= -\frac{p}{\varrho} \operatorname{div} \mathfrak{U} - \frac{1}{\varrho}\left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

Nun ist:

$$u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{U} = -\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt}$$

und folglich:

$$C = \frac{p}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{dt} - \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial t}$$

oder

$$C = -\frac{d}{dt} \frac{p}{\varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{3}$$

Der Energiesatz wird also, auf das Element dm angewandt:

$$d\left(\tfrac{1}{2} U^2 - V + e + \frac{p}{\varrho}\right) = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial t} dt.$$

Hiernach setze ich:

$$\Theta = \tfrac{1}{2} U^2 - V + e + \frac{p}{\varrho}, \tag{4}$$

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{5}$$

und nenne Θdm die Gesamtenergie des Elementes dm.

Bei einer stationären Bewegung ist $\partial p / \partial t = 0$ und folglich Θ konstant. Im allgemeinen ergibt sich:

$$\Theta - \Theta_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial t}\, dt, \tag{6}$$

und dies ist eine andere Form des Satzes von der Energie. Das Integral nach der Zeit ist hier so zu verstehen, daß in dem Integranden $\partial p / \varrho \partial t$ die Koordinaten x, y, z des Massenelementes dm als Funktionen der Zeit angesehen werden.

Die Formel (6) ist aber nur unter der Voraussetzung richtig, daß die Funktion Θ keine sprungweise Änderung erfährt. Wenn aber dm im Verlaufe der Bewegung eine Unstetigkeitsfläche passiert, in der U und ϱ eine plötzliche Wertänderung erleiden, dann muß zu Formel (6) noch eine Ergänzung hinzutreten. Die Funktion, die auf der rechten Seite von (6) unter dem Integralzeichen steht, ist zwar dann gleichfalls unstetig; das Integral selbst aber ändert sich trotzdem stetig. Auf der linken Seite aber erhalten wir einen Zusatz, und es ergibt sich, wenn Θ_1, Θ_2 die Werte von Θ unmittelbar vor und nach dem Eintritt in die Unstetigkeitsfläche bedeuten:

$$\Theta - \Theta_0 + (\Theta_1 - \Theta_2) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varrho} \, dt. \tag{7}$$

Es tritt also durch die Unstetigkeit ein Energieverlust von der Größe $\varDelta \Theta = \Theta_1 - \Theta_2$ ein, wofür wir, da V eine stetige Funktion des Ortes ist, nach (4) auch setzen können:

$$\varDelta \Theta = \tfrac{1}{2}(U_1^2 - U_2^2) + e_1 - e_2 + \frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}. \tag{8}$$

Es ist ein allgemeines Gesetz der Mechanik (Satz von Carnot), daß bei einem mechanischen Systeme, bei dem durch die Bedingungen des Systems eine plötzliche Änderung der Geschwindigkeit notwendig ist, immer ein Verlust an Energie eintritt. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Systembedingungen selbst nicht von der Zeit abhängig sind, weil diese sonst als Energiequellen wirken würden. Wenn beispielsweise ein starrer (unelastischer) Körper auf eine feststehende starre Unterlage auffällt und da zur Ruhe kommt, so wird seine ganze lebendige Kraft vernichtet. Hat aber die Unterlage eine gegebene Bewegung, so kann selbst ein ruhender Körper durch sie in Bewegung gesetzt und ihm so Energie mitgeteilt werden.

In der gewöhnlichen Mechanik starrer Körper sucht man diesen Ausfall an Energie durch die Annahme von Wärmeerzeugung, Schallschwingungen u. dgl. zu decken. Bei den unstetigen Gasbewegungen müssen wir die Kompensation in den oben erwähnten turbulenten Vorgängen suchen, die sich der Berechnung entziehen.

Um diese Betrachtungen auf die eindimensionale Bewegung eines Gases anzuwenden, müssen wir zunächst die Möglichkeit ausschließen, daß die Unstetigkeitsfläche selbst als Energiequelle wirkt. Wir erreichen dies dadurch, daß wir der ganzen Gasmasse eine solche Bewegung erteilen, daß die Unstetigkeitsfläche wenigstens in dem Augenblick die Fortpflanzungsgeschwindigkeit Null hat, in dem das Teilchen dm über diese Stelle hinweggeht, und dies kommt darauf hinaus, daß wir an Stelle der absoluten Geschwindigkeit u des Gasteilchens die relative Geschwindigkeit gegen die Unstetigkeitsfläche, $v = u - d\xi/dt$, setzen. Der Energieverlust ist dann

(9) für den vorwärtsschreitenden Stoß:

$$\varDelta\Theta = \tfrac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + e_2 - e_1 + \frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1},$$

(10) und für den rückwärtsschreitenden Stoß:

$$\varDelta\Theta = \tfrac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) + e_1 - e_2 + \frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2},$$

worin jetzt die Indices 1, 2 sich auf die Stelle $\xi - 0$ und $\xi + 0$ beziehen.

Indem wir nun einen einheitlich fortwandernden Unstetigkeitsstoß annehmen, setzen wir in der ersten dieser Formeln für v_1^2, v_2^2 die Werte aus § 195 (11) und erhalten für den vorwärtsschreitenden Stoß:

$$\varDelta\Theta = \frac{(\varrho_1 + \varrho_2)(p_1 - p_2)}{2\varrho_1\varrho_2} + e_2 - e_1 + \frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1}. \tag{11}$$

Es genügt hier, die Poissonsche Annahme

$$p = \varphi(\varrho) = a^2\varrho^k, \qquad e = \psi(\varrho) = \frac{a^2\varrho^{k-1}}{k-1} \tag{12}$$

zu verfolgen, aus der man die entsprechenden Resultate für das Boylesche Gesetz durch den Grenzübergang $k = 1$ erhalten kann. Aus (11) ergibt sich durch Substitution von (12):

$$\varDelta\Theta = a^2\left[\frac{(\varrho_1 + \varrho_2)(\varrho_1^k - \varrho_2^k)}{2\varrho_1\varrho_2} + \frac{k}{k-1}(\varrho_2^{k-1} - \varrho_1^{k-1})\right],$$

und wenn wir zur Vereinfachung

$$\varrho_2 = \lambda\varrho_1 \tag{13}$$

setzen:

$$\varDelta\Theta = \frac{a^2\varrho_1^{k-1}}{2}\left[(\lambda^{-1} + 1)(1 - \lambda^k) - \frac{2k(1 - \lambda^{k-1})}{k-1}\right]. \tag{14}$$

Setzen wir

$$F(\lambda) = (\lambda^{-1} + 1)(1 - \lambda^k) - \frac{2k(1 - \lambda^{k-1})}{k-1},$$

so ist $$F'(\lambda) = \lambda^{-2}[(k+1)\lambda^k - k\lambda^{k+1} - 1],$$
$$\frac{d\lambda^2 F'(\lambda)}{d\lambda} = k(k+1)\lambda^{k-1}(1-\lambda).$$

Lassen wir λ von 0 bis 1 gehen, so bleibt der letztere Ausdruck positiv; es wächst also $\lambda^2 F'(\lambda)$ mit λ, und da $F'(1) = 0$ ist, so bleibt $F'(\lambda)$ in diesem Intervall negativ und $F(\lambda)$ nimmt mit wachsendem λ ab. Da nun $F(1) = 0$ ist, so folgt, daß $F(\lambda)$ in dem Intervall $0 < \lambda < 1$ positiv bleibt.

Daraus folgt, daß der Ausdruck $\Delta\Theta$ positiv ist, wenn

(15) $$\varrho_2 < \varrho_1$$

ist; und da der Ausdruck (11) für $\Delta\Theta$ sein Zeichen wechselt, wenn ϱ_1 mit ϱ_2 vertauscht wird, so wäre $\Delta\Theta$ negativ, wenn $\varrho_2 > \varrho_1$ wäre.

Es ist also in dem Falle (9) der Verlust an Energie nur dann positiv, wenn $\varrho_2 < \varrho_1$ ist, d. h. bei einem Verdichtungsstoße. Ein Verdünnungsstoß würde mit Energiegewinn verbunden sein, der nach dem Carnotschen Satze hier nicht eintreten kann. Das gleiche ergibt sich für den Fall (10), d. h. für einen rückwärtsschreitenden Stoß.

Damit steht im besten Einklange, daß wir im § 198 alle Fälle durch die Annahme von Verdichtungsstößen erledigen konnten. Verdünnungsstöße können zwar den allgemeinen Differentialgleichungen genügen, es gibt aber für diese Fälle noch eine zweite Lösung, bei der keine Unstetigkeit vorkommt, und die mit dem Gesetze der Energie nicht im Widerspruch steht.

Nach der anderen Auffassung würde ein Verdünnungsstoß einen Verlust an Entropie zur Folge haben (§ 195).

§ 208.

Das Beispiel von Rayleigh.

Lord Rayleigh ist bei seinem Einwand gegen die Riemannsche Theorie der Verdichtungsstöße von dem im § 196 betrachteten Beispiel ausgegangen, bei dem der Zustand der Gasmasse stationär ist[1]).

Nehmen wir an, daß bei einer festen Ebene $x = \xi$ in einer unendlich ausgedehnten Gasmasse die konstanten Werte von Geschwindigkeit und Dichtigkeit

$$\begin{array}{lll} u_1, \varrho_1 & \text{für} & x < \xi, \\ u_2\ \varrho_2 & \text{„} & x > \xi \end{array}$$

[1]) Rayleigh, Theory of Sound, Vol. II, p. 41.

zusammenstoßen, so sind zunächst die allgemeinen Differentialgleichungen § 194, I in der ganzen Masse befriedigt, und um auch den Riemannschen Bedingungen für die Unstetigkeitsstelle [§ 195 (11)] zu genügen, haben wir

$$(1)\qquad \begin{aligned} u_1 &= -\sqrt{\frac{\varrho_2\,(p_1-p_2)}{\varrho_1\,(\varrho_1-\varrho_2)}},\\ u_2 &= -\sqrt{\frac{\varrho_1\,(p_1-p_2)}{\varrho_2\,(\varrho_1-\varrho_2)}} \end{aligned}$$

zu setzen, und hieraus folgt noch

$$(2)\qquad \varrho_1 u_1 = \varrho_2 u_2.$$

Geben wir der Quadratwurzel das positive Zeichen, so fließt das Gas in der Richtung der abnehmenden x, und wir haben bei $x = \xi$ einen zwar absolut ruhenden, relativ zur Gasmasse aber vorwärtsschreitenden Stoß, der ein Verdichtungsstoß ist, wenn $\varrho_1 > \varrho_2$ ist.

Wir wollen nun eine Gassäule τ vom Querschnitt ω betrachten, die im Augenblick t von x_1 nach x_2 reicht und ein Stück der Unstetigkeitsfläche enthält. Dann ist

$$x_1 < \xi < x_2.$$

Ändern sich x_1 und x_2 im Zeitelement dt um dx_1, dx_2, so ist

$$(3)\qquad dx_1 = u_1\,dt, \qquad dx_2 = u_2\,dt,$$

und wegen (2) ist

$$(4)\qquad -\,\omega\,\varrho_1\,dx_1 = -\,\omega\,\varrho_2\,dx_2 = d\mu$$

die in der Zeit dt durch jede der beiden Endflächen von τ und folglich auch durch die Unstetigkeitsfläche hindurchgedrängte Gasmasse.

Für diese Gassäule wollen wir nun nach § 206 die Energie berechnen. Wir zerlegen τ zu diesem Zwecke in zwei Teile τ_1 und τ_2, so daß τ_1 von x_1 bis ξ, τ_2 von ξ bis x_2 reicht. Da wir von äußeren Kräften absehen, so ist $V = 0$ und aus § 206 (6), (11), (12) folgt, da U_n bei $x = x_1$ den Wert u_1, bei $x = x_2$ den Wert $-\,u_2$ hat:

$$(5)\qquad A = \tfrac{1}{2} u_1^2\,\varrho_1\,(\xi - x_1)\,\omega + \tfrac{1}{2} u_2^2\,\varrho_2\,(x_2 - \xi)\,\omega,$$

$$(6)\qquad B = \varrho_1\,e_1\,(\xi - x_1)\,\omega + \varrho_2 e_2\,(x_2 - \xi)\,\omega,$$

$$(7)\qquad C = p_1\,u_1\,\omega - p_2\,u_2\,\omega.$$

Hieraus aber erhält man nach (3) und (4):

$$d(A+B) = d\mu\left[\tfrac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2) + e_1 - e_2\right],$$
$$C\,dt = d\mu\left(\frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1}\right).$$

Es ist also die Differenz $d(A+B) - C\,dt$ nicht gleich Null, wie es nach § 196 (8) sein müßte, sondern gleich

$$d\mu\left[\tfrac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2) + e_1 - e_2 + \frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}\right],$$

und dies ist nach § 207 (9) gleich $-d\mu\,\varDelta\Theta$. Wir nehmen also an Stelle der Formel § 196 (8):

$$C = \frac{d(A+B)}{dt} + \frac{d\mu}{dt}\varDelta\Theta, \tag{8}$$

d. h. durch die Arbeit C des äußeren Druckes muß nicht nur die Zunahme der Energie $A+B$, sondern auch noch der Energieverlust an der Stoßstelle gedeckt werden.

Wir können uns den Vorgang, wie wir ihn hier voraussetzen, auch bei einer endlichen Gasmasse erhalten denken, wenn wir die Säule τ in eine Röhre einschließen, die bei x_1 und x_2 durch zwei Stempel abgeschlossen ist, die sich mit den Geschwindigkeiten u_1, u_2 bewegen. Hat die so abgeschlossene Gasmasse in einem Augenblick den hier angenommenen, durch die konstanten Werte u_1, ϱ_1, u_2, ϱ_2 charakterisierten Bewegungszustand, dann bleibt dieser Zustand erhalten. Der Energieverlust muß durch die Kräfte wieder ersetzt werden, durch die die Bewegung der Stempel erhalten wird.

Wollten wir aber Verdünnungsstöße annehmen, so würde eine Maschine, wie die hier beschriebene, imstande sein, Energie nach außen abzugeben, was im Widerspruch mit dem Satze von der Erhaltung der Energie steht.

Der Bewegungsvorgang unseres Gases ist hier nicht umkehrbar. Denken wir uns in einem Augenblick alle Geschwindigkeiten in die entgegengesetzten verwandelt, so wird die Bewegung nicht in derselben Weise zurückgehen, wie sie vorwärts gegangen ist, sondern die Unstetigkeitsstelle wird sich sofort auflösen und eine Verdünnungswelle ergeben, wie wir in § 198 gesehen haben.

Fassen wir die Resultate unserer Betrachtung zusammen, so hat sich folgendes ergeben:

Unter Voraussetzung eines adiabatischen Vorganges lautet die Relation zwischen Druck und Dichtigkeit

$$p = a^2 \varrho^k$$

und darin ist a konstant, jedenfalls in den Teilen, in denen u und ϱ stetig sind.

An einer Unstetigkeitsstelle gelten die folgenden Bedingungen [§ 195, (3), (5)]:

$$(1) \qquad \varrho_1 v_1 = \varrho_2 v_2,$$

$$(2) \qquad p_1 - p_2 = (v_2 - v_1) \varrho_1 v_1.$$

Beim Durchgang durch die Unstetigkeitsstelle findet ein Energieverlust statt, der für die Masseneinheit

$$\tfrac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + e_2 - e_1 + \frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1}$$

beträgt. Diesem Ausdruck kann man nach § 193 (16) die Form geben:

$$(3) \qquad \varDelta\Theta = \tfrac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2) + \frac{k}{k-1}\left(\frac{p_2}{\varrho_2} - \frac{p_1}{\varrho_1}\right)$$

und wenn man diese Grösse $= 0$ setzt, so erhält man die Hugoniotsche Form der Energiebedingung § 195, (6). Ist aber der Vorgang isentropisch, ist also $p_1 = a^2 \varrho_1^k$, $p_2 = a^2 \varrho_2^k$, so ist $\varDelta\Theta$ bei einem Verdichtungsstoß stets positiv, also $\varDelta\Theta = 0$ nicht erfüllbar, wie in § 207 nachgewiesen ist. Soll die Energie erhalten bleiben, so ergibt sich aus der Gleichung $\varDelta\Theta = 0$ ein von 1 verschiedener Wert des Verhältnisses $a_1 : a_2$ [§ 195, (7)].

Hiernach kann ich meine Darstellung der Riemannschen Theorie der Verdichtungsstöße in der vorigen Auflage, die mehrfach angegriffen worden ist, unter dem im § 206 gemachten Vorbehalt aufrecht erhalten.

In einer neueren Abhandlung (Areal plane waves of finite amplitude, Proceedings of the royal society, Vol. 84, 1910) ist Lord Rayleigh auf die Frage zurückgekommen. Er gibt da den Unterschied zwischen Verdichtungsstößen und Verdünnungsstößen zu, hält aber doch noch Bedenken gegen den Energieverlust aufrecht.

Register zu Bd. I u. II.

Die römischen Ziffern bezeichnen den Band, die arabischen, wo nichts anderes bemerkt, die Seite.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

Q.

R.

S.

T.

U.

V.

W.

Z.